Universidad De Los Lagos
Departamento de Ciencias Exactas

Postgrados en Educación Matemática ULAGOS

sochiem
Sociedad Chilena de Educación Matemática

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

SEREMI
Ministerio de Educación
Región de Los Lagos

CASIO

sm
Juntos cuidamos la educación

PhET
INTERACTIVE SIMULATIONS

XXVI

Actas Jornadas Nacionales de Educación Matemática

Construyendo Caminos por una Educación Matemática para todo Chile

28 DE NOVIEMBRE AL 3 DE DICIEMBRE DE 2022

OSORNO CHILE

Actas XXVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática
XXVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática
Universidad de Los Lagos
Sociedad Chilena de Educación Matemática

Comité Editorial

Guadalupe Morales Ramírez, guadalupe.morales@ulagos.cl

Jesús Guadalupe Lugo-Armenta, jesus.lugo@ulagos.cl

Luis R. Pino-Fan, luis.pino@ulagos.cl

Sofía Caviedes Barrera, sofia.caviedes@ulagos.cl

Silvia Retamal Cisterna, silvia.retamal@ulagos.cl

Maximina Márquez Torres, maximina.marquez@ulagos.cl

Editorial Universidad de Los Lagos
ISBN: 978-956-6043-85-0
Fecha de edición: noviembre 2023
Diseño de portada e interiores: Liesbeth Gómez (Imagen corporativa ULagos)

Cómo citar:
Apellido1, A1., y Apellido2, B2. (2023). Título del capítulo. En Morales-Ramírez, G., Lugo-Armenta, J. G., Pino-Fan, L. R., Caviedes, S., Retamal, S. y Márquez, M., (Eds.), *Actas XXVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp-pp). Osorno: Universidad de Los Lagos.

COMITÉ ORGANIZADOR

PRESIDENTE

Dr. Luis R. Pino-Fan, Universidad de Los Lagos

VICEPRESIDENTE

Dra. Elizabeth Hernández Arredondo, Universidad de Los Lagos

COMITÉ CIENTÍFICO

PRESIDENTE

Dra. Jesús Guadalupe Lugo-Armenta, Universidad de Los Lagos

VICEPRESIDENTE

Dra. Maximina Márquez Torres, Universidad de Los Lagos

COLABORADORES

Dra. Silvia Retamal Cisterna, Universidad de Los Lagos

Dr. Jaime García García, Universidad de Los Lagos

Mg. Carlos Martínez Méndez, Universidad de Los Lagos

Dra. Ismenia Guzmán Retamal, Universidad de Los Lagos

Prof. Rigoberto Medina Leyton, Universidad de Los Lagos

COLABORADORES COMITÉ CIENTÍFICO

Alex Montecino, Universidad de Tarapacá
Alicia Zamorano Vargas, Universidad de Chile
Alonso Quiroz Meza, Universidad Católica Silva Henríquez
Álvaro Cortínez Pontoni, Universidad de Tarapacá
Carlos Cabezas Manríquez, GEOMATH Turismo Científico
Carlos Martínez Méndez, Universidad de Los Lagos
Carmen Oval, Universidad de Magallanes
Claudia Elizabeth Cornejo Morales, Universidad de O'Higgins
Claudio Fuentealba, Universidad Austral
Cristian Reyes, Universidad de Chile
Daniela Soto, Universidad de Santiago de Chile
Danilo Diaz-Levicoy, Universidad Católica del Maule
Diana Zakaryan, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Eder Ointo, Universidad del Desarrollo
Eugenio Chandia Muñoz, Universidad de Concepción
Horacio Solar Bezmalinovic, Pontificia Universidad Católica de Chile
Hugo Alvarado Martínez, Universidad Católica de la Santísima Concepción
Irma Pinto-Rojas, Universidad Católica del Norte
Isabel García Martínez, Universidad Católica del Norte
Jaime Huincahue, Universidad Católica del Maule
Jhonny Medina, Universidad Austral
Jorge Gaona, Universidad de Playa Ancha
Juan José Núñez Fernández, Universidad Arturo Prat
Juan Luis Piñeiro Garrido, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Leonora Díaz Moreno, Investigadora Independiente
Marcela Parraguez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Marcelo Casis Raposo, Universidad de Los Lagos
Marcos Barra, Universidad Alberto Hurtado
María D. Aravena Díaz, Universidad Católica del Maule
María José Seckel Santis, Universidad Católica de la Santísima Concepción
María Soledad Montoya-González, Universidad Alberto Hurtado
María Victoria Martínez, Universidad de O'Higgins
Miguel Díaz Flores, Universidad Alberto Hurtado
Miguel Friz, Universidad de Bío-Bío
Nielka Rojas, Universidad Católica del Norte
Noemí Pizarro, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Paola Donoso Riquelme, Universidad de Magallanes
Patricio Felmer, Universidad de Chile

Pedro Salcedo Lagos, Universidad de Concepción
Raimundo Olfos, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Roberto Vidal, Universidad Alberto Hurtado
Romina Menares, Universidad de Valparaíso
Rosa Myriam Montaño Espinoza, Universidad de Santiago de Chile
Soledad Estrella, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Sonia Salas, Universidad de Las Américas y Corporación municipal de Quilpué
Tamara Del Valle Contreras, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Tania Andrade Vega, Universidad Central
Teresita Méndez Olave, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Ximena Colipan, Universidad de Talca
Yocelyn Parra, Universidad San Sebastián

PRÓLOGO

La Universidad de Los Lagos, con el apoyo de la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM), fue la sede de las XXVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática (JNEM), las que se desarrollaron en modalidad online en un periodo de transición a la presencialidad después de dos años de clases virtuales debido a la pandemia por COVID-19. Las clases virtuales trajeron consigo desafíos para los profesores y los estudiantes, sin embargo, el regreso a la presencialidad nos conduce a nuevos desafíos que afrontar desde la Educación Matemática, los cuales se suman a las tendencias sociales que vive el país en materia de descentralización y migración, por ejemplo.

Estas actas son un registro de las XXVI JNEM, y evidencian cómo desde la investigación y la práctica de diversos actores involucrados en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en Chile, se pueden realizar propuestas serias y coherentes con los contextos y los momentos históricos para mejorar la calidad de la educación matemática de Chile. Así, las XXVI JNEM reunió a profesores de los diversos niveles educativos (parvularia, básica, media y universidad), estudiantes de pre y de postgrado e investigadores nacionales e internacionales, para reflexionar y discutir entorno a las problemáticas de la educación matemática del país.

Estas actas incluyen los resúmenes de nueve conferencias especiales y los extensos de treinta y ocho reportes de investigación, cuarenta y nueve comunicaciones breves y doce experiencias de aula. Estos trabajos de investigación y empíricos dan cuenta de las diversas perspectivas teóricas y metodológicas de Educación Matemática que se están utilizando por los diversos grupos de investigación, principalmente, en Chile.

Todos los trabajos que se encuentran en estas actas fueron revisados en un proceso doble ciego por investigadores de Educación Matemática de Chile y presentados en los distintos espacios de las XXVI JNEM.

Agradecemos a la SOCHIEM por confiar en el equipo de Educación Matemática del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos, a los invitados por sus conferencias plenarias: Miguel Friz (Universidad del Bío Bío), Marta Civil (Universidad de Arizona) y Vicenç Font (Universitat de Barcelona, España). Asimismo, agradecemos a los investigadores de las Universidades Socias de la SOCHIEM quienes realizaron las conferencias especiales, al comité científico, a los auspiciadores y a todos los profesores, estudiantes e investigadores que hicieron posible el éxito de este evento de Educación Matemática.

Jesús Guadalupe Lugo-Armenta
Presidente del Comité Científico
Luis R. Pino-Fan
Presidente del Comité Organizador

ÍNDICE

PRÓLOGO **6**

CONFERENCIAS ESPECIALES **13**

EL ROL DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA INVESTIGACIÓN INTERDISCIPLINAR 14
PROGRAMACIÓN EN PYTHON Y BLOQUES: FORMAS DIDÁCTICAS DE RESOLVER PROBLEMAS COTIDIANOS APLICANDO EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO 19
MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN MIXTOS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA: ¿QUÉ LOS HACE TAN APRECIADOS? 20
MATEMÁTICA Y EXCLUSIÓN EN EL CASO DE LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS INDÍGENA . 26
ESTUDIOS INTERDISCIPLINARIOS SOBRE BRECHAS Y ESTEREOTIPOS LIGADOS A GÉNERO Y NIVEL SOCIOECONÓMICO EN RELACIÓN CON LOS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES MATEMÁTICAS 33
MIRADA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA INCLUSIVA EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO 39
¿Y…DÓNDE ESTÁN LAS MATEMÁTICAS? EXPLORANDO LOS EFECTOS DE UNA UNIDAD STEM EN UN AULA MULTIGRADO 43
DETECCIÓN Y ATENCIÓN A ESTUDIANTES CON ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA, UN DESAFÍO PARA EL SISTEMA ESCOLAR CHILENO 48
OBJETOS MATEMÁTICOS INVOLUCRADOS EN LA PRÁCTICA DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA CUANDO UTILIZAN GEOMETRÍA DINÁMICA 50

REPORTES DE INVESTIGACIÓN **57**

ESTUDIO DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS PROPUESTO POR PROFESORES: EL CAMINO HACIA EL DESARROLLO DE PENSAMIENTO CRÍTICO 58
ARGUMENTOS DE FUTUROS PROFESORES AL COMPARAR CONJUNTOS DE DATOS EN HISTOGRAMAS 63
CONCEPTUALIZACIÓN DE LAS NOCIONES TRIGONOMÉTRICAS SEN(x) Y COS(x) EN DOCENTES DE MATEMÁTICA DE EDUCACIÓN MEDIA 69
LOS MODELOS TÁCITOS Y EL INFINITO MATEMÁTICO A TRAVÉS DE LA HISTORIA 75
INFLUENCIA DEL DOMINIO AFECTIVO EN EL APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES EN EL AULA DE MATEMÁTICA 80
LOS EFECTOS DE LA PRIORIZACIÓN CURRICULAR EN EL EJE DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD PRODUCTO DE LA PANDEMIA 85
FACTORES PARA LA CONTEXTUALIZACIÓN CURRICULAR DE LA HABILIDAD MATEMÁTICA DE ARGUMENTAR Y COMUNICAR EN EGB 90
USOS Y VALORACIÓN DE RECURSOS TIC: RESULTADOS DE UNA ENCUESTA REALIZADA A PROFESORES DE MATEMÁTICA 95
DOMINIO E IMPLEMENTACIÓN DE LOS SOFTWARES EDUCATIVOS 101
USOS DE LA DIFERENCIAL EN UNA LECCIÓN SOBRE EL CONCEPTO DE INTEGRAL 106
SUJETO CIUDADANO REPRESENTADO EN LAS PRÁCTICAS DISCURSIVAS DEL CURRÍCULO NACIONAL CHILENO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA 111
NIVELES DE JUSTIFICACIONES DE GENERALIZACIONES MATEMÁTICAS MANIFESTADOS POR ESTUDIANTES CHILENOS DE 9-10 AÑOS SEGÚN SU PENSAMIENTO ALGEBRAICO 114

CARTOMAGIA MATEMATICA COMO RECURSO DIDACTICO: SUS IMPLICANCIAS EN LA ACTITUD DE LOS ESTUDIANTES HACIA LA MATEMATICA. UNA EXPERIENCIA EN CUARTO MEDIO 119
ESTUDIO DE CLASES DE MODELACIÓN MATEMÁTICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA CON ESTUDIANTES DE SEGUNDO AÑO MEDIO SEGÚN EL MODELO DE BLOMHØJ Y HØJGAARD 123
PENSAMIENTO FUNCIONAL EN 1° DE PRIMARIA: ESTRUCTURAS UTILIZADAS EN LA FUNCIÓN $f(x) = 5x$ 129
UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA DESARROLLAR HABILIDADES MATEMÁTICAS MEDIANTE EL ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES DE LOS RADICALES 134
CARACTERIZAR EL KMT SOBRE PATRONES EN LAS PLANIFICACIONES DEL PROFESORADO 140
ASIGNATURA CRÍTICA, FACTOR DE RETENCIÓN Y TECNOLOGÍA EVALUATIVA: ENACTACIONES DE LA MATEMÁTICA EN LAS NIVELACIONES AL INICIO DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR CHILENA 145
DESARROLLO DE LA PRÁCTICA VARIACIONAL DE SERIACIÓN EN EL ESTUDIO DE LA VARIACIÓN CONSTANTE PARA UN GRUPO DIVERSO 151
APRENDER MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE TEMAS SOCIALES: LA EXPERIENCIA DE LA ENSEÑANZA DEL METRO CUADRADO EN CLASES VIRTUALES 157
LAS PRÁCTICAS DE REFERENCIA DE UN GRUPO DE DOCENTES DE EDUCACIÓN BÁSICA DE CHILE EN LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES: UN ESTUDIO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR DESDE LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA 162
FIGURACIONES QUE COMUNICAN ELEMENTOS PRECURSORES DE DIPOLOS MODELICOS ELECTRO/CORAZÓN 168
CONCEPCIONES SOBRE EVALUACIÓN DE LOS FORMADORES DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA 173
ATENCIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICA 178
ORQUESTACIÓN ARGUMENTATIVA DE LA MODELACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS 183
NIVELES DE LECTURA DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA 188
ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA DE LAS EDUCADORAS DE PÁRVULOS EN CHILE 193
UN MARCO PARA ESTUDIAR LA CAPACIDAD DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN PROFESORES DE PREESCOLAR 196
ANDAMIAJE EN LA ACCIÓN A EDUCADORAS: PENSAMIENTO MATEMÁTICO Y DESARROLLO PERSONAL SOCIAL DEL PÁRVULO 202
EVALUACIÓN NACIONAL DIAGNÓSTICA (END FID) SOBRE CONOCIMIENTOS DIDÁCTICOS DISCIPLINARES DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN CHILE 2017 A 2019 206
CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE DOS PROFESORES DE MATEMÁTICA DE ENSEÑANZA MEDIA SOBRE TÉCNICAS DE CONTEO 213
¿SABEN LOS PROFESORES DE MATEMÁTICA QUE LA ESTIMACIÓN DE LA CANTIDAD DE CONTAGIADOS POR COVID-19 SE REALIZA MEDIANTE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL? RESULTADOS DE UNA ENCUESTA 219
IMPACTO DE LA PANDEMIA EN LOS ESTUDIANTES DE LA CARRERA PEDAGOGÍA MEDIA MATEMÁTICA DE LA UC TEMUCO DE LAS COHORTES 2018-2019 224

COMUNIDADES DE PRÁCTICA AL DESARROLLO PROFESIONAL DE FORMADORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: FACILITADORES Y OBSTACULIZADORES 229
NIVELES DE RAZONAMIENTO DE FUTUROS PROFESORES ANTE EL CONCEPTO DE CONTINUIDAD 234
DESARROLLO DE LA AFECTIVIDAD Y DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN EDUCACIÓN PÁRVULARIA: EL CASO DE LA INGENIERÍA COOPERATIVA JUEGO DE LOS TESOROS 238
LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL EN FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA, DESDE EL CONTEO DE CASOS AL CÁLCULO DE PROBABILIDADES 243
FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES CON CURVAS EN COORDENADAS POLARES DESDE EL ANÁLISIS DIDÁCTICO 248

COMUNICACIONES BREVES 252

IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN EL ACOMPAÑAMIENTO ACADÉMICO DE PACE A ESTUDIANTES DE INGENIERÍA COMERCIAL 253
CONSTRUCCIONES MENTALES ASOCIADAS AL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES. UN ANALISIS DESDE LA TEORÍA APOE: EL CASO DE UN ESTUDIANTE CON TRASTORNO DE ASPECTRO AUTISTA 258
LA IMPORTANCIA DE LA REFLEXIÓN DEL PROFESOR SOBRE LAS NORMAS QUE REGULAN LA GESTIÓN DE SUS CLASES 263
PENSAMIENTO FUNCIONAL EN ESTUDIANTES COMO APROXIMACIÓN AL PENSAMIENTO ALGEBRAICO. UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES DE 5º BÁSICO CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES (NEE) 267
EVALUANDO EL USO DE REGISTROS EN VIDEO EN EVALUACIONES DE UN CURSO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA 272
PROPUESTA DE CRITERIOS PARA FAVORECER EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO DE 0 A 2 AÑOS 277
PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS DE RAZONAMIENTO EN UN LICEO TÉCNICO PROFESIONAL 281
GEOMETRÍA 3D. UN ESTUDIO DEL NIVEL DE HABILIDADES ESPACIALES Y PENSAMIENTO GEOMÉTRICO TRIDIMENSIONAL EN ESTUDIANTES DEL GRAN CONCEPCIÓN 286
NIVELES DE LECTURA DE GRÁFICOS EN INFANTIL: UNA ACTIVIDAD EXPLORATORIA 291
OBJETOS MATEMÁTICOS EN LAS TABLAS ESTADÍSTICAS: UN ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO CHILENOS DE EDUCACIÓN BÁSICA 296
COMPRENSIÓN DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO BÁSICO A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS 301
EL EXPERIMENTO DE LA CAJA NEGRA: UNA APP DIGITAL QUE APOYA EL RAZONAMIENTO INFERENCIAL DESDE KÍNDER 307
APROXIMACIONES INTUITIVAS A LA PROBABILIDAD SUBJETIVA. UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES DE 12-13 AÑOS DE UN SÉPTIMO BÁSICO 312
USO DE MODELOS EN EL AULA DE ESTADÍSTICA: VOCES DEL ESTUDIANTADO UNIVERSITARIO 319
CONFLICTOS SEMIÓTICOS EN PRÁCTICAS DE VALIDACIÓN EN ESCUELAS SECUNDARIAS DE ARGENTINA 324
ERRORES AL RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON INFINITAS SOLUCIONES 330
CREENCIAS Y MOTIVACIÓN DE LOS ESTUDIANTES: UN OBSTÁCULO EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS 335

FORMADORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICA: NIVELES DE INTEGRACIÓN DE TECNOLOGÍA Y CREENCIAS 341
ESTUDIO SOBRE LAS COMPETENCIAS DIGITALES DE DOCENTES EN MATEMÁTICA DE UNA UNIVERSIDAD PRIVADA DE SANTIAGO 347
PROPUESTA DE MODIFICACIÓN DE METODOLOGÍA DE ENSEÑANZA, EN RELACIÓN CON UTILIZACIÓN DE TIC PARA LA ENSEÑANZA DEL MA07 OA 09 (ECUACIONES E INECUACIONES) 352
CONOCIMIENTOS MOVILIZADOS POR FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA SOBRE HOMOTECIA MEDIANTE EL USO DE LAS TIC 357
PENSAMIENTO COMPUTACIONAL POR PARTE DE LOS EGRESADOS DE LA CARRERA DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICAS E INFORMÁTICA EDUCATIVA 362
RECURSOS EDUCATIVOS DIGITALES EN LIBROS DE TEXTO DEL ÁREA DE MATEMÁTICA DE PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN BÁSICA 366
ESTUDIO DEL EJE DE PATRONES Y ÁLGEBRA EN LOS LIBROS DE TEXTOS ESCOLARES CHILENOS DE 4º A 6º BÁSICO 370
PERFILES DE ACTIVIDADES MATEMÁTICAS DE UN TEXTO ESCOLAR PARA FOMENTAR LA ARGUMENTACIÓN ESTADÍSTICA 375
CARACTERIZACIÓN DE TAREAS MATEMÁTICAS PROPUESTAS EN UN TEXTO ESCOLAR, RESPECTO AL CONOCIMIENTO DEL TEOREMA DE THALES: UNA VISIÓN DESDE DISTINTOS REFERENTES 381
LA IMPORTANCIA DE LAS GUÍAS DIDÁCTICAS PARA EL PROFESORADO EN ENSEÑANZA BÁSICA: EL CASO DE LAS FRACCIONES 386
ANÁLISIS DEL CURRÍCULO CHILENO EN EDUCACIÓN BÁSICA EN TORNO A LA DIVISIÓN COMO ISOMORFISMO DE MEDIDA: EL CASO DE 3° BÁSICO 397
CUENTOS PARA EL DESARROLLO DE HABILIDADES MATEMÁTICAS Y DE LENGUAJE EN PRIMER AÑO BÁSICO 403
UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN DE NÚMERO MIXTO Y FRACCIÓN IMPROPIA A TRAVÉS DE REGULARIDADES 408
COMPRENSIÓN DE LA SUMA DE NÚMEROS RACIONALES EN QUINTO GRADO DE PRIMARIA. UNA PROPUESTA MEDIANTE UNA SECUENCIA LIGADA A LAS DIFICULTADES ASOCIADAS 413
UNA PROPUESTA DE TAREAS DE APRENDIZAJE PARA APOYAR LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE SUBESPACIO VECTORIAL 418
ESTUDIO DE CONFIGURACIONES COGNITIVAS DE ESTUDIANTES RESPECTO A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ POSTPANDEMIA 423
PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA EL NÚCLEO E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL MEDIADA POR LA MODELACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA 428
REFINAMIENTO ANALÍTICO SOBRE UNA TAREA DE SUCESIONES OBSERVADO DESDE LA COMPLEMENTARIEDAD DE TEORÍAS 433
PRAXEOLOGÍAS PROPUESTAS PARA INTRODUCIR LA INTEGRAL DEFINIDA Y ESTUDIO DE LAS TÉCNICAS UTILIZADAS POR ESTUDIANTES DE INGENIERÍA CIVIL 439
ATENCIÓN SELECTIVA: ¿QUÉ OBSERVAN PROFESORES CON EXPERIENCIA EN UN VIDEO SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA RAÍZ ENÉSIMA? 445
¿QUÉ TIPOS DE TAREAS PROPONEN LOS FUTUROS PROFESORES PARA TRABAJAR LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA? 451

ESTUDIO DE LA RELACIÓN ENTRE CREENCIAS Y PRÁCTICAS DE PROFESORES: LA MANIFESTACIÓN DE LA CREENCIA 457
INNOVACIÓN CURRICULAR Y REFLEXIONES DIDÁCTICO DISCIPLINARES EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS 462
APROXIMACIÓN AL CONTENIDO DE LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE PRIMARIA QUE ENSEÑARÁN MATEMÁTICA 468
CREENCIAS EPISTEMOLÓGICAS DE LOS FORMADORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICA. ALCANCES PARA LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE 473
DISEÑO DE UN INSTRUMENTO DE OBSERVACIÓN PARA CARACTERIZAR EL DESARROLLO DEL NOTICING DE DOCENTES DE MATEMÁTICA SOBRE LA GESTIÓN COMUNICATIVA DE LA INTERACCIÓN 478
ESTUDIO DE LAS PRÁCTICAS DOCENTES EN LA ENSEÑANZA DE LÍMITES DE FUNCIONES EN UNA VARIABLE 484
ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE BIOLOGÍA: DISEÑO DE UN MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERENCIA 489
LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA DE LOS FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS AL USAR UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE 494
NOCIÓN DE REALIDAD Y MODELACIÓN EN FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA 499
FORMACIÓN CONTINUA DE PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA EN PROBABILIDAD 505
ESTUDIO BIBLIOMÉTRICO DE LA PRODUCCIÓN CIENTÍFICA REALIZADA POR LOS ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, DE LA UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO, EN SUS ACTIVIDADES DE TITULACIÓN ENTRE 2017 Y 2021 511

EXPERIENCIAS DE AULA 517

ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN CONTEXTOS REALES: TABLAS DE FRECUENCIAS Y GRÁFICOS DESDE LA EXPERIENCIA EN EL OBSERVATORIO VULCANOLÓGICO DE LOS ANDES DEL SUR DE NIÑOS Y NIÑAS DE TERCER AÑO DE PRIMARIA 518
ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD CON FOCO EN SOSTENIBILIDAD: ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA EN EL AULA DE EDUCACIÓN BÁSICA 523
TANGRAM: UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA ESTUDIANTES CON TDA/H EN EL ÁREA DE GEOMETRÍA 529
EJERCITACIÓN CON SENTIDO EN ENSEÑANZA BÁSICA: UNA EXPERIENCIA DE AULA EMPLEANDO LA CONSTANTE DE KAPREKAR 534
GENERALIZACIÓN DE PATRONES NUMÉRICOS FIGURALES MEDIANTE DIFERENTES DESCOMPOSICIONES DE LAS FIGURAS DE UNA SUCESIÓN. UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA ESTUDIANTES DE SECUNDARIA 540
PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE INECUACIONES POR MEDIO DE LA DESIGUALDAD TRIANGULAR 546
PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA EL ABORDAJE INICIAL DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA 551
MODELAMIENTO DE ECUACIONES LINEALES A TRAVÉS DE UNA BALANZA ONLINE 557
EL ESTUDIO DE LA FUNCIÓN LINEAL EN AMBIENTE DE INTERACCIÓN CON ESTUDIANTES DE ENSEÑANZA BÁSICA 561
SÉ CÓMO SE HACE, PERO NO POR QUÉ. LAS DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS PROPORCIONES 567
SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON BASE EN LO COTIDIANO 571

MODELAMIENTO DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA A TRAVÉS DE LA EXPERIMENTACIÓN 574

Conferencias Especiales

EL ROL DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA INVESTIGACIÓN INTERDISCIPLINAR

Fernando Córdova-Lepe

fcordovalepe@gmail.com

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Universidad Católica del Maule

Una participación destacada de la matemática en los equipos de investigación interdisciplinar en general se relaciona con el trabajo de construcción, análisis e interpretación de modelos matemáticos. La presentación explora los alcances óntico-epistémicos del par referente-referencia del rol metodológico de la matemática para generación de conocimientos teóricos no matemáticos, en particular respecto a su vinculación con los objetos, las preguntas e hipótesis de investigación; lo anterior, a través de una discusión conceptual basada en la experiencia y opinión del autor.

Modelo matemático, Método, Epistemología, Hipótesis.

INTRODUCCIÓN

El saber generado por una investigación interdisciplinar que integre modeladores no es un conocimiento en sus capas más exteriores calificable de puramente matemático, al situarlo en una balanza fáctico-formal, su objetivo inclina hacia el platillo disciplinar que pondera el realismo. Además, las disciplinas no matemáticas, aparte de lo que podamos decir de la semántica, cuentan a favor con la pragmática, pues tienen ventaja comunicacional al momento de difundir los avances en el fenómeno bajo estudio; éstas registran en un lenguaje comparativamente más directo y, por ende, de alcance mayor. Una afirmación que se induce a partir de observar la presencia de las matemáticas en las tareas de investigación es que su rol en la interacción con otras ciencias es de orden metodológico. En este sentido, se abren paso una serie de inquietudes respecto a la diferenciación de los elementos propios de la matemática de orden ontológico, epistemológico y de valor, que dan cuenta del ser y su potencial, en comparación con lo que son las formas y métodos de validación tradicionales de las ciencias naturales o empíricas con las que debe interactuar. El configurar un panorama y nivel de pronunciamiento-respuesta sobre estas inquietudes, es un mínimo exigible a un modelador matemático (Córdova-Lepe, 2022), es lo que en esta presentación pasamos a discutir sin afán resolutorio.

Un investigador en matemáticas en su accionar, tiene la esperanza implícita, o presunción necesaria, de un mundo objetivo cuando combina con sentido estratégico secuencias de reglas de deducción específicas (pre establecidas y conocidas) ante un desafío de la especialidad, que como juegos hiperregulados e inocuos, se le presentan al interior de su misma cofradía. Sin embargo, cuando la propuesta interrogante-problema no es propiamente matemática, sino que ésta proviene de la realidad mediada por una disciplina de orden fáctico, para el matemático establecer su juego acostumbrado pasa a tener una complejidad mayor, pues deja de ser único, totalizador y seguro, y más aún, varias aristas pueden mostrar incómodos ribetes de subjetividad, a veces, paralizantes. A la presentación de la situación problema en el lenguaje y con usos de conceptos y constructos de una ciencia de contexto ad hoc a la realidad bajo observación, debe ocurrir una adaptación, un acomodo, un reordenamiento de perspectivas que llegue a definir y consensuar el plano de la comunicación del equipo, el rol epistemológico reservado a la matemática y, en correspondencia, el sentido del aporte a la verdad

nueva. Estos son elementos dentro de las cosas que definen un a priori, que de quedar bien o mal instalados, pueden llegar a determinar el éxito o fracaso del equipo de investigación interdisciplinar.

Notemos que en contraste al espacio de trabajo racional idealizado, determinante y convencional con que cuenta un hacedor de pruebas lógico-matemáticas a través de intrincadas y laboriosas construcciones, el modelador recibe y reacciona ante un fenómeno problema de la realidad natural o social, a través de procesos de abstracción, análisis e interpretación. En que la puesta en símbolos matemáticos de significados y su transducción semántica son actos inseparables de lo ya conocido de estas realidades y de las preguntas intencionadas (lo que se pretende conocer) por parte del sujeto investigador, sea individual o colectivo. Un modelo, como posibilidad de objeto matemático, llevará siempre la marca de la percepción histórica y el deseo común decantado de las conciencias concurrentes en el grupo de investigación sobre el trozo de realidad bajo la lupa. El camino del modelador útil parecería ser el de explorar la intersubjetividad en cuanto a su labor científica, pues está en valor quien enfatiza que la cognición compartida y el consenso son esenciales en la formación de nuestras ideas y relaciones. En esta presentación nos limitamos a explorar el trabajo interdisciplinar en el contexto de la investigación científica como un acto dialógico, que parte por el reconocimiento de la percepción y las formas de las otredades disciplinares en cuánto a la naturaleza de los modos de situar los objetos de investigación y los métodos de elaboración de certezas involucrados.

DIFERENCIACIÓN ONTOLÓGICA

Cuando un sujeto percibe y da forma a un pedazo o trama de la experiencia, sea está sensible o psíquica, le ocurre que ante el emerger de un primer bosquejo (líneas de borde) tiende a efectuar, y tiene la facultad biológica para ello, un recorte más estable mediante sus tijeras mentales. Logrando fijar y penetrar en lo que parecía efímero e inexpugnable, capturando cierta unidad identificable. Así, el sujeto ha dado forma reconocible a lo que denominaremos objeto-percibido; un recorte que por lo general es plástico y dinámico. Este objeto-percibido tiene un conjunto de posibilidades de realización, o estados, en conexión con otros objetos y el mismo sujeto, y se presenta siendo parte de sistemas de objetos, una suerte de fotografías factibles. Los estados son en general inestables, proclives a cambios naturales o por intervención. Unos estados, los causales, llevan necesariamente o hacen pasar al objeto a un segundo estado, el estado efecto, y no así a otros que son independientes. En este sentido, si un estado es una fotografía, los estados derivados en orden temporal conforman un proceso, es decir, definen una trayectoria. Viene bien visualizar la historia de vida del objeto como la de un film cinematográfico factible, lo que en sistemas dinámicos llamamos órbita. Los determinantes de la trayectoria de un objeto-percibido, los desarrolladores de su guion específico están dados por la acción conjunta de conexiones subyacentes a la estructura de la realidad-experiencia, una arquitectura de relaciones (leyes) que, para no caer en rigideces deterministas, podemos admitir como vibrante.

En este sentido, ante los objetos percibidos se asoma la necesidad de distinguir entre el plano de la existencia de éstos y de los que son sus representaciones. Separar entre el mundo de los hechos, lugar de interacción y transformación de los objetos en sí, y lo que son los espacios para referenciarlos y pensarlos, sea como objeto del lenguaje común, v.g., a un equipo de investigación interdisciplinar y el plano simbólico propiamente ideal de la matemática. Consideramos adecuado acudir al principio de identidad concreta, para situar las trayectorias en que la unidad objeto-percibido se diferencia y desdobla (ontología dialéctica) para los hechos u objetos de la realidad y reservar el principio de identidad abstracta (lógico-matemática) para los objetos y sistemas referenciales ideales. Un objeto-percibido es unidad en cuanto a lo que se observa son características más generales y se diferencia o

desdobla por aquellas más particulares, separación mutuamente dependiente, que un objeto matemático afortunadamente no presenta. Notemos que en el proceso de la cognición idealizar y simplificar la realidad, en ciertas condiciones, no sólo resulta posible, sino incluso necesario. Quien modela debe estar consciente que la dualidad abstracto-concreto es una llave permanente para entender y desarrollar los actos tendientes a generar conocimiento de los objetos en algún aspecto específico deseado, en que la vía de lo abstracto, qué se abstrae y qué no del objeto-percibido, es el camino para llegar a alcanzar saberes respecto a lo concreto.

¿Desde qué base partimos para sostener la esperanza de conocer, de alcanzar conocimiento a través de un proceso de modelización? ¿Dónde radica nuestra confianza? Observemos que para Wittgenstein el lenguaje es un modelo del mundo. Nos dice que las cosas del lenguaje son las proposiciones, que las del mundo son los hechos (configuraciones de estados de sistemas de objetos percibidos) y se conectan a través de una correspondencia entre hechos y proposiciones, a modo de sus imágenes. Sin embargo, para él esta no sería una identificación libre, sino una que permite reflejar en la estructura del lenguaje la arquitectura del mundo. La matemática, en cuanto lenguaje formal, que permite la argumentación para la derivación, es un camino viable, tiene buenas posibilidades para revelar tal estructura del mundo, tal íntima arquitectura. Así, frente a la primera pregunta de toda teoría del conocimiento: ¿Es posible conocer? La respuesta, confiando en el autor del "Tratado lógico-filosófico" es afirmativa.

DIFERENCIACIÓN EPISTEMOLÓGICA

Disputa antigua es la que origina la pregunta: ¿Es la razón o la experiencia la génesis de nuestros saberes respecto al mundo? Al respecto, un modelador en contextos de investigación interdisciplinar alguna claridad ha de haber construido, digamos para efectos de la convivencia que ha de sostener entre los métodos de su disciplina y los clásicos de las ciencias fácticas. Por ejemplo, en el método hipotético deductivo, MHD, que a grandes bloques asume el flujo: observación, hipótesis y consecuencias contrastables, ¿dónde se ubica el aporte de una modelización matemática? Tener alguna claridad es una necesidad que surgirá en la interacción interdisciplinar, pues probablemente se presentará como un problema de roles o de evaluar, para comunicar, el alcance del aporte formalista.

En las ciencias fácticas o naturales el investigador está interesado en avanzar en responder alguna pregunta de investigación y, desde lo conocido y lo que son observaciones previas, levanta una hipótesis, en otras palabras, una conjetura contexto-causa-efecto respecto al fenómeno de interés. Las hipótesis normalmente se prueban a través de la implementación de diseños experimentales específicos. ¿Qué hace un modelo ante una hipótesis? ¿Un modelo matemático puede llegar a rechazar o aceptar una hipótesis? ¿Lo que denominamos verdades matemáticas tienen con claridad, por interpretación, un relato de verdad en la realidad?

Al respecto, sobre las contrastaciones leemos:

> "En este Método (se refiere al MHD) las contrastaciones deben ser experimentales. Y deben ser contundentes, en el sentido de que deben decirnos claramente si las consecuencias deducidas de la hipótesis se dan en la realidad o no" (Pérez, 2008).

Notemos que en el trabajo en equipos interdisciplinares concurren al menos tres planos de acción, la realidad (mundo de los hechos), el teórico propio al área disciplinar de contexto y el matemático.

Notemos que una hipótesis es un enunciado del plano de contexto, por lo que no es un hecho y, en principio, tampoco una proposición matemática, y solo se vincula con los hechos por referencia. De modo que, entrando a lo que se entiende por verdad, es necesario observar que es en este plano disciplinar en el que los enunciados pueden llegar a ser verdaderos o falsos, ya que en el de la realidad, no hacen sentido esos calificativos, pues los hechos ocurren o no ("se dan" o "no se dan"). Ahora, respecto al plano de la matemática, es mejor reservarnos otros términos, pues para la comunicación de grupo es prudente referirnos a proposiciones, destacando las que tienen una demostración, a distinguir entre el pensamiento deductivo correcto o incorrecto. Así lo deseado son alcanzar enunciados hipotéticos que tienen un correlato matemático como proposición correcta en el paso del antecedente al consecuente y, que además sean verdaderas. Aunque esto último, es con base a resistir un testeo permanente de no falsedad en el campo experimental.

Notemos que, una hipótesis es una apuesta de realidad, es aquel enunciado con algún grado de fundamento y contrastable que, presuponiendo ciertos hechos afirma que necesariamente se deriva otro hecho, generalmente relacionado a la especificación para un objeto-percibido de un estado o un tipo de estado dentro de los factibles. Entonces, si bien el MHD nos habla del contraste empírico a través de la experimentación, también existe el contraste de racionalidad y por ahí surge una primera oportunidad de la modelización matemática, testeando si la hipótesis es lógicamente consistente. Otra posibilidad es modelando diseños de contracciones empíricas (v.g., no factibles de implementar), mediante posibles representaciones matemáticas, como experimentos mentales, chequeando que sus conclusiones analíticas van (admiten la interpretación semántica) en la dirección de lo que afirma la hipótesis. Sin embargo, un enunciado como la hipótesis, con su generalidad, aun siendo lógicamente consistente, puede llegar a ser un enunciado menos verosímil, nunca se está seguro de que aparezca un experimento que le contradiga. Así, ya que la verdad de una hipótesis consistente se juega su verosimilitud en el control empírico, bajando las expectativas los modelos solo suman o restan argumentos o soporte para su formulación.

Los equipos científicos mono-disciplinares suelen estructurar o guiar su plan de trabajo a través de una pregunta de investigación, lo mismo ocurre en los interdisciplinares. ¿Qué tipo de modelo es el adecuado para esta pregunta? ¿Cuáles son las transferencias legítimas desde lo representado hacia el modelo representante (abstracción), e inversamente (interpretación)? ¿Cuáles son los elementos mínimos, primeros y necesarios a considerar, para llegar a construir un modelo con algunas pretensiones analógicas respecto a fenómenos de la realidad con posibilidades de aportar a una respuesta de la pregunta de investigación? Vale tener claridad respecto a la distinción ontológica entre objetos y hechos de la realidad, el lenguaje como articulador de conceptos a través de las proposiciones y el conjunto de objetos ideales y relaciones formales, lo matemático, que aspiran a convertirse en modelo.

DE LA VALORACIÓN DE UN MODELO

El valor de uso (también puede ser estético u otro) de un modelo no se relaciona con su complejidad matemática estructural o de análisis, sino principalmente con el cumplimiento de los propósitos para los cuales fue construido en el contexto de la investigación. Así también, con los recursos del proyecto investigativo asociado, sean relacionados con el tiempo reservado al trabajo, materiales o intelectuales; en este sentido puede ser más o menos eficiente o eficaz. Respecto al alcance, a la variedad de fenómenos comprometidos a investigar y al nivel de profundización de la tarea, entre otros aspectos definidos por el equipo interdisciplinar, la representación puede ser más general o

específica, conviene distinguir si se está en una situación de tener que construir un modelo estratégico, táctico u operativo (Jiliberto, 2022). Frente a modelos equivalentes en su eficacia descriptiva, de entendimiento y predicción de escenarios (si es el caso), como así también en lo económico, criterios de selección es optar por el más comunicable, lo que suele estar asociado a su simplicidad, es decir, como siempre apelando al principio de parsimonia.

REFERENCIAS

Córdova-Lepe, F. D. (2022). *Sobre modelos, un modelo* [Conference session]. Seminario Didáctica de la Matemática, DDM-PUCV.

Pérez, C. (2008). *Sobre un concepto histórico de ciencia (2a. Edición)*. LOM Ediciones.

Jiliberto, R. R. (2020). *Deja a la estructura hablar: Modelización y análisis de sistemas naturales, sociales y socioecológicos*. Ediciones UM.

PROGRAMACIÓN EN PYTHON Y BLOQUES: FORMAS DIDÁCTICAS DE RESOLVER PROBLEMAS COTIDIANOS APLICANDO EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Felipe Eugenio Retamal Acevedo

Universidad Adventista de Chile

feliperetamal@unach.cl

El presente trabajo busca el fortalecimiento de las habilidades matemáticas y computacionales, en esta propuesta es el uso de herramientas tecnológicas e informáticas para buscar variadas alternativas en el adecuamiento de situaciones cotidianas de los educandos. En los estudiantes se espera impulsar las habilidades de representación, resolución de problemas, comunicación, mediante la reflexión, el análisis, diseño y la implementación de software. En la búsqueda del aprendizaje significativo utilizaremos un lenguaje de programación en Python y por bloques, adaptándolas a la realidad del estudiante. Necesitaremos softwares que permitan satisfacer las necesidades, las expectativas y las construcciones de soluciones a las problemáticas planteadas en virtud de la realidad del estudiante.

La propuesta didáctica va en desmedro de fomentar el trabajo colaborativo, la participación, mejorar el interés por la asignatura de matemáticas, el cometido de los estudiantes. A su vez, ayuda al docente a realizar evaluación auténtica y aporta en su valoración por TIC, integrándolas en su labor para suministrar su intervención en el aula. En concordancia con (Grajales y Osorno, 2019) el cambio de mentalidad que deben tener los actores activos del proceso educativo (docente-estudiante), que les permita tener una apertura a navegar y descubrir las nuevas competencias digitales, en torno a la transformación de la educación tradicional, a una educación digital.

Se trabajará con base en la secuencia didáctica propuesta por (Castro, 2022), agregando programaciones realizadas en Python.

La secuencia didáctica está compuesta por las siguientes sesiones:

1. Uso de programación por bloques.
2. Ficha Técnica algorítmica por bloques
3. Iconografía en Micro: bit Por bloques
4. Uso de programación por Python.
5. Iconografía en Micro: bit por Python.
6. Identificación de problemáticas en nuestra comunidad.
7. Propuesta de prototipos.
8. Construcción de los prototipos.

El trabajo será aplicado en dos establecimientos educaciones en enseñanza media de la Provincia de Diguillín, Región de Ñuble, durante el segundo semestre del 2022.

REFERENCIAS

Castro-Muñoz, L. (2022). *Microbit+ Anylogic: Para un desarrollo de habilidades en el razonamiento matemático computacional.* [Tesis de Maestría no publicada, Universidad de Cundinamarca].

Grajales, J. F., y Osorno, Y. M. (2019). La globalización y la importancia de las TIC en el desarrollo social. *Revista Reflexiones y Saberes,* (11), 2-9.

MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN MIXTOS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA: ¿QUÉ LOS HACE TAN APRECIADOS?

Andrea Vergara Gómez

Universidad Católica del Maule

avergarag@ucm.cl

La investigación en Didáctica de la Matemática o Educación Matemática se ha desarrollado incorporando metodologías de la tradición en ciencias sociales, como también elaborando sus propios métodos, en estrecha relación con los enfoques teóricos de la disciplina. Explicitar los diseños metodológicos contribuye a sustentar el carácter científico de la investigación, frente a la pluralidad de perspectivas teóricas que existen en la disciplina. La literatura reporta una predominancia de enfoques cualitativos en Educación Matemática, que refieren a procesos de validación interna y procedimientos de análisis difíciles de transferir. En esta comunicación, a partir de dos ejemplos, se analizan algunas de las ventajas de los enfoques mixtos para conjugar hallazgos tanto cualitativos como cuantitativos en estudios empíricos. Tales ventajas dicen relación con la variedad de posibilidades para complementar, confrontar o hacer converger resultados y fortalecer los mecanismos de validación y transferencia.

Métodos Mixtos, Diseño Secuencial, Educación Matemática, Diseño Concurrente.

TRADICIÓN DE LOS ENFOQUES CUALITATIVOS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

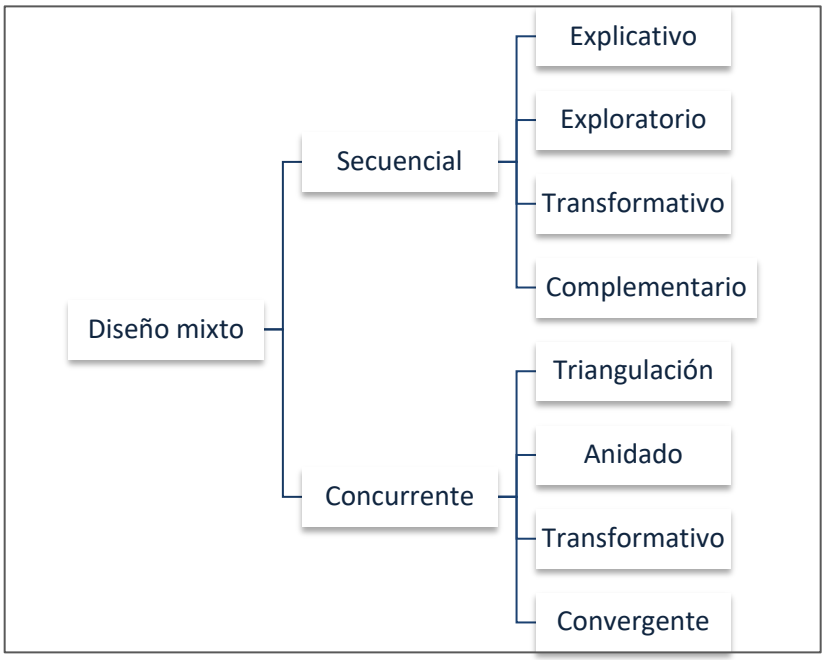
En la década de los 90 se propusieron métodos y estrategias para la acción investigativa específica de la Didáctica de la Matemática, criticando la suficiencia de los métodos externos a la disciplina (Artigue, 1995). Estos métodos resaltaban la necesidad de contar con procesos experimentales, que permitieran llevar a cabo "realizaciones didácticas" en el aula y que garantizaran la toma de datos de manera sistemática. Tal es el caso de la Ingeniería Didáctica, que se enmarca en la tradición cualitativa y, específicamente, en el registro de los estudios de caso, cuya validación es esencialmente interna; basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue, 1995). Así, entre el año 1995 y el año 2005 se evidenció una clara prominencia del enfoque cualitativo en revistas destacadas y especializadas en Educación Matemática (Hart et al., 2009). Con el paso de los años y el crecimiento de la disciplina, el enfoque cualitativo se consolidó, incorporando diversas estrategias para la toma de datos y la interpretación. Algunos de estos métodos incluían la Teoría Fundamentada, la Investigación Semiótica, el Análisis Multinivel y la Reconstrucción de la Argumentación, entre otros (Bikner-Ahsbahs et al., 2015). Los métodos cualitativos permiten comprender en profundidad un fenómeno, considerando aspectos contextuales y naturalistas, también brindan posibilidades más flexibles para la toma de decisiones. A pesar de las fortalezas de este enfoque, en Educación Matemática su uso ha sido criticado por falta de fiabilidad, validez y transparencia o exceso de intersubjetividad y sesgos, lo que abre el debate respecto de cómo las metodologías pueden contribuir a una mejor comprensión sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Sharma, 2013). Un número creciente de investigaciones en Didáctica de la Matemática ha logrado complementar las virtudes de los enfoques cualitativos con las garantías de los enfoques cuantitativos, a través de enfoques mixtos, opción cada vez más apreciada por las revistas especializadas.

Enfoques mixtos

La investigación de métodos mixtos es un enfoque en el que el investigador recopila y analiza datos, conectando estrategias cuantitativas con estrategias cualitativas en un solo estudio, considerando varias fases (Cresswell y Clark, 2011). Cada fase se integra para cumplir uno o más objetivos específicos, de acuerdo con las características de la problemática y los lineamientos del marco conceptual. Johnson et al. (2007) y Bergman (2008) sugieren seis tipos de diseños mixtos, según la forma y el orden en la que se integran los enfoques cualitativo y cuantitativo:

Figura 1.

Tipos de diseños mixtos.



El enfoque mixto de tipo secuencial organiza el proceso en dos etapas consecutivas: en una etapa inicial, se recopilan datos considerando uno de los dos enfoques, ya sea el cualitativo o el cuantitativo, para luego, en una segunda etapa, recolectar datos bajo el otro enfoque (Creswell et al., 2003). En el enfoque concurrente, por el contrario, se define un proceso de recolección simultánea de datos desde el enfoque cualitativo y cuantitativo. Almeida (2018) también reconoce otros dos grandes grupos emergentes de metodologías mixtas, además de la secuencial y la concurrente: diseño multifásico; y diseño multinivel, que se usan en estudios con mayor grado de complejidad, en los que se hace necesario considerar varias dimensiones de análisis.

Enfoques mixtos de tipo secuencial

Los métodos mixtos de tipo secuencial favorecen la organización de la implementación de los métodos cualitativo y cuantitativo, en función de la naturaleza de los objetivos específicos. Y se dividen en cuatro tipos principales, según cómo se organicen los métodos (Almeida, 2018):

Tabla 1.

Subtipos de Método Mixto Secuencial, adaptado de Almeida (2018).

Subtipo	Orden de aplicación	Características
Explicativo	Cuantitativo – Cualitativo.	Los resultados de la fase cuantitativa informan la toma de decisiones para la fase cualitativa.
Exploratorio	Cualitativo – Cuantitativo.	Los resultados de la fase cualitativa informan la toma de decisiones para la fase cuantitativa.
Transformativo	El orden se determina de acuerdo con la perspectiva teórica.	Ambos métodos se integran durante la fase de interpretación y análisis.
Complementario	No se prescribe un orden específico.	A partir de los resultados de fase primaria, se identifican limitaciones y se aplica la siguiente fase para contrarrestar las limitaciones de la primera.

INVESTIGACIÓN MIXTA SECUENCIAL EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: UN PAR DE EJEMPLOS

El propósito de esta sección es compartir dos experiencias recientes de investigación en Educación Matemática que utilizan enfoques mixtos mediante un diseño del tipo secuencial.

Aproximación mixta a través de estadística implicativa y estudio de casos

En Rodríguez et al. (2021) se estudia un modelo cognitivo para la reconstrucción del concepto función exponencial en estudiantes de profesorado y maestría, considerando la perspectiva teórica APOE. En este estudio se utilizó de manera implícita un enfoque mixto secuencial explicativo, en el que los resultados de un análisis estadístico implicativo se usan para orientar de manera más objetiva los énfasis que requiere la interpretación cualitativa de los datos, la que se realiza mediante un estudio de caso instrumental. La investigación desarrolla y valida un cuestionario con base en una descomposición genética (DG). El cuestionario es abierto, y para la categorización de las respuestas se utiliza un análisis a priori con indicadores específicos y neutros (no definidos desde la teoría), que permiten identificar estrategias, procedimientos y argumentos en las resoluciones de cada uno de los sujetos participantes. Estos indicadores observables se transforman en variables que alimentan una matriz con 0s y 1s, donde 0 indica ausencia del indicador en el desempeño y 1 indica presencia. Esta matriz facilita el ingreso de los datos en el software CHIC versión 6.0 para llevar a cabo el análisis mediante la estadística implicativa ASI [Analyse Statistique Implicative].

La técnica ASI genera un árbol de similaridad y un gráfico implicativo. El árbol jerárquico de similaridad destacó 6 clases significativas (grupos de variables) e identificó los informantes claves en cada clase; el grafo implicativo evidenció gráficamente 3 cadenas de asociación significativas entre parejas de variables, con un 95% de confianza (Rodríguez et al., 2021). Las clases significativas, que resultan del análisis cuantitativo, orientan un foco para el análisis cualitativo, es decir, permiten al investigador decidir qué casos analizar en profundidad y así ahondar en la descripción de cada clase significativa. Asimismo, las asociaciones implicativas brindan al investigador insumos para volver sobre el marco teórico y distinguir cómo las presencias de rasgos causales entre las variables pueden justificarse a través del modelo hipotético de la DG. En la fase cualitativa, se seleccionan los casos y se interpretan los desempeños de los informantes según las categorías teóricas.

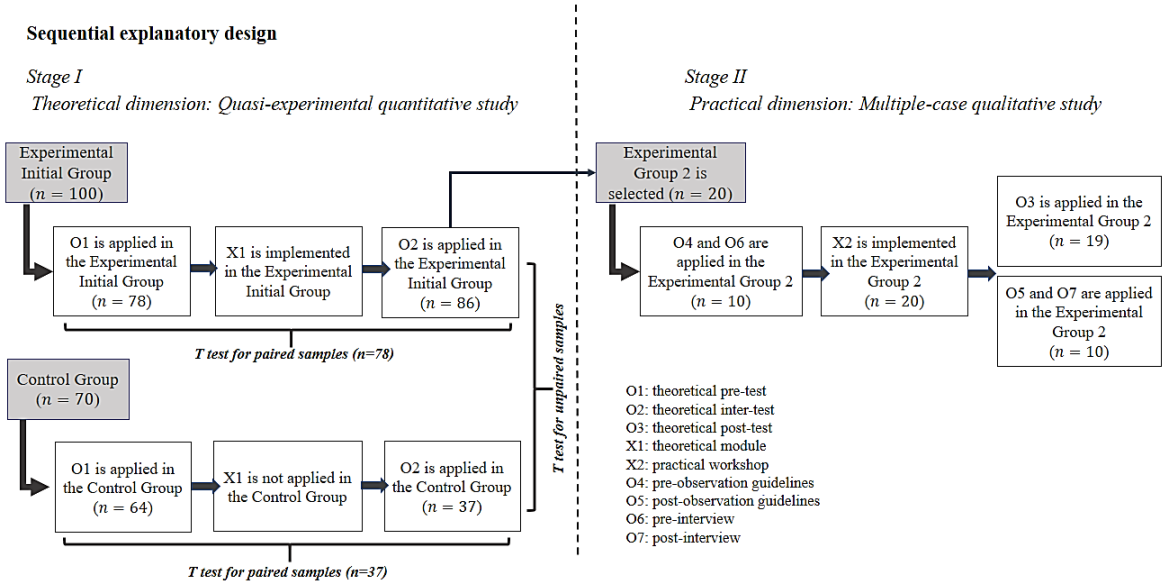
El enfoque mixto en esta investigación contribuyó, por una parte, a reconocer asociaciones estadísticamente significativas entre variables, vinculando estas asociaciones con los constructos teóricos sustentados en la DG y, por otra parte, a validar el camino cognitivo propuesto por la DG.

Aproximación mixta a través de estadística paramétrica y estudio de casos

En Olfos et al. (2022) se investigó el impacto de un sistema de andamiaje que conecta teoría y práctica para promover el desarrollo de la habilidad para enseñar matemáticas de educadoras de párvulos en proceso de formación, con base en la caracterización teórica Conocimiento Matemático del Contenido (MCK) y Conocimiento Pedagógico del Contenido Matemático (MPCK). En este estudio se utilizó de manera explícita un enfoque mixto secuencial explicativo, organizado en dos etapas. En la primera etapa, desde un enfoque cuantitativo, se implementa un estudio cuasi-experimental para evaluar la efectividad de la dimensión teórica del sistema de andamiaje, mediante la aplicación de un pre y pos-test en un grupo experimental de 100 estudiantes y un grupo control de 70 estudiantes. En la segunda etapa, bajo en enfoque cualitativo, se implementa un estudio de caso múltiple para analizar en profundidad los alcances de la dimensión práctica del sistema de andamiaje. El diagrama de la Figura 2 resume el diseño metodológico utilizado en el estudio.

Figura 2.

Diseño explicativo secuencial propuesto en Olfos et al. (2022).



Fuente: Elaboración propia

Los datos fueron analizados a través del software R, mediante el uso de dos pruebas T de Student para muestras pareadas que permiten comparar el pre y el pos-test tanto en el grupo experimental como en el grupo control, y una prueba T de Student para muestras no pareadas que permite comparar el pos-test del grupo experimental con el pos-test del grupo control. Respecto de las pruebas para muestras pareadas, los resultados estadísticos permitieron rechazar la hipótesis nula en favor de la hipótesis alternativa en el grupo experimental (t = 4.50, valor p = 1,17e-05), pero no en el grupo control (t = 0,99, valor p = 0,16)., lo que confirmó que el módulo teórico del sistema de andamiaje tuvo un impacto significativamente positivo en el progreso de MCK y MPCK en las educadoras en

formación; respecto de la prueba para muestras no pareadas, los resultaron evidenciaron que el nivel de conocimiento mostrado por el grupo experimental en el pos test fue significativamente mayor que el mostrado por el grupo control (t = 3.72, valor p = 1.71e-04) (Olfos et al., 2022). Los resultados de la primera etapa definieron criterios para seleccionar un subgrupo de 20 estudiantes del grupo experimental, quienes participaron de un taller práctico, que incluía trabajo en aulas reales de preescolar. Así, en la segunda etapa, se implementa un estudio de caso múltiple, cuya toma de datos se lleva a cabo mediante el uso de pautas de observación y entrevistas reflexivas. Los resultados cualitativos evidenciaron más dificultades para el logro estable de habilidades MCK y MPCK, asociadas a planificar e implementar una experiencia de aprendizaje, existiendo casos de educadoras en formación que mostraron progreso, como también casos que mostraron retroceso y casos que no mostraron ni avance ni retroceso. A pesar de la variabilidad de resultados en la etapa cualitativa, las estudiantes que participaron a lo largo de todo el proceso valoraran la articulación teórico-práctico del sistema de andamiaje, destacando especialmente los espacios de reflexión sobre la propia práctica.

CONCLUSIONES

Los diseños de investigación bajo un enfoque mixto son escasos en la Didáctica de la Matemática, a pesar de sus ventajas para adaptarse tanto a los fenómenos como a las teorías propias de la disciplina. Existen distintos tipos de diseños mixtos, según la forma en que se acoplen, articulen o integren los métodos cualitativo y cuantitativo. Los ejemplos compartidos abordan problemáticas y perspectivas teóricas diferentes, pero responden al mismo tipo de diseño secuencial exploratorio, puesto que los resultados del análisis cuantitativo informan la toma de decisiones que estructura la etapa cualitativa del estudio. En ambos estudios el propósito del enfoque cualitativo es indagar en profundidad respecto de las relaciones o elementos más complejos o heterogéneos del fenómeno. Asumiendo que los diseños de métodos mixtos proporcionan herramientas importantes para superar las limitaciones de las investigaciones mono-metódicas (Kelle y Buchholtz, 2015), la invitación es a explorar el uso de metodologías mixtas en Educación Matemática como una oportunidad para ampliar y mejorar, por un lado, los procesos de validación y, por otro, repensar el empalme entre los objetivos y los métodos.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, Ingeniería didáctica en educación matemática. *Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-60). Una empresa Docente/ Grupo Editorial Iberoamerica.

Olfos, R., Vergara-Gómez, A., Estrella, S., y Goldrine, T. (2022). Impact of a theory-practice connecting scaffolding system on the ability of preschool teachers-in-training to teach mathematics. *Teaching and Teacher Education*, 120, 103887.

Rodríguez, M. A., Ledezma, C. A., Vergara, A. S., y Gregori, P. (2021). Reconstrucción cognitiva de los conceptos centrales de la función exponencial: un estudio de enfoque mixto. *Formación universitaria, 14*(6), 149-164.

Kelle, U., y Buchholtz, N. (2015). The combination of qualitative and quantitative research methods in mathematics education: A “mixed methods” study on the development of the professional knowledge of teachers. In *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 321-361). Springer.

Sharma, S. (2013). Qualitative approaches in mathematics education research: Challenges and possible solutions. *Education Journal, 2*(2), 50-57.

Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., y Presmeg, N. (2015). Approaches to qualitative research in mathematics education. Springer, Dordrecht.

Hart, L. C., Smith, S. Z., Swars, S. L., y Smith, M. E. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research, 3*(1), 26-41.

Cresswell, J. W., y Plano Clark, V. L. (2011). *Designing and Conducting mixed method research* (2nd ed.). Sage.

Bergman, M. M. (2008). *Advances in mixed methods research: Theories and applications*. Sage.

Johnson, R. B., Onwuegbuzie, A. J., y Turner, L. A. (2007). Toward a definition of mixed methods research. *Journal of mixed methods research, 1*(2), 112-133.

Almeida, F. (2018). Strategies to perform a mixed methods study. *European Journal of Education Studies, 5*(1), 137-151.

Creswell, J. W., Plano Clark, V. L., Gutmann, M. L., y Hanson, W. E. (2003). Advanced mixed methods research designs. En *Handbook of mixed methods in social and behavioral research* (pp. 209-240). Sage Publications.

MATEMÁTICA Y EXCLUSIÓN EN EL CASO DE LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS INDÍGENA

Sonia Salas-Salinas.

Universidad Católica de Temuco.

ssalas@uct.cl

Presentamos en esta conferencia la exclusión epistémica de la matemática mapuche, en el marco de la Educación Intercultural Bilingüe (EIB), lo que provoca una serie de conflictos semióticos en los estudiantes que deben resolver problemas en la asignatura de lengua mapuzugun poniendo en juego su conocimiento matemático escolar y mapuche. Evidenciamos la base epistémica de la aritmética mapuche, para ser considerada e incluida en la clase de matemática en contexto mapuche.

Exclusión epistémica, Práctica matemática, Significados situados, Conflicto semiótico.

INTRODUCCIÓN

En Chile desde los años ochenta se comienza a instalar en la ciudadanía la idea de que existe un producto llamado ‘educación de calidad’ que se puede adquirir como cualquier otro bien (Puelles, 2012; Salas-Salinas, 2018a). Han pasado cuatro décadas desde que se instala la idea de que existe una educación de calidad para todos y todas, pero, los propios resultados del SIMCE nos muestran que esa educación de calidad no es para todos y todas. Así, la estandarización anexada a la privatización de la educación en nuestro país ha perpetuado la segregación social; la desigualdad; el racismo social, étnico y epistemológico; y el derecho a la educación (Oliva, 2008; Puelles, 2012; Salas-Salinas, 2018b). En las dos últimas décadas de este siglo, en Chile, se agrega un nuevo término al discurso político del Sistema Educativo: inclusión. Entonces, ahora, no sólo se habla de una educación de calidad, sino también de una educación de calidad inclusiva, lo que nos sitúa en el centro del problema que intentaremos discutir en esta presentación.

Así, desde un enfoque sociocultural y crítico de la enseñanza de la matemática, entendemos que esta ‘disciplina escolar’ es instrumental a la ‘política educativa’ y permite mantener en el tiempo distintas formas de exclusión (D'Ambrosio, 1999; Skovsmose, 1999; Salas-Salinas, 2018b). En tanto, la monoculturalidad de los sistemas educativos excluye el conocimiento matemático presente en las prácticas de distintas comunidades de prácticas, lo que implica un racismo epistémico institucional (Godino y Batanero, 1994; Mampaey y Zanoni, 2015; Salas-Salinas, 2017).

En suma, en este escenario nacional proponemos la inclusión epistémica de la aritmética mapuche en las escuelas situadas, en el marco de la EIB, desde el pluralismo epistemológico, articulando la etnomatemática y matemática escolar (Salas-Salinas et al., 2016). Dicha articulación se debe dar en distintas dimensiones y niveles, en este caso planteamos la articulación en la dimensión normativa y didáctica. Para ello, nos hemos planteado el problema en los siguientes términos ¿cuáles son los nichos ecológicos en los que vive la matemática mapuche?, ¿qué significados tienen esas prácticas matemáticas operativas y discursivas?, ¿qué conflictos semióticos podemos identificar?, ¿es posible articular la etnomatemática y matemática escolar? Nuestro objetivo es analizar las prácticas matemáticas mapuche, su significado matemático, potencial educativo y evidenciar los actuales conflictos semióticos a que se enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de la matemática escolar.

Así, reforzamos la idea de descolonizar el currículo de matemáticas, en tanto desde el pluralismo epistemológico y las herramientas teóricas del EOS, es posible la articulación de saberes en el aula de matemáticas, situando los procesos de enseñanza de esta disciplina técnico-instrumental (Olivé, 2009; Oliva y Gascón, 2016; Salas-Salinas, 2017, 2018b).

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En la actualidad, distintas culturas indígenas que conviven en este mundo multicultural están en búsqueda de preservar su conocimiento y cosmovisión; sin embargo, son conscientes que es necesario aprender los marcos interpretativos de otras culturas para establecer relaciones dialógicas en igualdad de condiciones disminuyendo las actuales relaciones de poder y el racismo epistemológico de la educación monocultural (Quintriqueo, 2010; Manpaey y Zanoni, 2016; Salas-Salinas y Quintriqueo, 2018; Salas-Salinas, 2018a). La etnomatemática es parte de la práctica cotidiana de los estudiantes dentro y fuera de la escuela, por ello reconocerla como una práctica válida refuerza la creatividad, los esfuerzos, el auto-respeto cultural, en una sociedad multicultural (D´Ambrosio, 2000; Retamal et al., 2020). Entonces, abordamos las prácticas discursivas, con el correspondiente análisis epistémico, que valida este conocimiento para ser incorporado en el aula de matemáticas intercultural. Nuestra investigación socio-histórica documental y etnográfica nos permitió encontrar el conocimiento matemático mapuche (Cohen y Manion, 2002), para deconstruir la teoría subjetiva de los sujetos, en tanto está presente en la memoria colectica (Flick, 2007). El análisis ontosemiótico lo realizamos con algunas herramientas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), para encontrar el conocimiento epistémico matemático mapuche, presentes en las prácticas matemáticas discursivas y que puede ser articulado con la matemática escolar (Salas-Salinas, 2017; 2018b).

Godino y Batanero (1994) nos plantean que en las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales o abstractos, los cuales pueden estar representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual, es decir, mentifactos, artefactos y sociofactos. Entonces, asumimos el postulado antropológico de la relatividad socioepistémica de la triada: sistemas de prácticas, objetos y significados, en tanto concibe a las instituciones como comunidades de prácticas que incluye grupos indígenas, profesionales, culturales, técnicos, sociales, entre otros (Godino y Batanero, 1994; Salas-Salinas et al., 2015). Cuando analizamos la configuración epistémica de una práctica matemática, ponemos atención en los objetos primarios: lenguaje, situaciones problemas, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos (Font et al., 2013; Pino-Fan et al., 2011). Es decir, utilizar un determinado lenguaje verbal, gráfico y/o simbólico que expresen y soporten los enunciados verbales del campo de problemas planteados, los conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos previos y emergentes que participan en el proceso. Finalmente, vemos que los argumentos justifican los conceptos, procedimientos y proposiciones puestas en juego en la resolución del campo de problemas. Las prácticas matemáticas son inseparables de los objetos matemáticos, en tanto no hay práctica sin objeto ni objeto sin práctica y la relación entre ambos, es lo que entendemos como función semiótica (Godino et al., 2011).

Godino et al. (2011), plantean que la naturaleza y significado de los números requiere adoptar una visión antropológica – sociocultural sobre la matemática e ilustran la pluralidad de significados del número natural. Entonces, desde el pluralismo epistemológico de Olivé (2009) evidenciamos la

pluralidad de significados de los objetos matemáticos presentes en las prácticas matemáticas mapuche y que pueden ser incorporados en las aulas de matemáticas. Con ello, argumentamos la inclusión epistémica de las prácticas matemáticas mapuche en las escuelas situada de manera articulada con la matemática escolar, en tanto contribuyen al desarrollo de habilidades y competencias matemáticas, más allá, de las establecidas en el currículo de matemáticas.

En síntesis, el análisis realizado reporta una serie de cuestiones que favorecen la incorporación de la aritmética mapuche en las escuelas situadas, pero, además, reporta las múltiples funciones semióticas que debe establecer el discente al tratar de comprender una noción matemática en dos racionalidades distintas. Lo que, indudablemente, implicará uno o varios conflictos semióticos que la escuela no resuelve y la política educativa no se hace cargo.

RESULTADOS

El primer resultado de nuestra investigación arrojó la deconstrucción de la aritmética mapuche y su estructura aditiva. Luego nos enfocamos en las prácticas operativas y discursivas, los nichos ecológicos en que se encuentran y su correspondiente análisis epistémico. Con ello, identificamos la pluralidad de significados, posibles de articular con la matemática escolar, en distintas dimensiones y niveles. Finalmente, estos análisis evidencian los actuales conflictos semióticos a que se enfrenta el y la estudiante en las escuelas situadas en contexto mapuche en los primeros niveles de educación básica, al intentar resolver problemas en dos racionalidades distintas, cuando los significados institucionales no son situados.

La deconstrucción de la aritmética mapuche en *mapuzugun*, lengua mapuche, muestra una estructura regular en la que los objetos no ostensivos se aprecian claramente y contribuyen a la comprensión de las unidades de primer, segundo y tercer orden. Cuestión que, en la aritmética en castellano, por sus irregularidades, no se evidencian claramente, lo que dificulta el aprendizaje (D'Amore, 2003; Bengoechea, 2009; Salas-Salinas, 2104, 2018b; Salas-Salinas y Godino, 2016). Las prácticas matemáticas mapuche tienen sus nichos ecológicos en el seno de su cultura y sus territorios, sin embargo, también las encontramos en la clase de mapuzugun, en tanto la EIB ha incorporado una nueva asignatura, sector de lengua indígena *mapuzugun* (SLIM) en las escuelas situadas en contexto mapuche. Esta asignatura utiliza el contexto mapuche en los libros de textos que utilizan los y las estudiantes, de manera evocada. Entonces, en las prácticas identificadas en los textos en mapuzugun, emergen los objetos matemáticos que no se abordan en la clase de matemáticas, lo que implica que los estudiantes deben poner en juego el conocimiento en dos racionales distintas y articularlas, para comprender un problema y resolverlo. Un nicho ecológico encontrado es la cocina mapuche, evocando este contexto se plantea al estudiante, en la clase de mapuzugun la siguiente actividad (ver Figura 1).

Figura 1.

Actividad propuesta al estudiante de 3° básico en SLIM.

Fuente: Texto estudiante *mapuzugun* 3º básico, 1º unidad (MINEDUC, 2014, pp. 18-19).

Esta actividad, receta de dulce de murta, que se presenta a las y los estudiantes en mapuzugun podemos apreciar las prácticas de: enumerar pasos a seguir en mapuzugun, *Kiñe* (1), *Epu* (2) y *Küla* (3); seguido de la utilización de magnitudes arbitrarias mari runa (diez puñados), mari panü (diez cargas o medidas) y *küla fürasko* (tres frascos). Intervienen unidades de tiempo: *epu mari minutu* (veinte minutos) y *mari kechu minutu* (quince minutos). Para delimitar las configuraciones epistémicas en este problema, utilizaremos el planteamiento de preguntas que habitualmente se presenta a los estudiantes al resolver este tipo de problema matemático. Por razones de espacio, sólo presentamos la configuración epistémica 1 (CE1) y en la conferencia veremos la CE2, para luego terminar con la pluralidad de significados y la articulación.

Configuración epistémica 1 (CE1).

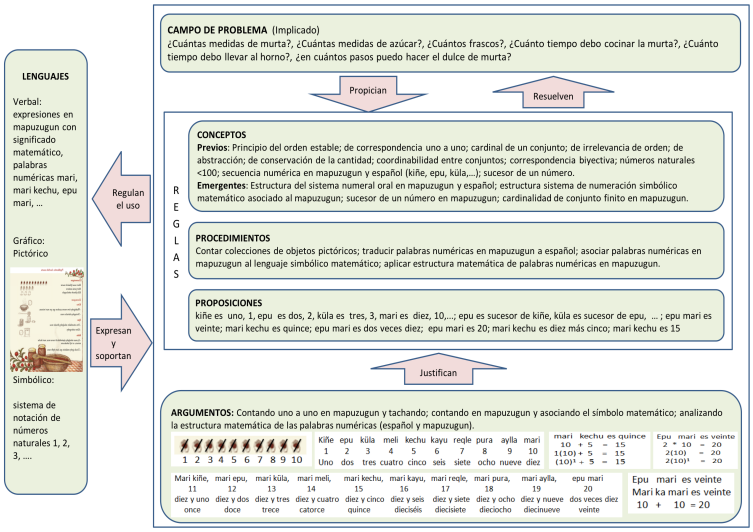
La primera situación problema que debe enfrentar el estudiante es aplicar de manera competente su significado personal de número para determinar el cardinal de los conjuntos finitos de elementos involucrados en la elaboración de la receta. En la Figura 2, mostramos la configuración epistémica 1(CE1) y cómo se relacionan entre sí los distintos objetos matemáticos involucrados que se asocian al significado de número como cardinal del conjunto. La interrogación del texto nos delimita el campo de problemas implicado en la tarea en esta CE1.

La resolución del problema implica dar respuesta a las interrogantes: ¿Cuántas medidas de murta?, ¿Cuántas medidas de azúcar?, ¿Cuántos frascos?, ¿Cuánto tiempo debo cocinar la murta?, ¿Cuánto tiempo debo llevar al horno?, ¿en cuántos pasos puedo hacer el dulce de murta? Para dar respuesta a estas interrogantes, el estudiante requiere poner en juego algunos conocimientos previos: principio del orden estable en castellano y mapuzugun; de correspondencia uno a uno; cardinal de un conjunto; de irrelevancia de orden; de abstracción; de conservación de la cantidad; coordinabilidad entre conjuntos; correspondencia biyectiva; números naturales <100; secuencia numérica en mapuzugun y en castellano. Sin embargo, los conocimientos emergentes que podemos visualizar son: estructura aditiva del sistema numeral oral en mapuzugun y castellano; estructura del sistema de numeración decimal simbólico matemático asociado a la numeración oral en mapuzugun; sucesor de un número en mapuzugun; cardinal de un conjunto finito en mapuzugun. Estas cuestiones, nos llevan a preguntarnos ¿podrá entender el problema el estudiante, si en matemáticas no se trabaja la aritmética en mapuzugun?, ¿a qué racionalidad podrá recurrir el estudiante para asociar todos los objetos

matemáticos que debe poner en juego? En la Figura 2 podemos apreciar la trama de prácticas, objetos y funciones semióticas, a que se enfrenta el estudiante para resolver un problema simulado.

Figura 2.

Objetos matemáticos implicados CE1.



Fuente: Salas-Salinas (2018a).

En suma, el estudiante mapuche y no mapuche, que asiste a la escuela situada en contexto mapuche en la que se implementa la actual educación intercultural bilingüe a través de la asignatura Sector de Lengua Indígena Mapuzugun (SLIM), se enfrenta a distintos conflictos semióticos, epistémicos, cognitivos y muy probablemente, instruccional. Entonces, una vez más podemos apreciar la necesidad de articulación epistémica que requieren las escuelas situadas, en tanto, el aula de matemáticas debiera incorporar el conocimiento matemático mapuche y articularlo con la matemática escolar, a fin de facilitar el aprendizaje de las y los estudiantes para resolver problemas en cualquier contexto.

CONCLUSIÓN

La aritmética mapuche tiene una base epistémica, por lo que es viable su incorporación al aula de matemáticas. En tanto, esta disciplina no puede estar ajeno a los procesos sociales y culturales, en los distintos espacio-tiempo-histórico. Las habilidades y competencias matemáticas se pueden desarrollar con distintas prácticas cotidianas, en tanto en el día a día los estudiantes se relacionan con la matemática fuera del espacio escolar. Entonces, por qué no validarla y dejarla que llegue a la escuela, para que los expertos puedan articularla con la matemática escolar y propiciar la relación dialógica entre saberes en igualdad epistémica.

AGRADECIMIENTOS

Proyecto FONDEF ID21110187, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile y Programa de Capital Humano Avanzado, Comisión Nacional Científica y Tecnológica, CONICYT/BECAS CHILE Nº72150172.

REFERENCIAS

Bengoechea de, N. (2009). *Etnomatemáticas, métodos y objetos culturales*. [Tesis de Máster, Universidad de Granada, España].

Cohen, L. y Manion, L. (2002). *Método de investigación educativa*. La Muralla.

D'Ambrosio, U. (1999). La transferencia del conocimiento matemático a las colonias: factores sociales, políticos y culturales. *Llull, 22*(44), 347-380.

D'Ambrosio, U. (2000). Las dimensiones políticas y educacionales de la etnomatemática. *Números,* (43), 439-444.

Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Ediciones Morata.

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2), 247-265.

Mampaey, J., y Zanoni, P. (2016) Reproducing monocultural education: ethnic majority staff's discursive constructions of monocultural school practices. *British Journal of Sociology of Education, 37*(7), 928-946, DOI: 10.1080 / 01425692.2014.1001059

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2014). *Texto Estudiante Mapuzugun 3° básico*. Autor. https://peib.mineduc.cl/wp-content/uploads/2016/06/Texto-De-Estudio-3do-Basico-Lengua-Mapuzugun.pdf

Oliva, M. A. (2008). Política educativa y profundización de la desigualdad en Chile. *Estudios pedagógicos, 34*(2), 207-226.

Oliva, M. A., y Gascón, F. (2016). Normalization and neoliberal political rationality: National Curriculum Foundations in Chile. *Cuadernos CEDES, 36*(100), 301-318.

Olivé, L. (2009). Por una auténtica interculturalidad basada en el reconocimiento de la pluralidad epistemológica. *Pluralismo epistemológico*, 19-30.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico- matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1).

Puelles, M. de (2012). *Problemas actuales de política educativa*. Morata.

Quintriqueo, S. (2010). *Implicancias de un modelo curricular monocultural en contexto mapuche*. Temuco, Universidad Católica de Temuco.

Retamal, S., Pino-Fan, L. R. y Salas-Salinas, S. (2020). Una Reflexión sobre el Aprendizaje de la Matemática fuera del Espacio Escolar. *Revista Paradigma*, 41, 308-325.

Ruiz, A., y Medina, A. (2014). Modelo didáctico intercultural en el contexto afrocolombiano: la etnoeducación y la cátedra de estudios afrocolombianos. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación*, (14), 6-29.

Salas-Salinas, S. (2017). Hacia un significado de referencia del sistema de numeración mapuche. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del *Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. http://hdl.handle.net/10481/45384

Salas-Salinas. S. (2018a). Conocimiento matemático Mapuche en libros de textos de lengua Mapuzugun. En Medrano, C., Soto, M. y Domínguez, M (Eds). *La humanidad al centro: variaciones del ser en la educación* (pp. 62-76). ReDIE.

Salas-Salinas (2018b) *Articulación de las matemáticas mapuche y escolar en el caso de los conocimientos aritméticos*. [Tesis Doctoral Universidad de Granada]. http://hdl.handle.net/10481/54976

Salas-Salinas, S. y Godino, J. D. (2016). Potencial educativo de la aritmética mapuche en Chile. En Rosas, A. (Ed.) *Avances en Matemática Educativa Tecnología y Matemática* (pp. 72-84). Instituto Politécnico Nacional.

Salas, S., Godino, J., y Oliveras, M. L. (2015). Números mapuches en el currículo de la lengua mapuzugun en la educación básica chilena. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 8*(2), 194-213.

Salas-Salinas, S., Godino, J. D., y Quintriqueo, S. (2016). Análisis exploratorio de las prácticas matemáticas de dos estudiantes mapuches en colegios con y sin Educación Intercultural Bilingüe. *Bolema: boletim de Educação Matemática*, 30, 481-501.

Salas-Salinas, S., y Quintriqueo, S. (2018). Hacia un modelo de articulación del conocimiento matemático mapuche y el escolar. *XXI Jornada Nacionales Educación Matemática*, Universidad de Tarapacá. Arica, Chile. https://www.sochiem.cl/documentos/actas-jnem/2017-arica-xxi-uta.pdf

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Traducción de Valero, P. Una Empresa Docente.

Vithal, R., y Skovsmose, O. (1997). The end of innocence: a critique of 'ethnomathematics'. *Educational Studies in Mathematics, 34*(2), 131-157.

ESTUDIOS INTERDISCIPLINARIOS SOBRE BRECHAS Y ESTEREOTIPOS LIGADOS A GÉNERO Y NIVEL SOCIOECONÓMICO EN RELACIÓN CON LOS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES MATEMÁTICAS

David Maximiliano Gómez

Universidad de O'Higgins

david.gomez@uoh.cl

Las inequidades ligadas a estereotipos de género y nivel socioeconómico afectan transversalmente a los procesos educativos, y en particular a aquellos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Con el objetivo de estudiar el desarrollo matemático temprano y cómo se puede disminuir las brechas ligadas a género y nivel socioeconómico en este ámbito, se constituyó en 2021 el Núcleo Milenio para el Estudio del Desarrollo de las Habilidades Matemáticas Tempranas (MEMAT). MEMAT reúne a un equipo interdisciplinario de investigadoras e investigadores que estudian diversos contextos involucrados en el desarrollo matemático temprano, tales como el entorno familiar, la educación parvularia y la formación inicial docente. Esta conferencia presenta algunos de sus focos de trabajo, antecedentes teóricos y empíricos, y resultados preliminares.

Estereotipos, Matemática, Habilidades, Formación docente, Interdisciplinariedad.

INTRODUCCIÓN

Múltiples investigaciones han demostrado, una y otra vez, inequidades en el desempeño matemático de estudiantes escolares de Chile. Dos puntos críticos en este marco son las inequidades ligadas a género y nivel socioeconómico, las cuales han sido evidenciadas por datos tanto nacionales como internacionales. Por ejemplo, los datos de Chile de PISA 2018 (OECD, 2019) muestran que en matemática las niñas obtienen un resultado medio 7 puntos menor al de los niños. Asimismo, los resultados del Diagnóstico Integral de Aprendizajes aplicado el año 2021 sugieren que, a partir de 6° básico, los y las estudiantes en situación de baja vulnerabilidad obtienen resultados entre 10 y 17 puntos más altos que quienes están en situación de media o alta vulnerabilidad. Estos sesgos no solamente ocurren a nivel de resultados, sino también a nivel de actitudes y estereotipos que afectan cómo los y las docentes apoyan a niños y niñas de distintos contextos en su aprendizaje matemático. Por ejemplo, Espinoza y Taut (2016) mostraron que docentes chilenos, tanto hombres como mujeres, dirigían a niños de 7º básico mayor retroalimentación y preguntas de mayor nivel de desafío cognitivo que a niñas. Estas actitudes y estereotipos muchas veces actúan de forma implícita, y constituyen una barrera para el desarrollo de clases inclusivas (ver también, p.ej., Zapata Cardona y Rocha Salamanca, 2013).

Con el objetivo de investigar en torno a estas inequidades en el ámbito del aprendizaje matemático, se crea a fines de 2021 el Núcleo Milenio para el estudio del desarrollo de las habilidades matemáticas tempranas (MEMAT). MEMAT es patrocinado por la Pontificia Universidad Católica de Chile, la Universidad Diego Portales y la Universidad de O'Higgins, y reúne a un equipo interdisciplinario de investigadoras e investigadores que estudia los contextos de desarrollo de las habilidades matemáticas

tempranas, factores que influyen en este desarrollo, y el vínculo de estas habilidades con las trayectorias académicas futuras.

Dentro de las líneas de trabajo de MEMAT, se ha articulado desde la Universidad de O'Higgins un equipo de trabajo en torno a la formación inicial docente y cómo ésta puede potenciar las habilidades matemáticas de forma equitativa. En lo que sigue, presento algunos de los focos de interés de este equipo de trabajo, antecedentes teóricos y empíricos que motivan estos focos, y algunos resultados preliminares de investigaciones ligadas a ellos.

EVALUACIONES DIAGNÓSTICAS AL INGRESO A PEDAGOGÍA

La normativa que rige la formación inicial docente en Chile exige a las universidades aplicar a sus matriculados y matriculadas evaluaciones diagnósticas que apoyen acciones de nivelación y acompañamiento (Ley 20.903). Un trabajo desarrollado en el marco del Núcleo MEMAT indaga en los resultados de la evaluación diagnóstica de matemática aplicada por la Escuela de Educación de la Universidad de O'Higgins a sus diversas carreras. Esta evaluación involucra: conocimientos matemáticos, creencias sobre la matemática (Martínez et al., 2019), ansiedad matemática (Núñez-Peña et al., 2013) y el nivel de confianza declarado en el propio conocimiento (Leclercq, 2014).

Espinoza et al. (en preparación) analizaron con un enfoque de género los resultados diagnósticos de las cohortes de ingreso 2021 y 2022. Al considerar los resultados de todas las carreras juntas, encontraron diferencias estadísticamente significativas en desmedro de las estudiantes mujeres, tanto en sus puntajes de conocimiento matemático como en los niveles de confianza que manifiestan tener sobre la correctitud de sus respuestas. Al controlar por la carrera de pertenencia de cada estudiante, sin embargo, las diferencias de conocimiento dejaron de ser estadísticamente significativas mientras que las de confianza declarada se mantuvieron. Adicionalmente, las mujeres mostraron niveles significativamente mayores que los hombres de ansiedad matemática, particularmente en el ámbito de las evaluaciones de contenido (p.ej. situaciones como estudiar para una prueba de matemática o tomar el libro de matemática para hacer una tarea), y un peor autoconcepto en relación con la matemática (p.ej., un mayor grado de acuerdo con afirmaciones tales como "*me cuesta entender matemática*").

Considerando que la docencia en los niveles iniciales de la formación es realizada en su mayoría por mujeres, y que estas disposiciones afectivas hacia la matemática son transmisibles a través de las interacciones pedagógicas (Beilock et al., 2010), estos resultados subrayan la necesidad de que las universidades aborden explícitamente en sus programas formativos este desafío.

ESTEREOTIPOS IMPLÍCITOS

Una arista complementaria a las diferencias arriba mencionadas tiene relación con los estereotipos de nuestras sociedades en relación con la matemática. Diversos estudios han mostrado que niños y niñas en edad escolar comienzan a considerar la matemática como una actividad masculina. Picker y Berry (2000) pidieron a niños y niñas de 7° grado de cinco países que dibujaran "una persona trabajando en matemática" (*"a mathematician at work"*, p. 70). Mientras que los niños participantes en el estudio dibujaron casi exclusivamente a hombres (p.ej., Finlandia: 86%, Reino Unido: 94%, Suecia: 100%), las niñas también dibujaron mayoritariamente a hombres (p.ej., Finlandia: 61%, Reino Unido: 41%, Suecia: 79%; Reino Unido fue el único país donde la cifra estuvo bajo 50%).

Una actitud es una predisposición por evaluar algún objeto en forma favorable o desfavorable (Schwarz, 2015). En este marco, un estereotipo puede entenderse como una actitud que asocia ciertas características como, por ejemplo, el "ser matemático" con el "ser hombre". Si bien es posible estudiar la prevalencia de estereotipos a través de preguntas explícitas, hay condicionantes que dificultan este estudio. Por ejemplo, una persona puede inhibirse de responder con total franqueza debido a un deseo de no responder cosas socialmente indeseables. Desde el área de la psicología social, se ha desarrollado diversos instrumentos que buscan evaluar el grado de acuerdo con un estereotipo a través de métodos indirectos. Un ejemplo de estos instrumentos es la llamada "tarea de asociación implícita" (ver, p.ej., Nosek et al., 2007). Ésta es una tarea computarizada, en la cual se le pide a una persona realizar un ejercicio de clasificación contra el tiempo. Por ejemplo, se puede presentar palabras que deben ser clasificadas como relacionadas con lenguaje o matemática (p.ej., poema, círculo, palabra, número, escribir, calcular) y fotografías de personas que deben ser clasificadas como hombre o mujer. Combinando de manera adecuada el orden y forma de presentación de palabras y fotografías, los datos obtenidos de esta tarea permiten calcular un índice que cuantifica si la asociación "hombre/matemática vs. mujer/lenguaje" es más o menos fuerte que la asociación "mujer/matemática vs. hombre/lenguaje". Este tipo de tareas han confirmado la presencia a nivel implícito de un estereotipo de género en relación con la matemática desde los inicios de la educación escolar, tanto en otros países (Cvencek et al., 2011) como en Chile (Del Río et al., 2016; Huepe et al., 2016).

En el marco del Núcleo MEMAT, vamos a desarrollar tareas de asociación implícita que nos permitan abordar no solamente el estereotipo de género arriba mencionado, sino también estereotipos ligados al nivel socioeconómico. Más aún, se explorará la utilidad de estas tareas como experiencias gatillantes de reflexión en torno a los correspondientes estereotipos. Asimismo, esta conjunción de experiencia gatillante y reflexión será evaluada como posible metodología de trabajo sobre estereotipos para la formación docente inicial y continua.

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA INICIAL

La educación parvularia y los niveles iniciales de la educación básica son contextos fundamentales para la promoción del desarrollo de las habilidades matemáticas tempranas en niños y niñas. Esta tercera arista del trabajo desarrollado en MEMAT se concentra en el conocimiento que movilizan docentes de estos niveles iniciales para la enseñanza de conceptos y habilidades matemáticas. Las bases curriculares vigentes de la educación parvularia (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2019) ponen, por ejemplo, acento en que niños y niñas logren representar en múltiples formatos cantidades y comunicar tanto ideas matemáticas como el proceso que utilizan para resolver un problema (p. 99). Para lograr estos objetivos, se requiere un conocimiento didáctico de las matemáticas específico para la enseñanza inicial (p.ej., ver el marco propuesto por Alsina y Delgado-Rebolledo, 2022). La formación inicial de docentes para la educación parvularia con esta experticia requiere de un diálogo interdisciplinario entre especialistas de formación inicial, educación matemática y psicología, en el cual el Núcleo busca aportar.

Un proyecto en curso en el marco de MEMAT busca comprender la valoración que tienen educadoras y educadores sobre las justificaciones o argumentos matemáticos que dan niños y niñas. Un foco particular de interés es su percepción sobre respuestas matemáticamente correctas, pero que han sido obtenidas a través de un procedimiento incorrecto o que son justificadas de una manera inadecuada,

en contraste con respuestas matemáticamente incorrectas pero que han sido obtenidas a través de un procedimiento pertinente en el cual hubo un error menor o que son justificadas de manera adecuada.

REFLEXIONES FINALES

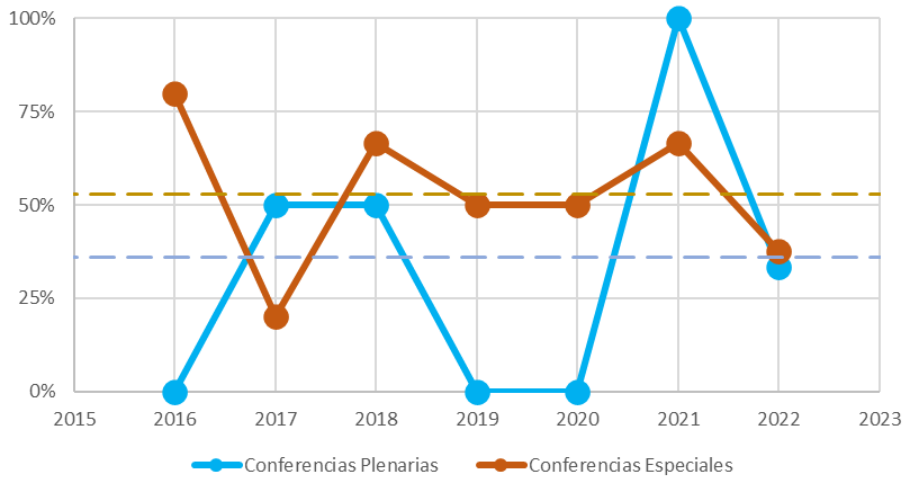
Un abordaje exitoso de los estereotipos y sesgos que se producen por género y nivel socioeconómico en la enseñanza de la matemática temprana requiere una perspectiva que no vea este problema como uno propio de personas individuales. Si bien los programas de formación docente están llamados a desafiar las creencias y estereotipos de sus estudiantes para lograr futuros y futuras profesionales que hagan de la inclusión educativa una realidad, este trabajo no debe visualizarse desde una lógica de "nivelación" individual de cada estudiante. Los estereotipos y sesgos son un problema esencialmente social, y por lo mismo requieren un abordaje sistémico que vaya más allá de las actividades curriculares. Por ejemplo, cuando una institución formadora de docentes organiza eventos donde se invita a personas expertas en diversos ámbitos del pensamiento matemático, ¿con qué frecuencia son estas personas hombres o mujeres?

Un ejemplo concreto y cercano que como comunidad SOCHIEM podemos analizar y discutir es el de la representación de hombres y mujeres en nuestros propios eventos anuales. La Figura 1 presenta los porcentajes de conferencistas plenarios y especiales de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática desde 2016 a 2022 (excluyendo tres conferencias especiales firmadas por grupos de personas, ya que no se pudo determinar quién o quiénes realizaron efectivamente la presentación). La representación femenina en el rol de conferencista plenaria en el período mencionado alcanza solamente el 36%, mientras que en el rol de conferencista especial presenta un mejor balance con un 53%.

La investigación puede aportar de múltiples maneras al desarrollo de aulas inclusivas, como por ejemplo visibilizando las situaciones que promueven o mantienen sesgos y estereotipos, y estudiando y promoviendo prácticas inclusivas. El trabajo del Núcleo Milenio MEMAT busca aportar a un esfuerzo interdisciplinario, generando vínculos de colaboración con la comunidad de educación matemática nacional.

Figura 1.

Porcentaje de participación femenina en las conferencias de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática desde 2016 a 2022. Las líneas horizontales indican los porcentajes respecto de la totalidad del período: 36% para conferencias plenarias y 53% para conferencias especiales.



AGRADECIMIENTOS

El trabajo arriba descrito es apoyado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) a través de la Iniciativa Científica Milenio, proyecto NCS2021_014.

REFERENCIAS

Alsina, A., y Delgado-Rebolledo, R. (2022). ¿Qué conocimientos necesita el profesorado de Educación Infantil para enseñar matemáticas? *Matemáticas, Educación y Sociedad, 5*(1), 18-37.

Beilock, S. L., Gunderson. E. A., Ramírez, G., y Levine, S. C. (2010). Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 107*(5), 1860-1863.

Cvencek, D., Meltzoff, A. N., y Greenwald, A. G. (2011). Math–gender stereotypes in elementary school children. *Child Development, 82*(3), 766-779.

Del Río, M. F., Strasser, K., y Susperreguy, M. I. (2016). ¿Son las habilidades matemáticas un asunto de género? Los estereotipos de género acerca de las matemáticas en niños y niñas de Kínder, sus familias y educadoras. *Calidad en la Educación,* 45, 20-53.

Espinoza, A. M., Angulo, M., y Gómez, D. M. (en preparación). Diferencias por género y carrera en las creencias, conocimientos, confianza y ansiedad en matemática de estudiantes que ingresan a Pedagogía: Un estudio comparativo.

Espinoza, A. M., y Taut, S. (2016). El rol del género en las interacciones pedagógicas de aulas de matemática chilenas. *Psykhe, 25*(2), 1-18.

Huepe, D., Salas, N., y Manzi, J. (2016). Estereotipos de género y prejuicio implícito en matemáticas y lenguaje: Aportes desde la cognición social. En J. Manzi y M. R. García (Eds.), *Abriendo las puertas del aula: Transformación de las prácticas docentes* (pp. 481-514). Ediciones UC.

Leclercq, D. (2014). Autoevaluación con grados de certeza: Un microscopio para la evaluación de los aprendizajes. En D. Leclercq y A. Cabrera (Eds.), *Ideas e innovaciones: Dispositivos de evaluación de los aprendizajes en la enseñanza superior* (pp. 329-356). Editorial Universitaria.

Ley 20.903 (2016). *Crea el sistema de desarrollo profesional docente y modifica otras normas*. Biblioteca del Congreso Nacional de Chile. http://bcn.cl/2ep1b

Martínez Videla, M. V., Rojas Sateler, F., Ulloa, R., Chandía, E., Ortiz, A., y Perdomo Díaz, J. (2019). Creencias y conocimiento matemático escolar al comienzo de la formación inicial docente en estudiantes de Pedagogía General Básica. *Pensamiento Educativo, 56*(2), 1-19.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2018). *Bases curriculares de la educación parvularia*. Autor. https://hdl.handle.net/20.500.12365/432

Nosek, B. A., Greenwald, A. G., y Banaji, M. R. (2007). The Implicit Association Test at age 7: A methodological and conceptual review. En J. A. Bargh (Ed.), *Automatic processes in social thinking and behavior* (pp. 265-292). Psychology Press.

Núñez-Peña, M. I., Suárez-Pellicioni, M., Guilera, G., y Mercadé-Carranza, C. (2013). A Spanish version of the short Mathematics Anxiety Rating Scale (sMARS). *Learning and Individual Differences*, 24, 204-210.

OECD (2019). *PISA 2018 Results (Volume II): Where all students can succeed*. PISA, OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/b5fd1b8f-en

Picker, S. H., y Berry, J. S. (2000). Investigating pupils' images of mathematicians. *Educational Studies in Mathematics,* 43, 65-94.

Schwarz, N. (2015). Attitude measurement. En J. D. Wright (Ed.), *International encyclopedia of the social & behavioral sciences* (segunda edición), (pp. 178-182). Elsevier.

Zapata Cardona, L., y Rocha Salamanca, P. (2013). Equidad de género en la clase de matemáticas. *Revista Científica*, 19, 168-178.

MIRADA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA INCLUSIVA EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Carmen Cecilia Espinoza Melo

Universidad Católica de la Santísima Concepción

cespinozame@ucsc.cl

En la actualidad, tanto docentes como futuros docentes, somos conscientes de la cantidad de estudiantado diverso con el que nos podemos encontrar dentro de un establecimiento educativo, por lo cual se entiende que deberíamos contar con las herramientas y habilidades necesarias para así atender las diferencias y necesidades que un estudiante presente durante su proceso de aprendizaje. El futuro profesorado se enfrenta con el desafío de promover los aprendizajes de la totalidad del estudiantado, es decir, entregar las mismas oportunidades educativas reconociendo sus diferencias individuales. Además, debido a las exigencias del marco normativo del Ministerio de Educación de Chile, el cual mandata acoger a los itinerarios formativos temas transversales como lo es el paradigma de la inclusión educativa.

Inclusión educativa, Didáctica, Formación inicial del profesorado.

INTRODUCCIÓN

Desde el planteamiento de Salamanca en el año 1994 a la actualidad, la inclusión educativa es considerada un base rector que orienta las políticas y prácticas educativas de todo el estudiantado que se encuentran en el aula y, por tanto, del sistema educativo, dejando en claro que no se refiere ni restringe al estudiantado con Necesidades Educativas Especiales (NEE) aunque obviamente los incluye (Duck y Murillo, 2018). Por consiguiente, se considera relevante el conceder una singular validez a la idoneidad docente en su progreso profesional para beneficiar la inclusión educativa (Marchesi y Hernández, 2019). En Chile, al igual que en diversos países, se han impulsado diversas políticas públicas relativas a educación inclusiva que han sugerido nuevas formas de cómo el profesorado debe proporcionar los apoyos para el logro del aprendizaje y la participación (Muñoz et al., 2015). Sin embargo, esto no ha significado una transformación de los programas de estudio de pedagogía, que, por su nivel de autonomía y línea de mercado, han respondido relativamente a la inclusión educativa en la formación (San Martín et al., 2017).

En los escenarios laborales que enfrentará este profesorado encontrará una gran diversidad, alumnado con distintas maneras de aprender, formas de relacionarse con los demás y ritmos de aprendizaje. Por lo anterior, es necesario que el profesorado de matemática en formación adquiera diversas estrategias, percepciones, reflexión sobre su práctica, experiencias y conocimientos para dar los apoyos a todo el estudiantado y favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje, de tal manera, que puedan sentirse preparados para entregar una educación de calidad a todos y todas.

Algunos autores advierten que desde las políticas educativas se ha forzado a las universidades donde se forman docentes para producir respuestas precisas a la diversidad del alumnado, la totalidad de los programas de educación superior para futuros profesores introduce herramientas a nivel de metodologías y didácticas que se centran en el aprendizaje del alumno promedio, sin reflexionar sobre la diversidad del estudiantado (Infante, 2010; Infante y Matus, 2009; Tenorio, 2011)

La formación del profesorado de matemática actualmente se encuentra con importantes desafíos por las demandas de las políticas públicas, es por este motivo que se necesita incluir nuevos paradigmas y temáticas transversales en la formación inicial de éstos. El monumentalismo, que aún se sigue utilizando en las aulas universitarias, enfatiza la memorización de los contenidos y el trabajo individual. En la mayoría de estas se continúa realizando clases de forma tradicional, donde, quien posee el conocimiento es el profesor y los estudiantes son receptores pasivos. En este sentido, existen evidencias que ponen de manifiesto que la repetición de los contenidos no ayuda al alumnado a su comprensión (Alsina y Franco, 2020).

En las aulas actualmente encontramos una gran diversidad del alumnado con diferentes maneras de acceder e interpretar la información, distintas formas de relacionarse con los demás y distintos ritmos de aprendizaje (Alsina y Franco, 2020). Por lo anterior, es necesario que los futuros profesores en su formación inicial adquieran diversas estrategias, percepciones, experiencias y conocimientos para intentar dar respuestas a las múltiples interrogantes del proceso de enseñar y aprender que se presentan cada día y al cual deberán enfrentarse, de tal manera que puedan estar preparados para entregar una educación de calidad a todos los estudiantes del salón de clases, independiente de su condición social, étnica, discapacidad o lengua. Se entiende que un estudiante presenta necesidades educativas especiales cuando, con o sin discapacidad, presenta dificultades el acceso a contenidos curriculares en la interacción con su contexto escolar (Castro y Torres, 2017).

Los continuos cambios sociales que se están produciendo, tales como: la globalización, el incremento de flujo migratorio, el vivir en una sociedad con personas que presentan diversas necesidades, donde lo diferente se hace cotidiano y normal, demanda una nueva visión en la función social y rol docente que debe estar presente en su formación inicial de estos profesores (Maestre et al., 2017). Los profesores, se enfrenta con el desafío de promover los aprendizajes de la totalidad del estudiantado, es decir, entregar las mismas oportunidades educativas, reconociendo sus diferencias individuales (Aké et al., 2021). Además, debido a las exigencias del marco normativo del Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) el cual mandata acoger a los itinerarios formativos temas transversales como lo es el paradigma de la inclusión educativa.

Factores que limitan la inclusión educativa

El avance en la inclusión educativa se ha limitado, ya que nos hemos encontrado con normas sociales que son a menudo el mayor obstáculo para ésta, las cuales tardan tiempo en quedar fuera de circulación y muchas todavía resisten a la incorporación de estudiantado con discapacidad y problemas de aprendizaje, así como los de las culturas minoritarias para que éstas puedan estar en el aula.

La capacidad de respuesta inclusiva de los centros no mejora, lo que aumenta es la proliferación de normas, medidas, dispositivos y centros especiales, más o menos segregadores y excluyentes; para *atender a la diversidad,* como eufemísticamente se denominan (Echeita, 2017).

Para poder progresar en la implementación de la educación inclusiva se deben eliminar las prácticas de segregación dirigidas principalmente al estudiantado que presentan problemas de aprendizaje o físicos, también encontramos barreras físicas en la estructura de las escuelas, ya que no tienen instalaciones adecuadas para todos y todas.

Se puede observar que los planes de estudio entregados por el ministerio de educación siguen siendo muy rígidos, lo cual no permite la experimentación o al uso de diferentes métodos de enseñanza en las instituciones educativas. El estudiantado no tiene injerencia en éstos, ya que no es considerada su opinión, relativo a que quieren aprender o que les interesa, la preocupación central del profesorado es darle cumplimiento total al currículum que corresponde ver por nivel.

Para que la inclusión educativa pueda avanzar se requiere de un cambio de postura de las instituciones, por ejemplo, que apoyen al profesorado que requieren perfeccionarse en temas de inclusión educativa y didáctica, ya que esto beneficiará el aprendizaje de todos los estudiantes.

Papel de la formación de profesores de aula para el desarrollo de la inclusión

Olmos et al. (2016) nos señalan que:

> La práctica docente en la universidad también se ha complicado demandando reflexiones y propuestas de cambio en la formación del profesor en múltiples dimensiones y escenarios, uno de los cuales implica responder al desafío de atender a la diversidad tanto estudiantil como de la cultura académica universitaria (p.230).

El profesorado que estará en las aulas inclusivas debe incorporar una variedad de métodos de enseñanza con el fin de cubrir desde su especialidad todas o la mayoría de las capacidades de aprendizaje del estudiantado. Esto puede ser beneficioso para todo el alumnado, ya que permite aumentar su participación en el proceso de enseñanza aprendizaje, un mayor compromiso por parte de ellos y protagonismo.

Al respecto Slee (2001), cuando hace referencia a las prácticas inclusivas, destaca la necesidad de que los futuros docentes y los formadores de estos tengan la posibilidad de comprender sus propias nociones de inclusión para construir espacio de posibilidades distintos que no refuercen las debilidades tradicionalmente visibilizadas de los grupos minoritarios en la escuela (Infante, 2010).

En síntesis, el formar profesorado de aula con conocimiento en inclusión es todo un reto, ya que las universidades deberían realizar modificaciones en los planes de estudios de las pedagogías, donde se hiciera énfasis en contenidos transversales de inclusión y atención a la diversidad, y además ofertaran cursos de asignaturas complementarias en esta temática, pero lo más importante es que se logre entender que todos y todos los futuros docentes deben tener formación en inclusión o inclusión educativa.

REFERENCIAS

Alsina, Á., y Franco, J. (2020). Promoviendo la educación matemática inclusiva desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: el caso de las fracciones. *APEduC Journal: Research and Practices in Science, Mathematics and Technology Education*, *1*(2), 13-29.

Aké-Tec, L., Hernández, J., Ordaz-Arjona, M., Larios, J., y Parada, S. (2021). Formación de profesores de matemáticas: avances para promover aulas de matemáticas inclusivas. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 6(1), 1-21.*

Castro, C., y Torres, E. (2017). La educación matemática inclusiva: una experiencia en la formación de estudiantes para profesor. *Revista Infancias Imágenes*, *16*(2), 295-304. https://doi.org/10.14483/16579089.9953

Duk, C., y Murillo, F. (2018). El Mensaje de la Educación Inclusiva es Simple, pero su Puesta en Práctica es Compleja. *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva*, *12*(1), 11-13. https://doi.org/10.4067/S0718-73782018000100011

Echeita Sarrionandia, G. (2017). Educación inclusiva. Sonrisas y lágrimas. *Aula Abierta*, 46(2), 17-24. https://doi.org/10.17811/rifie.46.2.2017.17-24

Infante, M. (2010). Desafíos a la formación docente: inclusión educativa. *Estudios Pedagógicos, 36*(1), 287-297. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052010000100016

Infante, M., y Matus, C. (2009). Policies and practices on diversity: Reimagining possibilities for new discourses. *Disability and Society*, *24*(4), 437-445. http://dx.doi.org/10.1080/09687590902879049

Maestre M., Nail, O., y Rodríguez-Hidalgo, A. (2017). Desarrollo de competencias tic y para la educación inclusiva en la formación inicial práctica del profesorado. *Bordón: Revista De Pedagogía*, *69(3),57*-72. https://doi.org/10.13042/Bordon.2017.51110

Marchesi, Á. y Hernández, L. (2019). Cinco Dimensiones Claves para Avanzar en la Inclusión Educativa en Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva*, *13*(2), 45-56. https://doi.org/10.4067/S0718-73782019000200045

Muñoz, M., López, M., y Assaél, J. (2015). Concepciones docentes para responder a la diversidad: ¿Barreras o recursos para la inclusión educativa? *Psicoperspectivas, 14*(3), 68-79.

Olmos, A, Romo M. R., y. Arias L. M. C (2016). Reflexiones Docentes sobre Inclusión Educativa. Relatos de Experiencia Pedagógica sobre la Diversidad Universitaria. *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva, 10*(1), 229-243. https://dx.doi.org/10.4067/S071873782016000100012

San Martín, C., Villalobos, C., Muñoz, C., y Wyman, I. (2017) Formación inicial docente para la educación inclusiva. Análisis de tres programas chilenos de pedagogía en educación básica que incorporan la perspectiva de la educación inclusiva. *Calidad en la Educación,* (46), 20-52. http://doi.org/10.4067/S0718-45652017000100020

Slee, R. (2001). 'Inclusion in Practice': does practice make perfect? *Educational review*, *53*(2), 113-123. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00131910120055543

Tenorio, S. (2011). Formación inicial docente y necesidades educativas especiales. *Estudios Pedagógicos, 37*(2), 249-267. http://dx.doi.org/10.4067/s0718-07052011000200015

¿Y…DÓNDE ESTÁN LAS MATEMÁTICAS? EXPLORANDO LOS EFECTOS DE UNA UNIDAD STEM EN UN AULA MULTIGRADO

Angela Castro

Universidad Austral de Chile

angela.castro@uach.cl

Este estudio explora la forma en que un grupo de estudiantes multigrado visualiza las matemáticas presentes en una unidad STEM que promueve aprendizajes integrados de robótica, ciencias naturales y matemáticas. Bajo una metodología cualitativa exploratoria, se analiza el caso de 12 estudiantes multigrado de una escuela rural del Sur de Chile que participaron de la unidad. Como instrumento de recolección de datos, se consideraron las producciones de los estudiantes durante el desarrollo de la unidad y la implementación de un grupo focal al final de esta. Los datos se analizaron a través de un análisis de contenido. Los resultados sugieren que los estudiantes, logran reconocer y utilizar conceptos y procedimientos matemáticos abordados en la unidad reportando lo aprendido.

Educación STEM, Educación multigrado, Matemáticas.

EDUCACIÓN STEM Y EL AULA MULTIGRADO

La enseñanza multigrado tiene el desafío de garantizar experiencias auténticas y relevantes de aprendizaje que preparen a los niños para un futuro más prometedor (UNESCO, 2015), como las que se generan bajo un enfoque STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas, por sus siglas en inglés). La educación STEM se plantea como un enfoque educativo activo y multidisciplinario que remueve las barreras tradicionales de estas disciplinas y las integra al mundo real con experiencias rigurosas y relevantes, que promueven oportunidades para que los estudiantes fomenten su conciencia sobre cómo se combinan temas o dominios aparentemente no relacionados para resolver problemas (Castro et al., 2020; Chalmers et al., 2017). Sin embargo, este tipo de experiencias no siempre se promueven en todos los contextos educativos.

El aula multigrado, como espacio de encuentro y convivencia de niños de distintas edades, intereses, capacidades y grados de escolaridad; en muchas ocasiones dificulta la labor docente; y mucho más desde una perspectiva integrada (Castro et al., 2021). La literatura en el área evidencia un gran número de estudios que proporcionan evidencia del valor de la educación STEM en contextos formales de enseñanza tradicional para la motivación y el aprendizaje de los estudiantes (e.g., English y King, 2015; 2019). En este contexto, se ha destacado el potencial de la robótica educativa para la promoción de aprendizajes STEM desde los primeros años de escolaridad.

Los robots son objetos de gran interés para la educación STEM, no solo porque permiten abordar temáticas curriculares en las áreas de matemáticas, ciencias o tecnología y desarrollar habilidades del siglo XXI, sino que también porque forman parte de nuestra vida cotidiana y de las demandas de la sociedad del siglo XXI. Se han desarrollado diversas iniciativas que buscan explorar el potencial de la robótica educativa para la promoción de aprendizajes STEM (e.g., Bellas et al., 2019; Zhong y Xia, 2020). Sin embargo, se requiere investigación en el área que permita evaluar el efecto de este tipo de propuestas en contextos en los que se educan a niños de más de un nivel escolar a la vez (Castro et al., 2021; Jiménez et al., 2022). En este contexto, se presenta un estudio que busca explorar en qué

forma un grupo de estudiantes multigrado visualiza las matemáticas presentes en una unidad STEM que promueve aprendizajes integrados de robótica, ciencias naturales y matemáticas.

EL ESTUDIO

Método y participantes

Bajo una metodología cualitativa exploratoria, se analiza el caso de 12 estudiantes multigrado de 4º a 6º año básico de una escuela rural del Sur de Chile que participaron de una unidad STEM que promovió aprendizajes integrados de robótica, ciencias naturales y matemáticas. El grupo estaba compuesto por 8 mujeres y 4 hombres. Específicamente, por 3 alumnos de cuarto año, 3 alumnos de quinto año y 6 alumnos de sexto grado, con un rango de edad entre 9 y 13 años. Los estudiantes no tenían experiencia previa con robótica educativa.

Como instrumento de recolección de datos se consideraron las producciones de los estudiantes durante el desarrollo de la unidad y la implementación de grupo focal al final de esta. Los datos fueron analizados mediante un análisis de contenido inductivo (Braun y Clarke, 2006).

La experiencia

Con base en el marco para el diseño de unidades STEM integradas en contextos multigrado (Castro et al., 2021; Jiménez et al., 2022), se diseñó una unidad STEM que tuvo como objetivo construir un robot móvil que arrastrara objetos una determinada distancia. Para ello, se definió un desafío que involucraba el uso de la robótica, se identificaron grandes ideas STEM involucradas, sus componentes principales y se seleccionaron los aprendizajes a abordar en la unidad. Posteriormente, se reorganizaron los aprendizajes en torno a 4 tipos de actividades STEM: una actividad preliminar, que introducía a los estudiantes en el problema; una actividad central en la que se planteaba el desafío, actividades de exploración para profundizar en los temas involucrados en el desafío y dar respuesta al problema; y una actividad de consolidación y síntesis, que permitía conectar las ideas específicas desarrolladas y dar respuesta al desafío. Luego se establecieron desempeños esperados y actividades diferenciadas para cada nivel escolar y se elaboró una ruta de aprendizaje.

La unidad contempló seis sesiones de trabajo. En la primera de ellas, los estudiantes investigaron qué es un robot, sus componentes principales y sus usos. En la segunda sesión, exploraron los efectos de la aplicación de fuerzas para generar movimientos en distintos tipos de objetos, bosquejando el diseño de un robot tipo móvil que arrastrara objetos. En la tercera sesión, montaron y programaron su robot para avanzar una determinada distancia, explorando los efectos de la potencia del motor, dirección de giro y tiempo, en la distancia recorrida. En la tercera, cuarta y quinta sesión, los estudiantes exploraron los efectos de la fricción cuando modificamos la superficie de desplazamiento, la masa, y el volumen de la carga. Finalmente, en la sexta sesión, los estudiantes rediseñaron su robot mejorándolo con base en lo aprendido, justificando sus decisiones.

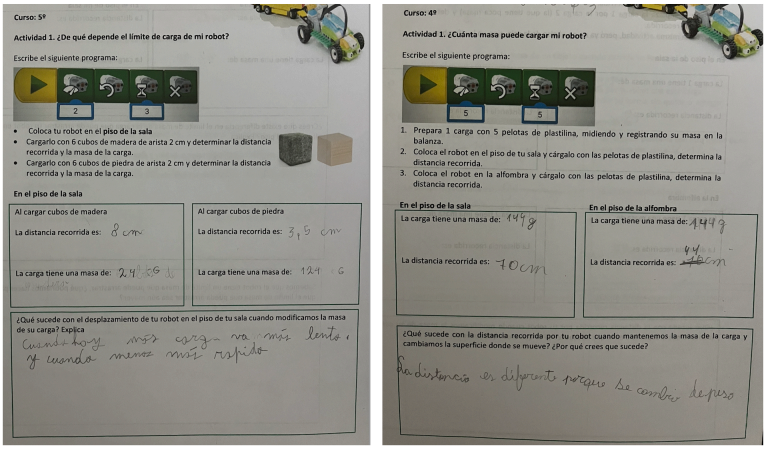
RESULTADOS

Los resultados sugieren que, tras la implementación de la unidad, los estudiantes logran visualizar conceptos y procedimientos asociados a la medición de magnitudes involucrados en la unidad, longitud, masa, volumen y tiempo, discriminando en qué situaciones utilizar cada una de ellas (ver Figura 1). En este caso, se observó que las matemáticas ofrecieron a los estudiantes una oportunidad

para comprender y explicar lo que estaba ocurriendo desde las otras áreas STEM involucradas, ofreciéndoles insumo para abordar el desafío presentado y tomar decisiones con fundamento para el rediseño de su prototipo, que le permitirán maximizar su capacidad de arrastre.

Figura 1.

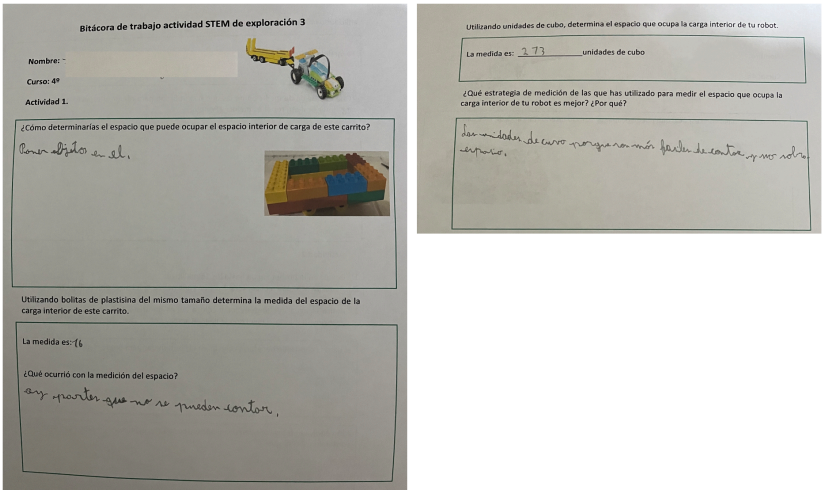
Bitácora trabajo 4º y 5º año sesión 4.



Las actividades desarrolladas durante la unidad también ofrecieron instancias para que los estudiantes reflexionar sobre la importancia de la medición de magnitudes y del uso de medidas estandarizadas (ver Figura 2).

Figura 2.

Bitácora trabajo 4º año sesión 5.



La visualización de los conceptos y procedimientos matemáticos abordados en la unidad también se evidenció en las percepciones de auto aprendizaje reportadas por los estudiantes en el grupo focal al finalizar la unidad. Así, por ejemplo, al preguntar a los estudiantes sobre aprendido durante la unidad, emergieron percepciones de conocimiento asociadas a la medición de masa, volumen y longitud, así

como el uso de unidades específicas, señalando por ejemplo haber aprendido: "*cómo medir el volumen", "la unidad cúbica", "longitud", "masa y volumen".*

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en este estudio sugieren que los estudiantes logran reconocer y utilizar conceptos y procedimientos matemáticos abordados en la unidad reportando lo aprendido. Al igual que en estudios similares realizados en contextos tradicionales de escolaridad (Bellas et al., 2019; Zhong y Xia, 2020), se visualiza el potencial de la robótica educativa para la promoción de aprendizajes STEM en varios grados escolares a la vez atendiendo la heterogeneidad del aula. Sin embargo, dadas las limitaciones del tamaño de la muestra y la falta de un grupo de control, los resultados de este estudio deben tomarse con cautela. En esta línea, se plantea la necesidad de seguir avanzando en el desarrollo de este tipo de experiencias en contextos en los que normalmente no se tiene acceso, para avanzar en el estudio de los efectos de la robótica educativa en las ganancias del aprendizaje matemático y científico en varios escolares a la vez.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación se enmarca en el proyecto FONDECY DE INICIACIÓN 11220143: "Explorando los efectos de un desarrollo profesional centrado en el diseño de unidades STEM que integran el proceso de diseño de ingeniería en contextos multigrado", financiado por la ANID.

REFERENCIAS

Bellas, F., Salgado, M., Blanco, T. F., y Duro, R. J. (2019). Robotics in primary school: a realistic mathematics approach. *In Smart Learning with Educational Robotics* (pp. 149-182). Springer, Cham.

Braun, V., y Clarke, V. (2006). Utilizando el análisis temático en psicología. *Investigación Cualitativa en Psicología, 3*(2), 77-101.

Castro, A., Iturbe, C., Jiménez, R., y Silva., R. (2020). ¿Educación STEM o en humanidades? Una reflexión en torno a la formación integral del ciudadano del siglo XXI. *Utopía y Praxis Latinoamericana, 25*(9), 197-208. https://doi.org/10.5281/zenodo.4110904

Castro, A., Jiménez, R., y Medina, J. (2021). Diseño de unidades STEM integradas: una propuesta para responder a los desafíos del aula multigrado. *Revista Científica, 42*(3), 339-352. https://doi.org/10.14483/23448350.17900

Chalmers, C., Carter, M., Cooper, T., y Nason, R. (2017). Implementing "big ideas" to advance the teaching and learning of Science, Technology, Engineering, and Mathematics (STEM). *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(1), 25-43. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9799-1

English, L. D., y King, D. T. (2015). STEM learning through engineering design: Fourth-grade students' investigations in aerospace. International Journal of STEM Education, 2(1), e14. https://doi.org/10.1186/s40594-015-0027-7

English, L., y King, D. (2019). STEM integration in sixth grade: Desligning and constructing paper bridges. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(5), 863-884. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9912-0

Jiménez, R., Medina, J., Castro, A., Chávez, D., y Castrelo, N. (2022). Valoración de docentes multigrado sobre un marco que orienta el diseño de unidades STEM integradas. *Revista Científica, 45*(3), 328-344.

UNESCO. (2015). *Practical Tips for Multigrade Teaching Classes. París: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization*. https://www.eenet.org.uk/resources/docs/ilfe/generic/Sp4.pdf

Zhong, B., y Xia, L. (2020). Systematic Review on Exploring the Potential of Educational Robotics in Mathematics Education, International *Journal of Science and Mathematics Education, 18*(1), 79-101. https://doi.org/10.1007/s10763-018-09939.

DETECCIÓN Y ATENCIÓN A ESTUDIANTES CON ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA, UN DESAFÍO PARA EL SISTEMA ESCOLAR CHILENO

Diego Alfonso Contreras Contreras

Universidad Católica Silva Henríquez

dcontreras@ucsh.cl

Cuando se habla de abordaje a la diversidad, encontramos diversos programas y estrategias gubernamentales enfocadas a la atención de estudiantes con dificultades del aprendizaje, dejando de lado a estudiantes que presentan habilidades por encima de la media. De esta manera, la detección y atención a estudiantes con alta capacidad matemática a través de su caracterización mediante la resolución de problemas, se convierte en un desafío para el sistema escolar chileno.

Diversidad, Detección, Atención, Alta capacidad matemática, Resolución de problemas.

INTRODUCCIÓN Y CONTEXTO

Desde hace algunos años, el sistema educativo chileno debe asegurar el derecho a la educación de las y los estudiantes de toda la comunidad educativa, trabajando sobre ello en dos puntos: la eliminación de la discriminación y el abordaje de la diversidad (Gobierno de Chile, 2015). En este sentido, se busca que cada establecimiento educacional promueva la inclusión de sus estudiantes utilizando diversas prácticas educativas que permitan reconocer la diversidad de estos, realizando un trabajo más pertinente a cada realidad, identidad, necesidad y motivaciones que puedan presentar estos estudiantes.

Si bien los programas y estrategias que se han implementado han sido exitosos para la atención de estudiantes con trastornos y dificultades del aprendizaje, no se han visto a nivel gubernamental programas que permitan atender a los estudiantes que presentan capacidades por encima de la media.

En particular, en el área de matemáticas, las Bases Curriculares de 7° básico a 2° medio (2015) del Ministerio de Educación, proponen que la asignatura se focalice en la resolución de problemas, poniendo énfasis en el desarrollo de un conjunto de habilidades, particularmente en el proceso de la búsqueda creativa de diversas soluciones a estos problemas. De esta manera, con estos antecedentes, es necesario abordar la diversidad en estudiantes con habilidades matemáticas por encima de la media, que no siempre son atendidos adecuadamente, los cuales llamaremos desde ahora estudiantes con alta capacidad matemática (ACM), los cuales en primer lugar deben ser identificados como tales.

IDENTIFICACIÓN DE ESTUDIANTES CON ACM

En relación con la detección de estudiantes con ACM, Jaime y Gutiérrez (2014) describen distintos modelos teóricos explicativos de la superdotación, características generales del talento y de la superdotación y características del talento matemático. En la identificación de características de ACM, autores como Krutetskii (1976), Greenes (1981), Miller (1990), Tourón y otros (1998) y Freiman (2006) han descrito diversas características que presentan los estudiantes con ACM, destacando particularmente para la resolución de problemas: la flexibilidad; la producción de ideas originales, valiosas y extensas; la construcción de nexos y estructuras matemáticas; el desarrollo de

estrategias eficientes; capacidad de abstracción; y la inversión de procesos mentales en el razonamiento matemático. Estas características se han convertido en los principales puntos a observar y medir en los estudios de detección de estudiantes con ACM mediante la resolución de problemas, llevando a los estudiantes que presentan estas características a desarrollar una mayor capacidad y rapidez al momento de resolver este tipo de tareas matemáticas.

En su estudio de evaluación del talento matemático en educación secundaria, Pasarín et al. (2004) y Benavides (2008) ponen de manifiesto que existe una baja relación en la caracterización de la ACM cuando se hace la comparación de los resultados de test psicométricos versus instrumentos basados en la resolución de problemas, mostrándose estos últimos como un mejor caracterizador de la ACM desde el punto de vista de las habilidades que proponen los currículos nacionales.

De la misma forma, hay investigaciones de enfoque didáctico sobre caracterización de estudiantes con ACM basadas en la resolución de problemas que han mostrado que en el proceso de resolución de problemas se pueden poner de manifiesto características propias de la ACM, en particular las relacionadas con la creatividad: flexibilidad, originalidad y fluidez (Leikin y Lev, 2013), pero también otras (Castro et al., 2006; Alsina et al., 2018).

UN DESAFÍO PARA EL SISTEMA ESCOLAR CHILENO

El encontrar las maneras de apoyar a los estudiantes que presentan gusto por las matemáticas, se convierte también en un desafío de apoyo a los profesores, entregándole las herramientas básicas necesarias para identificar y trabajar con este grupo, generando un verdadero abordaje a la diversidad en las aulas del sistema escolar chileno.

Finalmente, este nuevo desafío de detección y atención de estudiantes con ACM, pone de manifiesto la necesidad de generar instrumentos e instancias provenientes desde la educación y didáctica de la matemática, que sean pertinentes para trabajar y potenciar las habilidades y características de este grupo de estudiantes.

REFERENCIAS

Alsina, A., Andreu, C., y Acosta, Y. (2018). Diseño, construcción y validación de una rúbrica para la detección del talento matemático. *Revista de Educación Inclusiva, 11*(2), 139-158.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa* [Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España]. http://hdl.handle.net/10481/1827

Butto, C., Andrade, A., y Lanz, M. Y. (2016). Identificación de estudiantes con altas capacidades matemáticas en educación primaria. *Revista Horizontes Pedagógicos, 18*(2), 66-85.

Castro, E., Benavides, M., y Segovia, I. (2006). Cuestionario para caracterizar a niños con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. *Faisca: revista de altas capacidades, 11*(13), 4-22.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *3*(1), 51-75.

Gobierno de Chile (2015). Ley N° 20.845. *Diario Oficial de la República de Chile.* 29 de mayo de 2015.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Aritmetic Teacher, 28*(8), 14-17.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). PUV.

Krutetskii, V. A. (1969). *The psychology of mathematical abilities in school-children*. The University of Chicago Press.

Leikin, R., y Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: what makes the difference? *ZDM Mathematics Education, 45*, 183–197.

Miller, R. C. (1990). *Discovering mathematical talent*. ERIC.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2016). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio*. Autor.

Pasarín, M. J., Feijoo, M., Díaz, O., y Rodríguez Cao, L. (2004). Evaluación del talento matemático en educación secundaria. *Faisca. Revista de Altas Capacidades, 11*, 88-103.

Touron, J., Repáraz, C., Peralta, F., Gaviria, J. L., Fernández, R., Ramos, J. M., y Reyero, M. (1998). Identificación del talento verbal y matemático: descripción de un proyecto de validación. Texto para el Congreso Internacional: Respuestas educativas para alumnos superdotados y talentosos. Zaragoza. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2476232.pdf

OBJETOS MATEMÁTICOS INVOLUCRADOS EN LA PRÁCTICA DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA CUANDO UTILIZAN GEOMETRÍA DINÁMICA

Guadalupe Morales Ramírez

Universidad de Los Lagos

guadalupe.morales@ulagos.cl

Es conferencia, propone resaltar la importancia de los objetos matemáticos implicados en la práctica matemática de estudiantes de nivel medio cuando se utiliza el software de geometría dinámica, el uso coordinado de esta herramienta con el tipo de situaciones problemas conlleva a predecir un escenario de enseñanza, que debe ser considerado, para potenciar el aprendizaje de los estudiantes. Se da cuenta de la configuración epistémica y cognitiva de los objetos matemáticos, desde la mirada del Enfoque Ontosemiótico, sobre la práctica matemática que realizan los estudiantes. Además, se argumenta sobre orientaciones que el docente debiera considerar al incorporar la geometría dinámica en sus clases de matemáticas.

Geometría dinámica, Objetos matemáticos, Enfoque ontosemiótico, Educación media.

INTRODUCCIÓN

En el contexto educativo, la era digital ha traído nuevos desafíos, principalmente, el de cómo los estudiantes pueden desarrollar conocimientos a partir del uso de herramientas digitales. La importancia del uso de tecnologías digitales en las clases de matemáticas ha sido reconocida como agentes de cambio (Flores et al., 2021; Fortuny et al., 2010; Sandoval y Moreno-Armella, 2012), pues a partir de su uso el alumno es capaz de plantear conjeturas, conclusiones o transitar entre registros de representación (Lupiáñez y Moreno, 2001; Gamboa, 2007), lo que permite ampliar su conocimiento de los objetos matemáticos. Sin embargo, hay que notar que cada herramienta digital genera un campo de acción, que a su vez impone ciertas condiciones o restricciones que el alumno debe identificar, comprender y aprender a gestionar (Lagrange et al., 2003). En este sentido, la labor del profesor es parte fundamental para que los alumnos desarrollen habilidades y conocimientos sobre el uso de recursos digitales, pero también sobre los objetos matemáticos implicados, teniendo en cuenta que las tecnologías no se limitan al uso de sí mismas, sino que también conlleva a una

trayectoria de organización de ideas y creencias de lo que representan en el ambiente escolar (Moreno, 2017).

En la educación matemática la tecnología digital es esencial en el aprendizaje y la enseñanza; esta influye en la matemática que se enseña y potencia el aprendizaje de los alumnos, según el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000). Por tanto, el uso de las tecnologías digitales pueden ser un puente por el cual se podría ampliar o transformar los significados matemáticos, así como representar y acceder a los objetos matemáticos. Por otro lado, el currículo de educación básica y media sugieren que los docentes incorporen a su actividad matemática el uso de softwares o aplicaciones para presentar, representar, analizar y modelar información y situaciones, comunicar ideas y argumentos, comprender y resolver problemas de manera eficiente y efectiva. En este sentido, diversas investigaciones han hecho énfasis en el uso de la geometría dinámica como una herramienta potente que moviliza conocimientos tanto en la práctica del profesor como de los estudiantes.

Torres y Luna (2018) proponen la utilización de la geometría dinámica, particularmente GeoGebra, como recurso didáctico para la creación de problemas intra y extra-matemáticos, cuyo papel del software en este estudio fue apoyar la simulación de construcciones y el esbozo de representaciones geométricas, de donde emergieron conceptos como: distancia, mediatriz, segmentos, circuncentro, entre otros. Costa y Sombra (2017) señalan que el software de GeoGebra se caracteriza por tener herramientas autónomas que no requieren un estudio previo de estas; sin embargo, es necesario conocer los conceptos y propiedades para llevar a cabo una adecuada construcción geometría. En un ambiente de geometría dinámica es relevante conocer a qué nos referimos con "*construcción adecuada*", en la realización de construcciones geométricas es relevante tener en cuenta la herramienta de *arrastre* que permite la exploración sobre el comportamiento de la figura construida, al aplicar dicha herramienta sobre la construcción esta debe mantenerse invariante, es decir, poder reconocer relaciones dependientes e independientes que permiten distinguir si la construcción es una figura o un dibujo (Salinas y Sánchez, 2007). En este escenario, nos hemos planteado el problema en los siguientes términos ¿cuáles son los conceptos que emergen en la práctica de estudiantes cuando utilizan geometría dinámica? ¿qué procedimientos y propiedades se ponen en juego en la práctica de estudiantes que utilizan la geometría dinámica? ¿qué argumentos y lenguaje manifiestan los estudiantes en actividades que involucran la geometría dinámica? Nuestro objetivo es analizar la práctica matemática de estudiantes de nivel medio cuando utilizan el GeoGebra, a partir de la configuración de objetos matemáticos que propone el enfoque ontosemiótico (EOS) (Font y Godino, 2006).

LA GEOMETRÍA DINÁMICA Y SU RELACIÓN CON LA PERCEPCIÓN

La geometría dinámica es conocida como un instrumento semiótico que muestra la relación entre lo representado y el representante (Guzmán, 1998; Radford, 2006), además, da cabida a un escenario de exploración y visualización que no es factible a lápiz y papel. Desde la perspectiva de Guzmán (2009) la enseñanza de la geometría debe darse desde tres perspectivas: la visualización, la construcción y la deducción. Aquí hacemos énfasis en la visualización como un proceso matemático cognitivo que pone en juego la intuición geométrica, dado que se apoya de la percepción y su relación con el mundo que nos rodea (Duval, 2016). Esto se puede identificar en la actividad geométrica que desarrollan los estudiantes cuando asocien las representaciones geométricas de las figuras con su entorno o contexto

de la vida real, es decir, evocan formas a primer golpe de vista, dejando en evidencia una aprehensión perceptiva, sin nada más que ver (Guzmán, 2009).

Por otra parte, es importante resaltar que en el contexto geométrico la noción de dibujar y construir requiere de la movilización de habilidades diferentes, la reproducción de un dibujo requiere la imagen mental de una figura para poder realizarla a mano alzada y sin ningún instrumento. Mientras que la construcción corresponde al uso de instrumentos y propiedades (Sandoval y Moreno, 2012). Una construcción geométrica preserva propiedades bajo la herramienta de arrastre en la geometría dinámica, pues la herramienta permite reconocer la estructura ideal de la figura geométrica. Sin embargo, la percepción involucrada en la resolución de problemas mediados por el uso de la geometría dinámica juega un rol fundamental en el proceso de visualización, pues es común que los alumnos apliquen herramientas como comúnmente lo harían a lápiz y papel, sin tomar en cuenta que los comandos que rigen la geometría dinámica implican un bagaje de conceptos y propiedades matemáticas que deben ser consideradas en cualquier construcción geométrica (Sandoval, 2009; Mariotti, 2009). Por lo que, para movilizar la visualización no es suficiente utilizar la representación de una figura geométrica, pues es necesario proponer problemas o actividades que establezcan una sinergia entre la figura y la tarea geométrica con alta demanda cognitiva.

OBJETOS MATEMÁTICOS EMERGENTES EN LA PRÁCTICA MATEMÁTICA

La teoría del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino et al., 2007), considera una serie de herramientas teórico metodológicas que responden a principios epistemológicos, ontológicos y semióticos-cognitivos involucrados en proceso de instrucción matemática. Aquí se pone atención en la herramienta de la configuración de objetos matemáticos que se involucran en la práctica matemática. Estos objetos matemáticos se les conoce en el EOS como los elementos primarios que componen la configuración ontosemiótica, mismos que se relacionan entre sí, los cuales son: 1) elementos lingüísticos que refiere al tipo de lenguaje que se involucra cuando el estudiante resuelve un problema y utiliza la geometría dinámica, por ejemplo, de manera verbal, gráfico, simbólico o icónico; 2) conceptos; 3) procedimientos; 4) propiedades intervinientes y emergentes durante la solución de un problema, 5) argumentos que justifican los procedimientos a través del uso de propiedades, conceptos y/o definiciones. De esta manera, se permite tener un panorama detallado de las prácticas matemáticas que desarrollan los estudiantes, las cuales define el EOS como aquellas acciones (operativas) realizadas por un individuo durante la resolución de un problema matemático y las comunicaciones (discursivas) que se hace de la solución, con el fin de validar y generalizar en otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). Cuando analizamos la práctica matemática utilizamos la configuración epistémica para identificar a priori los objetos matemáticos y la cognitiva para identificar a posteriori la red de objetos matemáticos que están involucrados en la práctica de estudiantes que utilizan la geometría dinámica.

RESULTADOS

En este estudio se pone atención en las prácticas que desarrollan los estudiantes del nivel medio en una secuencia de actividades mediante el uso del software de geometría dinámica *GeoGebra.* En primer lugar, se describe brevemente la actividad relacionada con la construcción del teselado regular, cabe señalar que se consideraron actividades previas a esta, la cuales fueron fundamentales para asegurar parte de los conocimientos previos. En segundo lugar, y por cuestiones de espacio, solo se

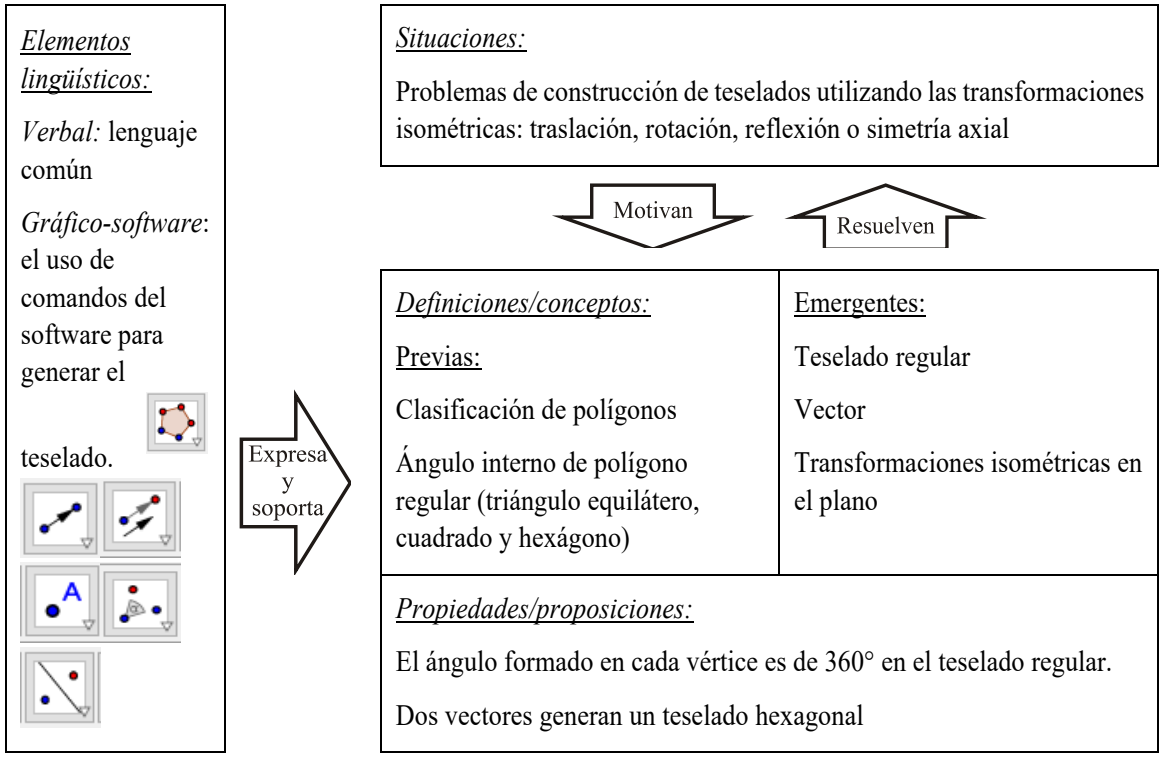
muestra la configuración epistémica asociada a la solución experta de la actividad que estuvo centrada en la construcción de teselados regular con el apoyo del *GeoGebra*. Finalmente, se resaltan orientaciones que el docente debiera considerar al momento de incorporar la geometría dinámica en sus clases de matemáticas.

Actividad: Construcción de teselados regulares mediante el uso del GeoGebra

La actividad se centró en promover la construcción de teselados regulares cuyo principal objeto matemático movilizado fueron las transformaciones isométricas (reflexión, rotación y traslación), mismos que son comandos del software *GeoGebra*. Este diseño contempló el planteamiento del concepto de teselado o recubrimiento regular, con el fin de asegurar que los alumnos tuvieran noción de este. Las primeras cuatro situaciones problema, se les pide a los alumnos que; 1) proponga polígonos con los cuales podría construir un teselado regular, 2) justifique qué polígonos regulares sirven para construir un teselado regular, 3) determine qué transformaciones isométricas utilizaría para generar el teselado regular aplicando herramientas del *GeoGebra*, 4) identifique cuál es el valor de la suma de las medidas de ángulos en cada vértice de un teselado regular. En el resto de las preguntas se pide a los alumnos construir y justificar los teselados al usar cuadrados, triángulos y hexágonos regulares. Es importante mencionar que se consideraron actividades previas para que los estudiantes relacionaran conceptos y propiedades que los llevara a realizar la construcción correcta del teselado. A modo de ejemplo, se muestra solo la configuración epistémica asociada a la red objetos matemáticos intervienes y emergentes en la actividad a partir de la solución experta.

Figura 1.

Configuración epistémica sobre la construcción de teselados regulares



Gráfico/geométrico:
Representación de teselados regulares en el *GeoGebra*.

Regulan el uso

El cuadrado y el triángulo equilátero son los únicos polígonos que permiten formar un teselado regular.

Procedimientos:

Previos (matemáticos):

Cálculo de la suma de la medida de ángulos que concurren en cada vértice del teselado es 360°.

Transformaciones isométricas (traslación, rotación y reflexión) como operaciones geométricas que permiten transformar una figura a partir de una previa.

Emergentes (matemáticos):

La construcción del teselado regular a través de traslación, rotación y simetría axial.

Previos (software):

Uso de comandos de software *GeoGebra* para la construcción de un teselado con triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos

Uso de sugerencias sobre comandos para construcción de los teselados

Emergentes (software):

Construcción de teselados regulares usando herramientas del Software *GeoGebra*.

Justifican

Argumentos:

La suma de la medida de los ángulos interiores que concurren en cualquier vértice es 360°, dado que cada ángulo interior del hexágono mide 120°, ya que en cada vértice confluye tres hexágonos regulares.

Explicitar el protocolo de construcción en el GeoGebra en término de los usos de sus herramientas.

Fuente: Elaboración propia.

CONCLUSIONES

Este estudio nos permite tener referencia de los objetos matemáticos que movilizan los estudiantes cuando resuelven situaciones en el contexto geométrico, mediante la aplicación de la geometría dinámica. Este estudio pone en evidencia el proceso discursivo que utilizan los alumnos a partir de la

percepción que tienen al visualizar los distintos comandos del software GeoGebra y cómo estás son fundamentales para llevar a cabo las construcciones, lo que llevó a los estudiantes a manifestar argumentos utilizando un lenguaje informal (Morales et al., 2021). Cabe resaltar que las respuestas fueron dadas en términos de la aplicación de las herramientas del software; por ejemplo, afirmaron que: con cualquier polígono regular se podría formar un teselado, de tal manera que estos se "acoplaran perfectamente", lo que deja entre ver que la percepción visual juega un papel relevante en el desarrollo de la construcción, pero no en la argumentación del proceso de construcción.

Entonces, hemos de señalar que es pertinente considerar que la enseñanza de la matemática que incorpora el uso de la geometría dinámica debe prever los objetos matemáticos previos involucrados y aquellos que emergen al aplicar algún comando dicha herramienta. Esto con el fin de guiar al alumno lo suficiente en el proceso de razonamiento geométrico y como consecuencia establezca la sinergia entre la visualización y el lenguaje geométrico involucrado en su práctica operativa y discursiva.

REFERENCIAS

Araya, R. G. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 2(3). 11-44.

Costa, V. A., y Río, L. S. D. (2019). Aportes de la Geometría Dinámica al estudio de la noción de función a partir de un problema geométrico: un análisis praxeológico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*, 67-87.

Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En R. Duval y A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 13-60). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Flores Cuevas, F., Vásquez Martínez, C. R., y González González, F. A. (2021). El uso de las TIC en la enseñanza de conceptos geométricos en la educación básica. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, *12*(23). .https://doi.org/10.23913/ride.v12i23.1024

Font, V., y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*. *8*(1). 67-98.

Fortuny, J.M., Iranzo, N., y Morera, L. (2010). Geometría y tecnología. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XIV (pp. 69-85). SEIEM.

Godino, J., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2),127-135.

Guzmán, R. I. (2009). Actividades geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo. *UNIÓN-Revista iberoamericana de educación matemática*, *5*(19), 22-33.

Guzmán, R., I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *RELIME, 1*(1), 5-21.

Lagrange, B., Artigue, M., Laborde, C., y Trouche, L. (2003). Technology and mathematics education: a multidimensional study of the evolution of research and innovation. En A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and F.K.S. Leung (Eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 239–271). Kluwer Academic Publishers.

Lupiáñez, J., y Moreno, L. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En Gómez, P.; Rico, L. (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 291-300). Editorial Universidad de Granada.

Mariotti, A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher. *ZDM*, *41*(4). 427-440.

Morales, G., Rubio, N., y Larios, V. (2021). Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *35*(70), 664-689.

Moreno, H. (2017). Encrucijada del discurso matemático escolar contemporáneo: conocimientos profesionales del profesor, tecnologías digitales y prácticas socioculturales. En L. Hernández, y J. Slisko (Ed.), *Avances en la educación matemática basada en la investigación*. (Primera edición). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP).

National of Council Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles standards for school mathematics*. Autor.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* (Número especial), 103-129.

Sánchez, E., y Salinas, J. (2007). *Identificación de propiedades y relaciones en un ambiente de geometría dinámica.* En M. Camacho, P. Flores y M. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática XI* (pp. 343-354). SEIEM.

Sandoval I. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación matemática*, *21* (1), 5-27.

Sandoval, I. y Moreno-Armella, L. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: Retos para la educación. *Horizontes Pedagógicos*, *14*(1), 21-29.

Torres, C., y Valenzuela, M. (2018). Creación de problemas matemáticos utilizando geometría dinámica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *31*(2), 1901-1908.

Reportes de Investigación

ESTUDIO DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS PROPUESTO POR PROFESORES: EL CAMINO HACIA EL DESARROLLO DE PENSAMIENTO CRÍTICO

Fabiola Arévalo-Meneses

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

fabiola.arevalo@pucv.cl

Esta investigación muestra los resultados de un estudio cuyo objetivo fue identificar el nivel de lectura de gráficos estadísticos presentes en las preguntas propuestas por docentes de educación matemática en Chile, ante un gráfico que presenta datos de contextos contingentes (pandemia por COVID-19) y otro de datos descontextualizados (recolección de latas). Los datos fueron analizados utilizando como categorías los niveles de lectura de gráficos estadísticos propuestos por Curcio. Se observa como tendencia la elaboración de preguntas que abordan niveles básicos de lectura de gráficos estadísticos, lo que reafirma la importancia que adquiere el contexto en el estudio estadístico para la formación de ciudadanos críticos en una sociedad en constante cambio.

Educación estadística, Formación de profesores, Gráficos estadísticos, Pensamiento crítico, Educación en contextos contingentes.

INTRODUCCIÓN

Actualmente estamos viviendo un periodo de contingencias como la reciente pandemia por COVID-19 y el estallido social en Chile. En este contexto, los distintos medios de comunicación nos entregan constantemente información, ante la cual, de manera espontánea adquirimos una visión y una percepción específica, nos formamos ideas, opiniones, juicios de valor ante la temática en cuestión. De esta manera, cobra especial importancia la interpretación y validación de información, interpelándonos como ciudadanos.

El Ministerio de Educación (MINEDUC, 2016) a través del eje de Probabilidades y Estadística, pretende que los y las estudiantes sean capaces de realizar análisis, inferencias y obtener información a partir de datos estadísticos, con el fin de formar estudiantes críticos que puedan utilizar la información para validar sus opiniones y decisiones, determinar situaciones conflictivas producto de interpretaciones erróneas de un gráfico y posibles manipulaciones de datos (MINEDUC, 2016). En este mismo sentido, el pensamiento crítico es una de las habilidades del siglo XXI que permite discriminar entre información, evaluando su contenido, pertinencia y validez, así como, reflexionar críticamente acerca de diferentes puntos de vista sobre la base de evidencias (MINEDUC, 2020). De este modo, el desarrollo del pensamiento crítico se transforma en un desafío para la educación matemática y estadística, el que puede potenciarse desde la alfabetización estadística. Ante esto, los gráficos estadísticos cumplen un rol importante, como instrumentos para la organización y presentación de datos (Arteaga et al., 2011). Pero ¿cómo se abordan los gráficos estadísticos en el aula?, ¿los profesores poseen la formación estadística que les permita abordar de manera óptima esta tarea?

Diversas investigaciones dan cuenta de una escasa comprensión gráfica por parte de futuros profesores de primaria (Contreras et al., 2017); errores y dificultades frecuentes en la construcción de

histogramas (Espinel, 2007) y un bajo desempeño en la lectura interpretativa de gráficos estadísticos en profesores de primaria y sus estudiantes (Estrella et al., 2015). Por otra parte, en contexto de pandemia por COVID-19, Vásquez (2021) observó niveles iniciales de lectura de gráficos en preguntas de futuros profesores de primaria. En el mismo contexto, Alsina et al. (2020) declaran la importancia de considerar temáticas contextuales que aporten significado al estudio estadístico.

Los antecedentes revelan un escenario complejo, interesante de investigar, para lo cual el objetivo de este estudio es indagar en los niveles de lectura de gráficos estadísticos presentes en preguntas elaboradas por profesores y dirigidas a sus estudiantes para el estudio de gráficos de barras estadísticos. Además, de identificar si la temática relacionada con los datos del gráfico, inciden en las preguntas que realizan.

MARCO TEÓRICO

La base de esta investigación radica en el análisis de los niveles de lectura e interpretación de gráficos estadísticos de Curcio (1989), quien define 3 niveles: L1: *Leer los datos*: cuando se realiza una lectura literal de algún dato representado en el gráfico estadístico. L2: *Leer dentro de los datos*: cuando se realiza una lectura de un dato del gráfico que no se encuentra de forma explícita en él, y que requiere alguna operación matemática (adición, promedio, etc.) para encontrarlo. L3: *Leer más allá de los datos*: cuando se obtiene una información que no se presenta directamente en el gráfico, y no es posible encontrarla por medio de cálculos u operaciones, infiriendo dicho dato. Posteriormente, Friel et al. (2001) ampliaron lo propuesto por Curcio (1989) agregando un nuevo nivel, L4: *Leer detrás de los datos*: cuando se realiza una valoración crítica de la información presentada en el gráfico estadístico, sobre la recogida de datos, su organización o las conclusiones. Además, del conocimiento del contexto en el que se extrae los datos del gráfico.

Con base en estos niveles de lectura planteados por Curcio (1989) y Friel et al. (2001), se analizará el enfoque de las preguntas realizadas por docentes de matemática sobre gráficos estadísticos.

METODOLOGÍA

La investigación se realiza mediante una metodología de tipo cualitativa (Hernández et al., 2014). A través del análisis de contenido (Krippendorff, 2013) se busca indagar en las preguntas que proponen profesores de Educación Matemática, dirigidas a sus estudiantes, para el estudio de dos gráficos de barras estadísticos propuestos.

Caracterización de los sujetos de estudio

Los sujetos de estudio son docentes de enseñanza de la Matemática en ejercicio en establecimientos escolares de la quinta región de Valparaíso, Chile. En total, 22 docentes respondieron el instrumento, entre los que se encuentran profesores cuya formación inicial es profesor de educación primaria y profesores de pedagogía en Matemáticas.

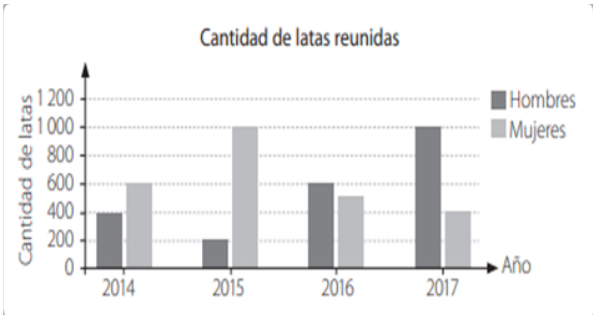
Diseño del instrumento

El instrumento que se utilizó para recoger los datos fue un formulario, el cual por la contingencia (pandemia COVID-19), se tuvo que realizar de manera online por medio de la plataforma Google, a través de la cual se buscó caracterizar a los sujetos de acuerdo con su formación inicial y los años de experiencia que poseen en el sistema escolar. Posteriormente, se les presentó dos gráficos de barras

con la finalidad de conocer qué tipo de preguntas dirigidas a sus estudiantes realizarían en relación a estos. El primer gráfico (G1) presenta información sobre la cantidad de latas recolectadas por una comunidad, desde el año 2014 al año 2017 (ver Figura 1).

Figura 1.

Gráfico 1 (G1), cantidad de latas reunidas por una comunidad.

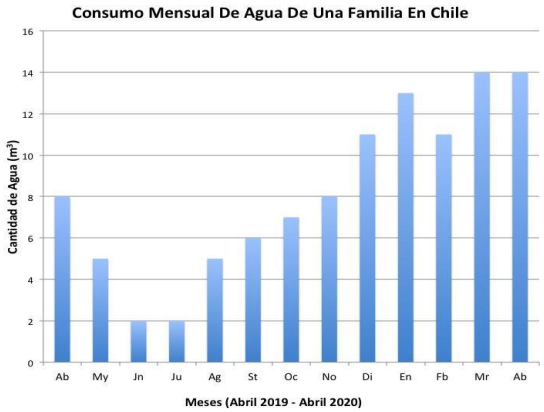


Fuente: Tomado de www.curriculumnacional.mineduc.cl.

El segundo gráfico G2 corresponde a una boleta de consumo de agua de un hogar ubicado en la quinta región de Valparaíso, en el periodo abril de 2019 a abril de 2020 (ver Figura 2), periodo de tiempo que Chile entra en estado de emergencia sanitaria por COVID-19 (marzo del año 2020). Ahora bien, el gráfico se presenta sin indicar las posibles causas del aumento en el consumo de los últimos meses. El propósito es no interferir en las interpretaciones y el sentido que el profesor puede dar a la información que entrega el gráfico, lo que puede verse reflejado en las preguntas que elabora para sus estudiantes.

Figura 2.

Gráfico 2 (G2), consumo mensual de agua de una familia en Chile.



Fuente: Tomado de *boleta Esval.*

Recogida de datos

Dadas las medidas de seguridad en el marco de la crisis sanitaria por COVID-19, se envió un formulario vía correo electrónico. Esto permitió contar de forma inmediata con los datos una vez que

los profesores respondieran el cuestionario. De esta manera se obtuvieron un total de 116 preguntas (61 para el gráfico 1 y 55 para el gráfico 2) realizadas por 22 profesores. En cuanto a la formación inicial de los profesores, 6 son de formación Educación Básica y 16 de Pedagogía en Matemática. En cuanto a su experiencia laboral, 4 profesores tienen entre 0 y 3 años de experiencia, 6 profesores entre 3 y 7 años, 6 profesores entre 7 y 12 años, y 6 profesores más de 12 años de experiencia laboral.

Categorías de análisis

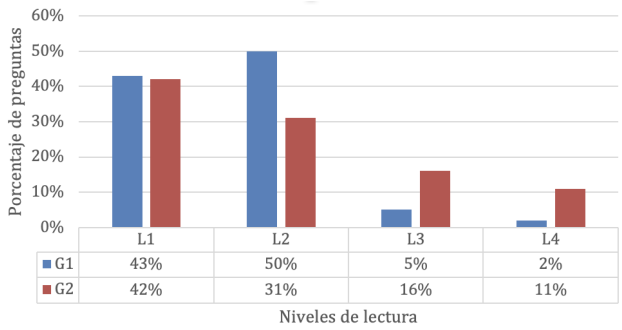
Considerando los niveles de lectura de gráficos propuestos por Friel et al. (2001), se definen las categorías de análisis para clasificar las preguntas realizadas por los profesores, de acuerdo con la intencionalidad que se puede apreciar en estas y lo que quieren motivar en el estudiante. Por razones de espacio no se muestra la tabla en que están definidas, pero se pueden revisar (Árevalo et al., 2021).

ANÁLISIS Y RESULTADOS

A partir de los datos obtenidos, en la Figura 3 se presentan los resultados en relación con las preguntas elaboradas sobre ambos gráficos, respecto de la formación inicial y de la experiencia docente.

Figura 3.

Clasificación de las preguntas por gráficos 1 (G1) y gráfico 2 (G2).



Fuente: Elaboración de autores.

Podemos observar que la mayoría de las preguntas elaboradas por los docentes se encuentran en el nivel L1 y L2 mientras que una cantidad significativamente menor se encuentra en el nivel L3 y L4, lo que concuerda con Contreras et al. (2017), Estrella et al. (2015) y Vásquez (2021). De acuerdo con el gráfico 1 (G1) y el gráfico 2 (G2), podemos notar que en los niveles L1 y L2 el 93% de las preguntas se concentra en G1, mientras que en G2 un 73%. Del mismo modo, en los niveles L3 y L4 existe diferencia entre los gráficos G1 (7%) y G2 (27%). Es decir, la mayoría de las preguntas de los niveles de lectura puntual de datos se presentan en el gráfico 1 (recolección de latas), mientras que los niveles de lectura que permiten hacer un análisis crítico de la información, y del contexto en que se presentan los datos, se concentran en el gráfico 2. Este gráfico hace referencia al consumo de agua que, en periodo de pandemia aumentó considerablemente en los hogares. Por tanto, presenta una temática de contingencia y gran interés. Podríamos decir que la elaboración de preguntas de los niveles que promueven un análisis crítico de la información (L3 y L4) se ve motivada, en parte, por los conocimientos adquiridos por el profesor de acuerdo a su propia experiencia personal. Un resultado particular fue el de la inexistencia de preguntas de nivel L4 en profesores cuya experiencia es de 12

o más años de experiencia, mientras que quienes más realizan pregunta de este nivel son aquellos con menor cantidad de años de experiencia, lo que podría estar relacionado con la formación inicial.

CONCLUSIÓN

En el estudio de gráficos estadísticos se consideran temáticas contextuales y contingentes que tengan sentido no solo para el estudiante, también para el profesor, se vuelve muy relevante, ya que promueven el análisis de información desde el pensamiento crítico, una de las habilidades del siglo XXI. De este modo, si bien promover el conocimiento disciplinar y didáctico de la estadística es uno de los desafíos en la formación de profesores, podemos decir que no es suficiente, pues el factor cultura adquiere protagonismo. Ambos, profesor y estudiante, están inmersos en un entorno sociocultural que es parte de su identidad, aspecto que se debe considerar de manera intencionada en el proceso de alfabetización estadística para la formación de ciudadanos críticos y efectivos en la sociedad actual.

REFERENCIAS

Alsina, Á., Vásquez, C., Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. *Épsilon-Revista de Educación Matemática*, *104*, 99–125.

Árevalo-Meneses, F., y Manzanares, J. (2021). Preguntas elaboradas por profesores para el estudio de gráficos estadísticos: Los niveles de lectura que se identifican en sus propuestas. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *13*(4), 200–208.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., y Contreras, M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números. Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, *76*, 55–67.

Contreras, J., Molina-Portillo, E., Godino, J. D., y Batanero, C. (2017). Construcción de un cuestionario para evaluar la interpretación crítica de gráficos estadísticos por futuros profesores. En J. M. Muñoz, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo, y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 207-216). SEIEM.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of Mathematical Relationships Expressed in Graphs. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(5), 382-393. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.18.5.0382

Espinel, M. C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. En M., Camacho, P., Flores, y M. P., Bolea. (Eds.), *Investigación en educación matemática XI* (pp. 99-120). SEIEM.

Estrella, S., Olfos, R., y Mena-Lorca, A. (2015). El conocimiento pedagógico del contenido de estadística en profesores de primaria. *Educação e Pesquisa, 41*(2), 477–493. https://doi.org/10.1590/s1517-97022015041858

Friel, S. N., Curcio, F. R., y Bright, G. W. (2001). Making Sense of Graphs. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124–158.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación*. Mc Graw Hill Education.

Krippendorff, K. (2013). *Content analysis: an introduction to its methodology*. SAGE Publications.

Minesterio de Educación de Chile [MINEDUC] (2015). *Bases Curriculares. 7º básico a 2º medio*. Autor.

Vásquez, C. (2021). Comprensión y uso docente de gráficos estadísticos por futuros profesores para promover competencias para la sostenibilidad. *Revista Paradigma*, *42*(Extra 1), 165-190.

ARGUMENTOS DE FUTUROS PROFESORES AL COMPARAR CONJUNTOS DE DATOS EN HISTOGRAMAS

Soledad Estrella, Maritza Méndez-Reina

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

soledad.estrella@pucv.cl, maritzamendez@pensadoresmatematicos.com

Desarrollar el pensamiento estadístico de los futuros profesores de matemáticas es crucial, puesto que serán los encargados de enseñar estadística en las aulas escolares. Una habilidad que debe promoverse en la formación de profesores es interpretar el comportamiento de los datos en diversas representaciones, entre ellas el histograma. Este estudio considera que el histograma relaciona varias ideas estadísticas fundamentales, tales como distribución, centralidad y variabilidad, que son claves en la comprensión de la inferencia estadística. Se presenta en este reporte, el análisis de los argumentos de futuros profesores en una tarea orientada a la comprensión de la variabilidad, en el contexto de comparación de las distribuciones de datos representados en histogramas. Aunque algunos futuros profesores mostraron interpretaciones correctas de los histogramas y expresaban conocimiento para interpretarlos, aún es un desafío en la formación inicial, su comprensión y aprendizaje. Se identifican algunas dificultades asociadas a la interpretación de los conceptos implícitos en un histograma y se realizan sugerencias a considerar en propuestas de enseñanza que promuevan en los futuros profesores el desarrollo del pensar estadístico.

Histograma, Argumentación, Pensamiento estadístico, Representaciones de datos, Formación inicial docente.

INTRODUCCIÓN

El pensamiento estadístico posibilita la toma de decisiones sobre fenómenos donde está presente la incertidumbre y facilita el establecimiento de inferencias en situaciones que intentamos prever atendiendo al comportamiento de los datos. Como parte de una alfabetización estadística de base, los ciudadanos requieren desarrollar habilidades de lectura e interpretación de datos que implican la comprensión de ideas claves en estadística (del Pino y Estrella, 2012; Estrella, 2017).

Desde GAISE (2016) se señalan recomendaciones para los docentes que enseñan estadística, entre las cuales se encuentran la enseñanza del pensamiento estadístico, las experiencias con el pensamiento multivariable, y el foco en la comprensión conceptual usando aspectos tecnológicos para explorar conceptos y analizar datos. Por tanto, en la formación de futuros profesores de matemáticas se requieren experiencias que les permitan enfrentarse críticamente a datos representados gráficamente, realizar análisis estadísticos, observar el comportamiento de los datos, detectar relaciones y patrones, generar predicciones, conjeturas y conclusiones de acuerdo con el contexto. Una representación gráfica que es ampliamente utilizada para analizar la distribución de datos de escala univariada es el histograma y, como señalan Boels et al. (2019), esta representación rara vez se define y aunque parece fácil de comprender, resulta difícil de interpretar, ya que en dicha representación se integran conceptos estadísticos de variada complejidad (Tauber, 2001). Algunas de estas dificultades fueron reportadas por Bruno y Espinel (2009) quienes estudiaron la construcción y evaluación de histogramas en la formación docente de primaria, y describieron cómo los futuros profesores tienden

a confundir histogramas con gráficos de barras, y asignan incorrectamente datos a lo largo de los ejes cartesianos, entre otras.

Consideramos que una actividad fundamental que promueve el razonamiento estadístico es la comparación de grupos (Konold y Higgins, 2003). Por ello, la comparación de dos histogramas permitiría desafiar el pensamiento de los estudiantes al requerir conectar la red de conceptos implícitos en un histograma, y al construir argumentos en torno a ellos.

MARCO CONCEPTUAL

La necesidad de construir una representación de datos como el histograma implica conocer el tipo de variable estadística asociada, esto es, una variable cuantitativa, cuyos valores son demasiado numerosos para representarse individualmente en un gráfico, los que se agrupan en clases contiguas que constituyen una partición de un intervalo limitado cerrado en $\mathbb{R}$. La elección de las clases, su número y ancho, no es unívoca. Para cada clase, se construye un rectángulo con una longitud base igual al rango de valores en esa clase específica y una superficie proporcional al número de observaciones de esa clase. Al construir el histograma, el primer paso es "agrupar" el rango de valores de los datos, es decir, dividir todo el rango de valores en intervalos, y luego contar cuántos valores están en cada intervalo, esto es clasificar en intervalos. Así, un histograma divide el rango de valores posibles de la variable en un conjunto de datos en clases o grupos, que generalmente se especifican como intervalos consecutivos, no superpuestos de una variable, y usualmente presentan un mismo ancho (aunque no necesariamente). El eje horizontal del histograma muestra intervalos de datos agrupados de la variable cuantitativa continua sucesivamente; el eje vertical muestra porcentajes o decimales; la superficie de cada barra proporciona el porcentaje de todos los datos pertenecientes en el intervalo correspondiente (no tiene sentido reorganizar las barras de un histograma), y la suma de todas las superficies es igual a 1.

La presente investigación indaga en las argumentaciones que expresan futuros profesores de matemática en tareas de comparación de histogramas y los conceptos que utilizan al realizar interpretaciones correctas y erróneas. Para nuestro estudio, análisis de argumentos de futuros profesores, adaptamos la perspectiva de Isoda et al. (2018) quienes consideran nueve categorías (ver Tabla 1), sobre los argumentos de profesores que dan cuenta de la comprensión de la variabilidad, en el contexto de comparación de las distribuciones de datos representados en histogramas.

METODOLOGÍA

Muestra

La muestra estuvo formada por 17 futuros profesores (FP) de matemática que realizarán clases en educación secundaria, ellos estaban en formación inicial de una universidad chilena, y habían cursado dos asignaturas de la disciplina Estadística. Los datos se recolectaron como parte de una actividad evaluada, en la asignatura de quinto semestre de Didáctica de la Estadística.

Tarea

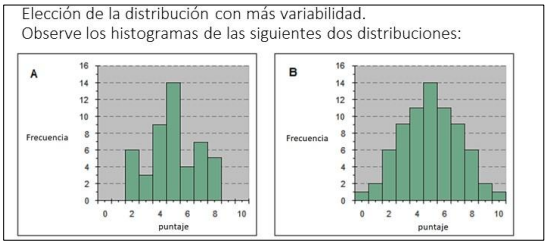
Se consideró una tarea que emplea una dupla de histogramas que representan pares de conjuntos de datos que deben ser comparados de acuerdo con los atributos de las distribuciones. Esta se denomina "Eligiendo la distribución con más variabilidad", y requiere comparar la variabilidad de los puntajes

de los exámenes en dos cursos (A y B), presentados en histogramas (ver Figura 1). Esta tarea es propuesta por Lee y Meletiou (2003) y adaptada por González (2014).

Los estudiantes debían determinar cuál de los dos grupos de puntajes tenía mayor variabilidad. La pregunta solicita analizar, como docente las respuestas que dan tres estudiantes, enfocándose en si la respuesta entregada es correcta o no, justificando dicha respuesta, y precisando qué razonamiento podrían haber usado esos estudiantes al responder.

Figura 1.

Tarea presentada a los FP para elegir la distribución con mayor variabilidad.



Procedimiento

Las autoras clasificaron los argumentos de los FP de forma independiente y luego por consenso. Los argumentos de los FP se clasificaron de acuerdo con las categorías propuestas por Isoda et al. (2018).

RESULTADOS

Los histogramas presentan distintos agrupamientos de los datos en torno a valores centrales y distinta simetría y variabilidad. En la Figura 1 se observa que la distribución B es la que presenta mayor variabilidad, aunque simétrica. La Tabla 1 muestra la categorización de los tipos de argumentos, el número de FP y el porcentaje de cada tipo de argumento.

Tabla 1.

Número de FP y porcentaje de cada tipo de argumento dado a la Tarea.

Categorías		Respuesta E1		Respuesta E2		Respuesta E3	
		No.	%	No.	%	No.	%
C0	Sin respuesta, «No sé», «ni idea»	1	5,9	0	0,0	1	5,9
C1	Distribución A, sin dar razón, sólo adivinando, o argumentando con ideas intuitivas.	2	11,8	2	11,8	2	11,8
C2	Distribución A, basada en un cálculo erróneo.	0	0	0	0	0	0
C3	Distribución A, basada en una interpretación inapropiada relacionada con la simetría o un mal ajuste a una distribución normal.	0	0	0	0	0	0
C4	Distribución A, basada en argumentos relacionados con las diferencias en las alturas de las barras (por ejemplo, «La distribución A es	1	5,9	0	0	1	5,9

	desigual»; «el número de alturas diferentes en A es mayor que en B»).						
C5	Distribución B, sin dar ninguna razón, sólo adivinar, o argumentando ideas intuitivas.	1	5,9	6	35,3	6	35,3
C6	Distribución B, por interpretación inapropiada (por ejemplo, «B tiene un alcance mayor en frecuencia que A», «B porque es simétrico», «B porque es normal», «B porque tiene más elementos»).	1	5,9	4	23,5	4	23,5
C7	Distribución B, basada en argumentos relacionados con el simple reconocimiento de la variabilidad (es decir, respuestas referidas únicamente a extremos o rangos de cada distribución; por ejemplo, «porque está más extendido»).	10	58,8	4	23,5	3	17,6
C8	Distribución B, basada en argumentos relacionados con el reconocimiento sofisticado de la variabilidad, más de C7 (es decir, respuestas que conectan ambos medios y extremos; por ejemplo, «porque las puntuaciones difieren más del centro»).	1	5,9	1	5,9	0	0,0
	Total	17	100,0	17	100,0	17	100,0

Entre 12% y 24% de los FP presentaron dificultades al comparar los histogramas respecto a su variabilidad y con los conceptos utilizados en sus interpretaciones, pues no lograron conectar las nociones de variabilidad sobre la elección de una distribución u otra. Además, no consideraron que el comportamiento simétrico de la distribución derivaba en una menor variabilidad, ignorando la necesidad de reconocer los valores extremos, el rango y la centralidad. Esto se relaciona con lo expuesto por Isoda et al. (2018), ya que los FP tienen dificultades para interpretar la variabilidad, enfocándose en las señales visuales del gráfico, y no en los valores de datos reales de las distribuciones, o bien, en la dispersión de los valores de datos, las medidas de tendencia y variación central, tendiendo a encajar simétricamente los histogramas a una distribución normal (con forma de campana, unimodal y simétrica).

Por definición, un histograma muestra la distribución de una variable estadística. En la tarea, los conceptos que se emplean para comparar la variabilidad en dos conjuntos de datos se orientan al reconocimiento de los valores extremos o los rangos de cada distribución (entre 59% y 18% de los FP), y en conectar de manera simultánea extremos, rango y centralidad (6% de los FP).

CONCLUSIONES

En la comparación de dos histogramas, los argumentos de los FP presentaron dificultades en el reconocimiento de la variabilidad y expresaron posibles falacias sobre histogramas (Garfield et al., 1999), incluyendo la creencia de que una distribución más desigual o menos simétrica, tiene mayor variabilidad. Corroborándose, que al interpretar gráficos los sujetos tienden a centrarse más en el eje

vertical que en el horizontal, pese a que al comparar la media de dos histogramas la escala del eje horizontal es esencial.

Los argumentos correctos de los FP, para el concepto de distribución asociado a variabilidad fluctúan entre 18% a 65%. Este resultado sugiere atender la complejidad en el aprendizaje de este concepto estadístico fundamental que engloba varios conceptos claves más. Ello implica mejorar la comprensión del significado del eje Y, entender que las superficies de los rectángulos en un histograma son proporcionales a las frecuencias o frecuencias relativas, y también, el rol del rectángulo central en cuanto a la simetría de la distribución y su variabilidad. Los argumentos entregados por los FP no se caracterizaron por el uso integrado de los conceptos dato, distribución, dispersión ni centralidad, y aún están en proceso de interpretar el histograma como una herramienta que les permite obtener mayor comprensión del comportamiento de los datos. Dados los argumentos incorrectos, parece sensato propender a que los FP tengan más experiencias de comparación de grupos con el uso de histogramas, que les permitan visualizar la forma de las distribuciones de datos de distintas variables y los significados de las escalas en los ejes de los histogramas.

AGRADECIMIENTOS

Al financiamiento de ANID Proyecto Fondecyt N° 1200346, VRIEA-PUCV 039.439/2021 y Beca Doctorado Nacional ANID 21210862.

REFERENCIAS

Boels, L., Bakker, A., Van Dooren, W., y Drijvers, P. (2019). Conceptual difficulties when interpreting histograms: A review. *Educational Research Review*, *28, 1-23*. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2019.100291

Bruno, A., y Espinel, M. C. (2009). Construction and evaluation of histograms in teacher training. *International journal of mathematical Education in Science and Technology, 40*(4), 473-493.

del Pino, G., y Estrella, S. (2012). Educación Estadística: relaciones con la matemática, *Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, Pensamiento Educativo, 49*(1), 53-64.

Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En A. Salcedo (Ed.), *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI* (pp. 173-194). Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación.

GAISE (2016). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education*. *College report*. American Statistical Association.

Garfield, J., del Mas, B., y Chance, B. L. (1999). *Tools for teaching and assessing statistical inference: Simulation software*. https://www.nsf.gov/awardsearch/showAward?AWD_ID=9752523

González, O. (2014). *Examining Venezuelan secondary school mathematics teachers' statistical knowledge for teaching: Focusing on the instruction of variability-related concepts.* [Tesis doctoral, Universidad de Hiroshima].

Isoda, M., Chitmun, S., y González, O. (2018). Japanese and Thai senior high school mathematics teachers' knowledge of variability. *Statistics Education Research Journal*, *17*(2), 196–215.

Konold, C., y Higgins, T. (2003). Reasoning about data. En J. Kilpatrick, W. G. Martin, y D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 193-215). National Council of Teachers of Mathematics.

Lee, C., y Meletiou, M. (2003). Some difficulties of learning histograms in introductory statistics. *Joint Statistical Meetings - Section on Statistical Education*. Disponible en: http://www.statlit.org/PDF/2003LeeASA.pdf

Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada].

CONCEPTUALIZACIÓN DE LAS NOCIONES TRIGONOMÉTRICAS SEN(X) Y COS(X) EN DOCENTES DE MATEMÁTICA DE EDUCACIÓN MEDIA

Teresa Ramos González

Universidad Alberto Hurtado

tere.ramos@gmail.com

Este trabajo tiene como objetivo caracterizar las conceptualizaciones de los profesores de matemática en servicio sobre las funciones trigonométricas sen(x) y cos(x), tal como se plantean en el currículum vigente en Chile. El diseño metodológico articuló las perspectivas Diseño Basado en la Investigación y Teoría de los Campos Conceptuales, considerando una muestra de 5 docentes. Las conclusiones muestran una tendencia a la memorización de valores y al uso de sistemas de representación numérico y gráfico (preferentemente triángulo rectángulo), aunque se logró un tránsito en la conceptualización y una reflexión crítica sobre las prácticas de enseñanza en el área de la trigonometría.

Trigonometría, Diseño basado en la investigación, Campos Conceptuales, Práctica Docente.

ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA

En Chile, la matemática escolar aborda las nociones asociadas a la trigonometría en el segundo año de educación media, las cuales se encuentran propuestas a través de dos Objetivos de Aprendizaje relacionados con la geometría del triángulo rectángulo (MINEDUC, 2016), es decir, se les da tratamiento como "razones trigonométricas en el triángulo rectángulo". Sin embargo, las nuevas bases curriculares, a contar del año 2021 integraron en 4º año de educación media el uso de modelos provenientes de diversas funciones (MINEDUC, 2021), entre ellas, las trigonométricas, poniendo el foco en los métodos de ajuste de datos a curvas.

Diversas investigaciones como la de Algarín y Fiallo (2013) señalan que la trigonometría es un tema que no se profundiza y del cual "no se presentan propuestas nuevas para afrontar el problema" en tanto que Montiel y Jácome (2012) proponen que existe una ambigüedad frecuente entre razón y función trigonométrica cuando se trabaja en el nivel medio superior, sustentándose en las producciones de una muestra de profesores mexicanos al resolver un problema de distancias inaccesibles. Sumado a lo anterior, Nokkaew et al. (2014) reportan el uso frecuente, en la enseñanza, de reglas nemotécnicas asociadas al triángulo rectángulo.

La enseñanza de la trigonometría desde el punto de vista tradicional, es decir, a partir de las razones que se desprenden entre los lados que componen un triángulo rectángulo y su consecuente aritmetización o algebrización, carece de la riqueza que presenta la articulación entre los distintos registros geométricos, gráficos y algebraicos. Así lo señala Olguín (2016), quien muestra que el aprendizaje significativo de las funciones trigonométricas se favorece con la articulación entre los registros algebraico y gráfico. Para reafirmar lo anterior, también se ha reportado que existe una escasa facilitación para que docentes y estudiantes puedan establecer las conexiones adecuadas entre los distintos componentes de los significados de las funciones trigonométricas (Martín et al., 2016).

A partir de lo anterior, se deprende entonces la necesidad de describir los tipos de conceptos y registros que utilizan los profesores que enseñan trigonometría. Es por esto, que la pregunta que guía

esta investigación es ¿Cuáles son las concepciones de los profesores de matemática en servicio, que atienden estudiantes de 15-18 años, sobre las funciones trigonométricas sen(x) y cos(x) y cómo reflejan la manera que está planteado en el currículum escolar nacional?

Objetivo General

Caracterizar las conceptualizaciones de los profesores de matemática en servicio que atienden estudiantes de 15-18 años, sobre las funciones trigonométricas sen(x) y cos(x) con relación a la manera en que están planteadas en el currículum nacional.

Objetivos Específicos

1. Categorizar los invariantes operatorios presentes en los docentes sobre los conceptos de seno y coseno.
2. Describir los patrones encontrados en los invariantes operatorios presentes en los docentes al resolver problemas sobre sen(x) y cos(x).
3. Replantear las decisiones de los docentes participantes en sus prácticas de enseñanza y la manera que están planteados los objetivos de aprendizaje relativos a la trigonometría en el currículum nacional.

MARCO REFERENCIAL Y METODOLÓGICO

Teoría de los Campos Conceptuales de Gerard Vergnaud (1990)

Como marco teórico se trabajará con la Teoría de los Campos Conceptuales, en adelante TCC, de Gerard Vergnaud (1990), con el fin de categorizar las producciones de los docentes de la muestra al resolver problemas de sen(x) y cos(x).

Un campo conceptual es definido como un conjunto de situaciones y un conjunto de conceptos entrelazados entre sí cuyo tratamiento requiere conceptos, procedimientos y representaciones de tipos diferentes, pero íntimamente relacionados entre sí. El significado de un concepto no se define desde una sola situación, sino que de un conjunto de ellas y recíprocamente, una situación no puede ser analizada con un solo concepto, sino que, con varios conceptos, los cuales determinan un sistema (Vergnaud, 2009). En la TCC, se definen los esquemas como "Organización invariante de la conducta para una clase de situación dada" (Vergnaud, 1990). Aquí se llaman a los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria, es decir, sus conocimientos y su repertorio. Está relacionado con las competencias que ha desarrollado el sujeto. Todo esquema es relativo a una clase de situaciones.

Asimismo, cuando el aprendiz enfrenta una situación, debe acudir a decisiones conscientes que le permitan organizar las variables particulares de la situación. Tales son los llamados Invariantes operatorios constituidos por conceptos en acto y teoremas en acto. El reconocimiento de invariantes operatorios es la clave de la adquisición de esquemas. Por lo tanto, en esta investigación se enfocará a ubicar y categorizar tales invariantes operatorios que se desprenden de las producciones de los docentes de la muestra al enfrentar situaciones que involucran las nociones de sen(x) y cos(x).

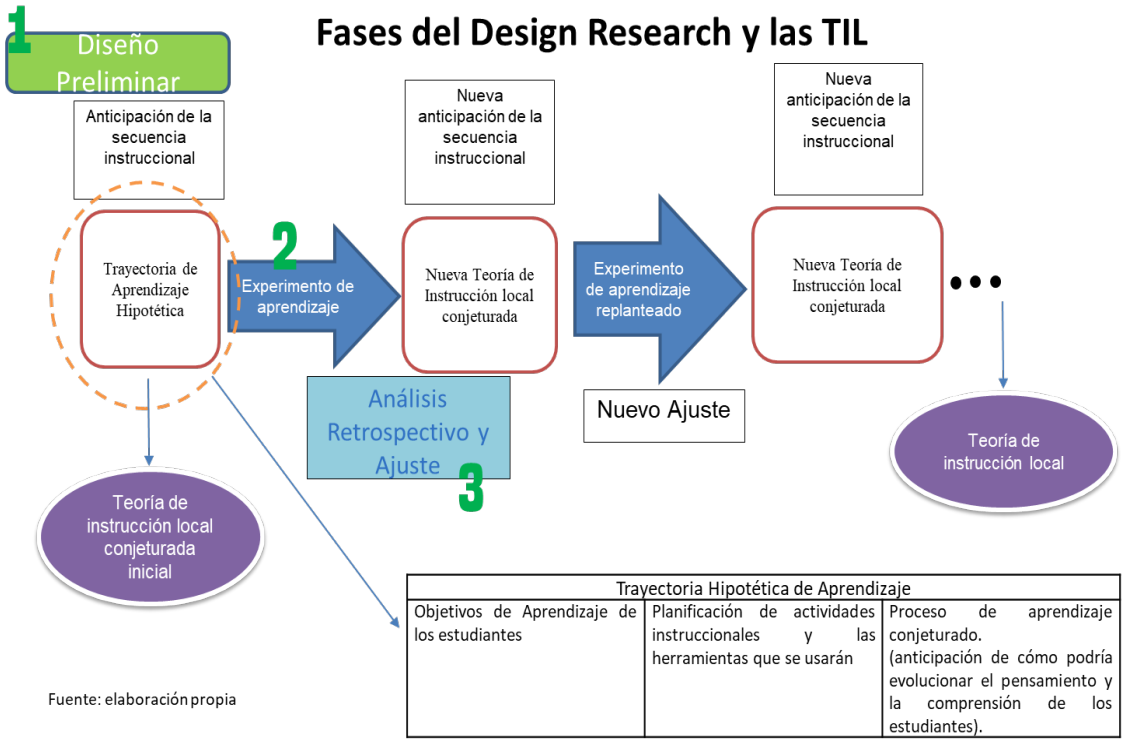
Enfoque de estudio: *Design Research* (Investigación Basada en el Diseño)

El enfoque Design Research permite diseñar y rediseñar procesos de enseñanza y aprendizaje, donde el desarrollo de la teoría ocurre a través de experimentos de enseñanza que permiten ir mejorando las

actividades instruccionales de una clase en particular. El objetivo del Design Research está puesto en desarrollar una Teoría de Instrucción Local (TIL), que sea intervencionista y que además tenga componentes que permitan la reflexión y la retrospección por parte del docente y/o del investigador para poder realizar los ajustes pertinentes a partir de los resultados de aprendizaje del proceso de enseñanza aplicado. El siguiente diagrama muestra el Ciclo de aplicación.

Figura 1.

Fases del Design Research y las TIL.



Fuente: elaboración propia

En el caso de la presente investigación, la recolección de los datos se realizará a través de un instrumento diseñado según los principios de la TIL, organizando las situaciones que deben enfrentar los docentes de la muestra considerando que sus respuestas serán analizadas desde la TCC y que deben mostrar la manera en que se proponen de acuerdo con el currículum escolar nacional. Para esto, se formularán varias situaciones problemáticas donde los docentes deberán poner en acto sus invariantes operatorios para resolver problemas estructurados en cinco fases:

1. Definición a priori de los conceptos de sen(x) y cos(x).
2. Determinación de valores de sen(x) y cos(x) para ángulos entre 0 y 90º.
3. Determinación de valores de sen y cos de ángulos fuera del triángulo rectángulo (mayores a 90º), con el fin de analizar las producciones de los docentes para encontrar estos valores. El conflicto cognitivo que se generará está en directa relación a la búsqueda de nuevas herramientas que no se encuentren enmarcadas en el triángulo rectángulo, como, por ejemplo, el modelo de circunferencia unitaria o bien, de otro tipo.

4. Aplicación de las razones trigonométricas para encontrar medidas desconocidas, haciendo uso del modelo de triángulo rectángulo.

5. Modelación de un problema sobre "mareas" donde deben determinar el ajuste a curvas sinusoidales para predecir valores de la altura de una marea hipotética, de acuerdo con una tabla de datos de Horas vs. Altura del agua y finalmente determinar la aplicación a una pregunta sobre la "profundidad mínima necesaria".

Una vez finalizada la aplicación del instrumento, se realiza una entrevista semiestructurada con el fin de hacer partícipes a los docentes en el proceso de Análisis Retrospectivo Global y realizar la validación de sus respuestas.

CONCLUSIONES

Sobre los conceptos iniciales de seno y coseno

Se les preguntó inicialmente a los 5 docentes sobre cómo definen los conceptos de seno y coseno. Tres de los participantes definen las nociones de seno y coseno como razones entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, mientras que dos de los participantes amplían su concepto a las coordenadas que describe la circunferencia goniométrica y la noción de función trigonométrica y sus características.

Sobre las conceptualizaciones de los docentes en la investigación

En lo referente al objetivo 1, sobre categorizar los invariantes operatorios presentes en los docentes sobre los conceptos de seno y coseno, dentro de este grupo existe una preferencia por las representaciones numéricas, simbólicas y gráficas, así como los esquemas relativos al uso de las propiedades del triángulo rectángulo a la hora de abordar situaciones referentes a las razones trigonométricas seno y coseno.

En el caso del ajuste de datos a funciones trigonométricas, se aprecia que predominan las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas, aunque se aprecia que los docentes de la muestra estudiada integran en este tipo de situación los registros verbales argumentativos y denotativos para ir dando relato a sus procedimientos y justificaciones.

En lo referente al objetivo 2, es decir, lo relativo a describir los patrones encontrados en los invariantes operatorios presentes en los docentes al resolver problemas sobre seno y coseno, en buena medida se desprende que se encuentra muy presente la memorización, en aquellas situaciones en que no es posible utilizar el triángulo rectángulo, acudiendo a tener que buscar una herramienta adicional como lo es la circunferencia unitaria. Esto permitió darse cuenta de que existe una desarticulación en la manera que enseñamos, pero también en la forma en que comprendemos en lo cotidiano las nociones de seno y coseno. Claro está que, al carecer de un contexto de aplicación estas nociones (situaciones 1 a 3), la mera aplicación en cálculos sobre las medidas del triángulo rectángulo y su relación a los ángulos internos como referente, dista de su potencialidad como herramienta de modelación.

En el objetivo 3, sobre reflexionar sobre las decisiones de los docentes participantes en sus prácticas de enseñanza y la manera que están planteados los objetivos de aprendizaje relativos a la trigonometría en el currículum nacional, cabe destacar que los docentes aluden a sus propias complicaciones a la hora de acudir a resolver situaciones que involucran las nociones de seno y coseno y establecen que hay una necesidad por mejorar. Así, los 5 docentes entrevistados, reconocen como

limitación el no explicitar los límites angulares de aplicación de las razones trigonométricas cuando se utiliza el triángulo rectángulo y la necesidad de integrar herramientas complementarias para mejorar la comprensión de dichos conceptos como el análisis de la circunferencia unitaria y el uso de software graficador.

Por último, se concluye que es posible movilizar las concepciones de los docentes realizando experiencias que demanden los mismos conflictos cognitivos presentes en la epistemología de estos conceptos matemáticos. Es desde esta mirada que se debiera construir una propuesta didáctica para la formación docente en esta materia basándose en las diversas acepciones que en la misma historia de la trigonometría van apareciendo y desde el análisis crítico de la necesidad de enseñar de manera robusta las nociones trigonométricas, tanto en su acepción de razón como en la de función.

REFERENCIAS

Algarín, D. L., y Fiallo Leal, J. E. (2013). Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. *Revista Científica*, *2*, 56. https://doi.org/10.14483/23448350.5485

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J.F., y Rico, L. (2016). Significado Escolar de las Razones. Trigonométricas Elementales. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 34*(3), 51-71.

Montiel, G., y Jácome, G. (2014). Significado Trigonométrico en el Profesor. *Revista Bolema*, *28*(50), 1193-1216.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2016). *Programa de Matemática 2° Año Medio.* Autor.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2021). *Programa de Matemática 4º Año Medio*. Autor.

Nokkaew, A., Triampo, W., Nuttavut, N., Chuedoung, M., Triampo D., y Modchang, C. (2014). Triangle Based Scaffolding for Trigonometric Reasoning, *International Journal of Science, Mathematics and Technology Learning, 20*, 99-109.

Olguín, G. (2016) Una Propuesta Didáctica para la Construcción de las Funciones Trigonométricas Seno y Coseno. [Tesis de Magíster, Universidad de Los Lagos, Chile].

Vergnaud, G. (1990) La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathematiques, 10*(2,3), 133-170.

Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*, *52*, 83–94.

LOS MODELOS TÁCITOS Y EL INFINITO MATEMÁTICO A TRAVÉS DE LA HISTORIA

Tamara Díaz Chang[1], Elizabeth Hernández Arredondo[2]

[1]Universidad Austral de Chile, [2]Universidad de Los Lagos

tamara.diaz@uach.cl, elizabeth.hernandez@ulagos.cl

En este trabajo abordamos el estudio histórico y epistemológico del infinito como concepto matemático, centrándonos en identificar modelos implícitos, inconscientes, representando obstáculos en el proceso de formalización rigurosa de este concepto matemático. A partir de esta investigación se muestra cómo el cuestionamiento activo y consciente de estos modelos por los matemáticos en diferentes momentos de la historia, condujo a este proceso de formalización rigurosa y se obtiene información sobre los patrones de razonamiento conscientes que los estudiantes deben desarrollar para superar las dificultades que estos modelos producen, y así lograr una adecuada comprensión del infinito matemático.

Modelos tácitos, Infinito matemático, Enseñanza universitaria, Conocimiento implícito, Estudio histórico-epistemológico.

INTRODUCCIÓN

El infinito matemático es uno de los conceptos más complejos a los que se enfrentan estudiantes y profesores en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, por lo que ha sido ampliamente estudiado desde diferentes perspectivas teóricas en didáctica de la matemática. Existen numerosos trabajos (p.ej., Arrigo y D'Amore, 2004; Fischbein, 2001; Tall, 1981) que dan cuenta de la dificultad y complejidad que presenta, en este caso, el obstáculo epistemológico.

Las teorías del aprendizaje desarrolladas en el contexto de la matemática educativa en las últimas décadas han puesto énfasis en el estudio de las concepciones de los estudiantes acerca de diferentes objetos de conocimiento como punto de partida de la enseñanza, debido a que sostienen que para que el aprendizaje sea significativo es necesario partir de estas concepciones e interactuar con ellas. Sin embargo, en ocasiones estas concepciones pueden interferir en la adquisición de un nuevo conocimiento. Cuando se habla de la concepción del infinito, se consideran todas las representaciones que las personas evocan, actualizan y expresan con relación a situaciones y problemas en los que éste interviene.

En particular, Arrigo y D'Amore, (2004) plantean que la evolución de la concepción actual del infinito matemático en los estudiantes se produce lentamente, de modo contradictorio, tras un largo proceso de maduración y sistematización cognitiva, que puede durar meses o años. Normalmente, para los estudiantes, la cardinalidad de los números enteros es mayor que la cardinalidad de los números naturales, hay quien dice incluso que es el doble. Sin embargo, una vez que se acepta la demostración de que estos dos conjuntos tienen la misma cardinalidad, muchos estudiantes entonces creen que han podido concluir esto como consecuencia del hecho de que ambos conjuntos son infinitos, por lo que infieren que todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad: infinita. Por lo que aquí surge nuevamente una dificultad, al tratar con las distintas cardinalidades de los conjuntos infinitos introducidas por Cantor, y la noción de que existen infinitos más grandes que otros, es decir, al tratar con la existencia de los cardinales transfinitos. En este caso, el estudiante

concluye entonces que los conjuntos de los números naturales, de los números enteros, de los números racionales y el de los números reales, deberían tener la misma cardinalidad. Estudios clásicos realizados en los años 90 dan evidencia de este suceso (Fischbein, et al., 1994; Tsamir y Tirosh, 1994) que se denomina *aplastamiento* de los cardinales transfinitos (D'Amore, 2011).

El clásico debate filosófico sobre el infinito en sentido actual y en sentido potencial, originado en la antigua Grecia por Aristóteles (trad. 1985), ha inspirado diferentes investigaciones (p.ej., Tsamir y Tirosh, 1994). En algunos trabajos se considera que las intuiciones acerca del infinito emergen en consideración de procesos recursivos y como una extrapolación de nuestra experiencia que es finita (Arrigo y D'Amore, 2004). Los niños, en los niveles escolares básico y medio, conciben al infinito potencial a través del proceso de conteo sin fin de los números naturales. Luego, cuando se introduce el símbolo $\mathbb{N}$ para denotar al conjunto de los números naturales, los estudiantes asumen que se tiene la totalidad de estos números. Según Tall (1981), la mayoría de los estudiantes universitarios pierden la concepción del infinito potencial en relación con los números naturales a partir del estudio de la Teoría de Conjuntos, adoptando la noción de infinito actual introducida por Cantor.

Otra de las convicciones intuitivas más difundidas entre los estudiantes es pensar que en un segmento más largo hay más puntos que en un segmento más corto (p.ej., D'Amore y Martini, 1997; Tall, 1981), lo que D'Amore (2011) denomina *dependencia* de los cardinales transfinitos a hechos relativos a la medida. Por otra parte, los resultados de varios estudios (p.ej., Dubinsky et al, 2005; Fischbein, 2001) muestran que muchas de las conocidas paradojas sobre el infinito (como la paradoja de Zenón sobre Aquiles y la tortuga) surgen como convicciones intuitivas que provocan dificultades en el proceso de emergencia de los significados de este concepto en los estudiantes.

Fishbein (2001) argumenta que tanto el *aplastamiento*, como la *dependencia* constituyen *modelos tácitos*, implícitos e inconscientes, que aparecen cuando tratamos con conceptos que son demasiado abstractos, o complejos. En estas circunstancias, tenemos una tendencia natural a pensar en términos de modelos mentales simplificados que nos ayudan a representar a las identidades originales con el objetivo de facilitar y estimular la tarea de comprensión o resolución, y luego se vuelven implícitos o tácitos, controlando nuestro razonamiento de manera inconsciente para nosotros.

Para comprender con mayor profundidad estos *modelos tácitos* que aparecen en el aprendizaje del infinito matemático, es importante estudiar cómo fue su proceso de evolución a lo largo de la historia. Luego, en este trabajo abordamos el estudio histórico y epistemológico del infinito como concepto matemático, a través del estudio de los *modelos tácitos* que los matemáticos de varias generaciones tuvieron que enfrentar a lo largo de la historia, y que, al mismo tiempo, aparecen en el estudio del infinito matemático en la sala de clases universitarias.

METODOLOGÍA

La metodología implementada se apoya en la investigación bibliográfica de carácter cualitativo y argumentativo. Para realizar la selección de la literatura, la interpretación y el análisis de la información extraída, se utilizó la meta-etnografía (Noblit y Hare, 1998) que nos permitió sintetizar de manera sistemática los resultados de nuestra investigación y dar respuesta focalizada a las preguntas establecidas por el objetivo de investigación mencionado anteriormente. Este método proporciona una forma específica de realizar meta-síntesis cuya meta va más allá del resumen y el análisis de datos, donde los hallazgos de los estudios originales se convierten en datos que son

analizados a través de un proceso riguroso de interpretación y comparación de ideas, conceptos y perspectivas relevantes, conduciendo así a la síntesis esperada.

RESULTADOS

Como resultado de nuestro análisis vemos que los primeros filósofos y matemáticos hicieron uso de estos modelos mentales inconscientes simplificados definidos por Fischbein (2001), para representar al infinito como una identidad original, desde el comienzo mismo de su proceso de axiomatización. Por ejemplo, en las paradojas de Zenón, se reconoce la presencia de varios de estos modelos reportados en la literatura. En particular, en la paradoja de Aquiles y la tortuga (Bolzano, 1950), aparece el modelo de *inagotabilidad* (Fischbein, 1987) porque "siempre se puede seguir sumando", debido a la indefinición (Belmonte y Sierra, 2011) que supone que "no se puede calcular" o "no se sabe calcular" la suma de una cantidad infinita de términos, junto a la *divergencia* (Belmonte y Sierra, 2011) que asume que "el resultado de una suma infinita de cantidades finitas no puede ser finita". En estrecha relación con los tres modelos anteriores, también se tiene el modelo que hemos decidido llamar lo *inalcanzable*, (lo que nos parece más apropiado que el nombre "aproximación" dado por Belmonte y Sierra (2011) cuando se afirma que "el límite de las sumas parciales nunca se alcanza" o, de manera más general, cuando se asume que "el límite no se puede alcanzar"; y la *dependencia* (Arrigo y D'Amore, 2004), ya mencionada más arriba, que asocia el segmento como espacio geométrico con una distancia numérica. Similarmente, debido a las limitaciones geométricas, aparece el modelo al que hemos llamado *acotado-finito* y que fue definido de manera más general por Belmonte y Sierra (2011).

Otro ejemplo clásico de estas dificultades está representado precisamente por la paradoja de Galileo, donde aparece el *modelo tácito* de *inclusión* (Fishbein, 1987) originado en la noción común: "el todo es mayor que su parte" y que asume que un conjunto tiene que tener mayor cantidad de elementos que cualquiera de sus subconjuntos propios. Notemos, además, que fue cuestionando precisamente este modelo que Dedekind pudo dar su definición de conjunto infinito. Declaró que siempre que dos conjuntos - finitos o infinitos - pudiesen ser emparejados por una correspondencia biyectiva, entonces tendrían el mismo número de elementos, abordando también el *aplastamiento* de los cardinales transfinitos (D'Amore, 2011) ya mencionado anteriormente (que asume de manera general que todos los conjuntos infinitos tienen la misma cantidad de elementos).

Notemos, además, que Cantor, mediante su ingenioso argumento de la diagonal, pudo superar este modelo, demostrando así que hay más números reales que números naturales, y de manera más general, que hay infinitos más grandes que otros. Este famoso argumento no es más que el mecanismo cognitivo que él empleó para abordar este *modelo tácito* de manera consciente, y que también está estrechamente relacionado con el mecanismo de superación del modelo de *inclusión* ya mencionado anteriormente. Por otro lado, también usando la correspondencia biyectiva, demostró que los intervalos reales [0, 1] y [0, +∞) tienen la misma cardinalidad, arrojando luz sobre el modelo al que hemos llamado *acotado-no acotado*, que asume que un conjunto no acotado debe tener más elementos que uno acotado. Además, apoyándose en el trabajo de Weierstrass, para ilustrar mejor las contradicciones que surgían al razonar sobre el infinito, Cantor introdujo un subconjunto no vacío, acotado, del intervalo real [0, 1], que sin embargo tiene un número infinito de elementos y que se conoce como el *conjunto de Cantor* (Cantor, 1883). Al introducir este conjunto, pudo arrojar luz sobre el modelo *acotado-finito*, ya mencionado anteriormente y, estrechamente relacionado con el modelo *infinito-no acotado* cuestionado por Arquímedes en *El Arenario* (Archimedes, 2002).

A continuación, en la Tabla 1 se muestran los *modelos tácitos* reportados en la literatura según la revisión sistemática realizada, y los momentos de aparición a lo largo de la historia, así como sus correspondientes momentos de superación por los matemáticos de cada época.

Tabla 1.

Modelos tácitos en el proceso de axiomatización del infinito matemático a lo largo de la historia.

Modelo tácito	1ra aparición registrada	Resolución consciente
Indefinición	*Paradojas de Zenón*, Siglo V a.C.	Arquímedes, Siglo III a.C. Robinson, Siglo XX
Divergencia	*Paradojas de Zenón*, Siglo V a.C.	Arquímedes, Siglo III a.C. Robinson, Siglo XX
Inalcanzable	*Paradojas de Zenón*, Siglo V a.C.	Arquímedes, Siglo III a.C. Robinson, Siglo XX
Dependencia	*Paradojas de Zenón*, Siglo V a.C.	Cantor, Siglo XIX
Punto-marca	*Paradojas de Zenón*, Siglo V a.C.	Cantor, Siglo XIX
Inagotabilidad	*Metafísica* - Aristotle, 4th century BC	Arquímedes, Siglo III a.C. Robinson, Siglo XX
Aplastamiento	*El Arenario* - Arquímedes, Siglo III a.C.	Cantor, Siglo XIX Robinson, Siglo XX
Infinito-no acotado	*El Arenario* - Arquímedes, Siglo III a.C.	Cantor, Siglo XIX Robinson, Siglo XX
Acotado-finito	*El Arenario* - Arquímedes, Siglo III a.C.	Cantor, Siglo XIX Robinson, Siglo XX
Inclusión	Ibn-Qurra, Siglo IX	Dedekind, Siglo XIX
Desdoblamiento	*Discorsi* - Galileo, Siglo XVII	Dedekind, Siglo XIX
Acotado-no acotado	*On a Property of the Collection of All Real Algebraic Numbers* - Cantor, Siglo XIX	Cantor, Siglo XIX

CONCLUSIONES

A partir de la interpretación y el análisis de la información extraída de la literatura seleccionada, se pudo identificar las dificultades que constituyen *modelos tácitos* y que tuvieron que ser superadas por los matemáticos a lo largo de la historia, en el proceso de formalización rigurosa del infinito matemático. Luego, mediante el análisis realizado, se obtuvo una caracterización de estos modelos en la sala de clases universitarias, precisando obstáculos y dificultades que los estudiantes deberían superar y los profesores deberían considerar, para lograr una comprensión adecuada de este concepto.

Además, observamos que, para poder superar todos estos *modelos tácitos*, y se produjese así la culminación del proceso de formalización del infinito matemático a lo largo de la historia, fue necesario que los matemáticos se cuestionaran de manera consciente cada una de las convicciones intuitivas mencionadas anteriormente y se construyesen nuevos argumentos de manera intencionada y consciente.

Argumentamos que la incorporación de los resultados de este tipo de investigación es de gran relevancia en la transformación de nuestra práctica docente universitaria en relación con este concepto matemático. Este tipo de reflexiones nos permite mejorar el diseño de actividades encaminadas al cuestionamiento de estos modelos, que conduzcan a los estudiantes a superarlos, guiándolos hacia una comprensión adecuada del infinito matemático y haciendo más efectiva nuestra propuesta didáctica en la sala de clases.

REFERENCIAS

Archimedes. (2002). *The Works of Archimedes* (*Dover Books on mathematics).* T. L. Heath.

Arrigo, G., y D'Amore, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática*, *16*(2), 5-20.

Belmonte, J. L., y Sierra, M. (2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(2), 139-171.

Cantor, G. (1883). Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. *Math. Ann. 21*, 545–591.

D'Amore, B. (2011). La didáctica del infinito matemático. En AA. VV (Ed.), *Memorias del XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística* (pp. 21-29).

D'Amore, B., y Martini, B. (1997). Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos. *Números*, *32*, 26-32.

Dubinsky, E., Weller, K., Mc Donald, M., y Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis. *Educational studies in Mathematics*, *58*, 335-359.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational studies in Mathematics*, *48*, 309-329.

Fischbein, E. (1987). *Intuitions in Science and Mathematics*. Reidel.

Fischbein, E., Jehiam, R., y Cohen, D. (1994). The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles. *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol.2, pp. 352-359). PME

Noblit y Hare (1988). *Metha-etnography: synthesizing qualitative studies*. Sage Publications.

Tall, D. (1981). *Intuitions of infinity.* Mathematics in School.

Tsamir, P. y Tirosh, D. (1994). Comparing infinite sets: intuitions and representations. *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol.4, pp. 345-352). PME.

INFLUENCIA DEL DOMINIO AFECTIVO EN EL APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES EN EL AULA DE MATEMÁTICA

Leonardo Fuentes, Valentina Licanan, Sebastián Montecinos, Javiera Toledo, Neyse Toledo

Universidad Católica de Temuco

lfuentes2017@alu.uct.cl, vlicanan2016@alu.uct.cl, sebastian.montecinos2016@alu.uct.cl, jtoledo2017@alu.uct.cl, ntoledo@uct.cl

El rendimiento académico de los estudiantes está influenciado por diversos factores, y es de gran importancia tenerlo presente al momento de educar. Por esto, la finalidad de esta investigación es conocer la influencia del dominio afectivo que tienen los estudiantes de enseñanza media en el aula de matemáticas. Para esto se aplicó una encuesta en establecimientos educacionales de la región de la Araucanía, con preguntas relacionadas al dominio afectivo que tiene en el aula. Concluimos que los estudiantes se ven afectados con preguntas de improviso relacionadas con la resolución de problemas, por ende, el rol del docente influye en el resultado.

Dominio afectivo, Enseñanza media, Educación matemática.

INTRODUCCIÓN

Durante nuestro desarrollo nos vemos enfrentados a diversos cambios sociales como también personales, los cuales percibimos a través de las emociones, creencias y actitudes o bien llamado dominio afectivo, las que se manifiestan tanto de manera agradable como desagradable frente a las situaciones que experimentamos. También, dentro del aula se manifiesta este dominio afectivo, influenciando la capacidad de recepción de conocimientos entregados, así lo confirma Mc Leod (1989b), al señalar que el dominio afectivo juega un papel fundamental en el proceso de enseñanza aprendizaje.

En el transcurso de la etapa escolar, la asignatura de matemáticas es la que causa mayor conflicto en la mayoría de los estudiantes, en donde el bajo rendimiento puede perjudicar la motivación e interés por aprender. El objetivo de esta investigación es analizar la influencia que tiene el dominio afectivo en los estudiantes de enseñanza media durante las clases de matemáticas.

DOMINIO AFECTIVO

El dominio afectivo es uno de los temas que en el último tiempo se está trabajando en mayor manera por su importancia en el aprendizaje, debido a que si hay una falta de motivación por parte de los estudiantes esta derivará en el posible fracaso, como también podría generar un efecto dominó desmotivando a sus compañeros de clases, así exponen Ahmed et al. (2013).

Dentro de las definiciones de dominio afectivo, León-Mantero et al. (2020) aseguran que el dominio afectivo se divide en tres componentes: el cognitivo, afectivo y uno intencional, ligados a las creencias, emociones y actitudes, respectivamente. García y Lahuerta (2020) mencionan que en el proceso de enseñanza aprendizaje las emociones toman un rol muy importante en el estudiante, pues en el caso de que el estudiante presente emociones en su mayoría negativas, estas harán que se cohíba en el aprendizaje, mientras que, si las emociones son más bien positivas, estas ayudan en un aprendizaje más significativo. Cabe destacar que al referirse a emociones negativas no generaliza que esto sea malo, muy por el contrario, son necesarias para el aprendizaje. Por otro lado, Gamboa y

Moreira-Mora (2016) afirman que durante las clases de matemáticas los estudiantes se ven enfrentados a las creencias relacionadas por cuatro ejes: sobre sí mismo, sobre el entorno, sobre el problema (si es capaz de resolverlo y como) y sobre las matemáticas. Estas creencias permiten al individuo organizar y filtrar las informaciones recibidas, y construir su noción de realidad y su visión del mundo. Como último componente del dominio afectivo tenemos la actitud, según Jiménez y Flores (2017), se entiende como actitud a la predisposición evaluativa de conducta que determina las intenciones que cada persona tiene como individuo, influyendo directamente en el comportamiento. Los estudiantes de enseñanza media, en el transcurso de su etapa escolar, van desarrollando actitudes con respecto al aula de matemáticas, las cuales se ven influenciadas principalmente por la edad en la que se encuentran los estudiantes, es por eso que mientras más adelantados se encuentren en el nivel educativo se observan mayores actitudes negativas hacia el aprendizaje de los conocimientos matemáticos.

El aula de matemáticas es fundamental en el desarrollo y aprendizaje de los estudiantes, contribuyendo en su pensamiento lógico y matemático, siendo útil y necesario para poder desenvolverse de manera adecuada en un determinado contexto (Penagos et al., 2017). El aprendizaje de las matemáticas no solo es para adquirir conocimientos matemáticos, sino que es la base para las demás asignaturas (Goleman y Cherniss, 2013).

METODOLOGÍA

La investigación es de tipo cualitativa, bajo un enfoque descriptivo, en donde se busca recopilar la información desde el lugar de ocurrencia del fenómeno y describir fenómenos sociales y/o educativos en una situación temporal determinada, buscando las características importantes del grupo de individuos a investigar y no a los individuos en sí, generalmente usado para encuestas (Cauas, 2015). Para este caso se realiza una encuesta de 15 preguntas categorizadas en los factores: emociones, creencias y actitudes, los cuales forman el dominio afectivo; 5 preguntas para cada componente del dominio en el aula de matemáticas, pilotada de manera previa a la aplicación, a partir de encuestas creadas con preguntas de creencias y actitudes (Gil et al., 2006; Van Vaerenbergh y Steven, 2019). La encuesta fue realizada en aulas de manera presencial, siguiendo protocolos de permisos para apoderados y estudiantes con anterioridad, por medio de consentimientos y asentimientos que debían firmar donde se informa sobre el proceso, asegurando la confidencialidad de los datos y su anonimato.

Los establecimientos en el cual se realizarán las encuestas pertenecen a la Región de la Araucanía, en las comunas de Temuco, Carahue y Lautaro, todos pertenecientes a una dependencia municipal y pública. La población corresponde a 140 estudiantes que cursan los niveles de enseñanza media (primero a cuarto medio) y que fluctúan entre los 14-19 años de edad. Dentro de los estados evolutivos de una persona, los estudiantes se encuentran en la etapa de adolescencia (13-19 años), la cual se caracteriza por estar en transición desde la niñez hasta la juventud, es en esta etapa donde comienza el pensamiento de operaciones formales, iniciándose con la preparación para la vida adulta.

RESULTADOS PRELIMINARES

A partir de los datos preliminares, obtenidos por dos establecimientos educacionales, se logra presentar los siguientes resultados de la encuesta aplicada a 139 estudiantes.

Con respecto a las emociones de los estudiantes que son generados dentro del aula de matemática, una gran mayoría del alumnado está de acuerdo o totalmente de acuerdo en que se sienten angustiados

y sienten miedo cuando el profesor les propone "por sorpresa" resolver un problema matemático, lo que corresponde al 59,7% de la población encuestada. Por otra parte, 64 estudiantes representados por el 46% hace referencia a estar de acuerdo y totalmente de acuerdo con que las clases se tornan "tediosas", provocando que no se sientan a gusto. Sumado a esto, cuando se les complica la resolución del problema se vuelven inseguros, desesperados y nerviosos (46,9%).

Por otro lado, las creencias que tienen los estudiantes discrepan en que las matemáticas se consideren difíciles, aburridas y lejanas a la realidad. Así, el 45% está de acuerdo con que las habilidades y destrezas utilizadas en las clases de matemáticas ayudan con la resolución de problemas en la vida cotidiana. La mayoría del alumnado, un 87%, concuerda con que al conocer la fórmula y procedimiento de los problemas matemáticos se vuelven más fácil su resolución. De manera similar, el 79% coincide con la afirmación que cuando se dedica más tiempo de estudio a las matemáticas se obtienen mejores resultados en la resolución de problemas.

Acerca de la actitud en el aula, los estudiantes divergen con respecto a asegurar que tienen confianza en sí mismos al enfrentarse a un problema matemático (40%), aunque, un 36,6% no se considera capaz y hábil en matemáticas. La mitad del alumnado considera que cuando hay esfuerzo en la resolución de problemas, suelen dar con el resultado correcto, así como también el 58,2% está de acuerdo o totalmente de acuerdo que cuando fracasan sus intentos por resolver el problema lo intentan nuevamente.

CONCLUSIONES

De acuerdo con los resultados obtenidos, se concluye que los estudiantes emocionalmente no se ven afectados cuando tienen clases de matemática, pero sí por algunos indicadores y/o factores que ocurren en el transcurso de las clases de matemática. Por ejemplo, a los estudiantes se les complica la resolución de problemas y, cuando el docente propone por sorpresa una pregunta, los estudiantes sienten angustia, miedo, inseguridad, desesperación y nervios.

Los estudiantes no se sienten capaces y hábiles dentro del aula de matemáticas, pero si presentan confianza al momento de enfrentarse a un problema. Además, los estudiantes son conscientes con el tiempo de estudio a dedicar para tener un mejor rendimiento académico, considerando que el procedimiento de la resolución de un problema no influye en el resultado esperado.

Bermejo (1996, citado en Blanco et al., 2010) nos indica que existen dos tipos de creencias en los estudiantes durante su aprendizaje hacia las matemáticas. Por un lado, están las creencias de las mismas matemáticas, refiriéndose a la idea que tienen sobre la utilidad presente en la vida derivadas del contexto socioeducativo. Por otro lado, están las creencias de los alumnos en relación con las matemáticas, relacionado con la confianza en su aprendizaje y el autoconcepto. Por ello, el estudiante se ve influenciado por el actuar del docente dentro del aula. Blanco et al. (2010) comentan que el éxito o fracaso en matemáticas es atribuible a la actitud del docente hacia el alumnado.

Estos resultados nos hacen tomar conciencia sobre la importancia del trabajo en el aula con los estudiantes y, lo significativo que puede llegar a ser para éstos (positiva o negativamente). En este sentido, marcar negativamente a los estudiantes va directamente relacionado con la imposición de resolver un problema en la pizarra, pues ellos no siempre están preparados, lo que genera falta de confianza en su propio aprendizaje.

El dominio afectivo juega un rol fundamental en el desarrollo del aprendizaje de los estudiantes, los componentes, emociones, creencias y actitudes, deben estar vinculados y relacionados entre sí para formar un escenario significativo en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

REFERENCIAS

Ahmed, W., Van der Werf, G., Kuyper, H., y Minnaert, A. (2013). Emotions, self-regulated learning, and achievement in mathematics: A growth curve analysis. *Journal of Educational Psychology, 105*(1), 150-161.

Blanco, L., Caballero, A., Piedehierro, A., Guerrero, E., y Gómez del Amo, R. (2010). El Dominio afectivo en la Enseñanza/ Aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de investigaciones locales. *Campo Abierto. Revista De Educación*, *29*(1), 13-31.

Cauas, D. (2015). *Definición de las variables, enfoque y tipo de investigación*. Biblioteca electrónica de la Universidad Nacional de Colombia.

Gamboa Araya, R., y Moreira-Mora, T. E. (2016). Un modelo explicativo de las creencias y actitudes hacia las Matemáticas: Un análisis basado en modelos de ecuaciones estructurales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10*, 27-51.

García Ascensión, H., y Lahuerta Padrón, A. (2020). *El dominio afectivo y sus influencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas* [Tesis de pregrado, Universidad de La Laguna, España].

Gil Ignacio, N., Gerrero Barona, E., y Blanco Nieto, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 4*(1), 47-72.

Goleman, D., y Cherniss, C. (2013). *Inteligencia emocional en el trabajo: cómo seleccionar y mejorar la inteligencia emocional en individuos, grupos y organizaciones*. Kairós.

Jiménez, E. B., y Flores, W. O. (2017). Actitud hacia las matemáticas: un estudio en una escuela rural de la Costa Caribe Sur de Nicaragua. *Revista Universitaria del Caribe, 18*(1), 7-16.

León-Mantero, C., Solano, N., Gómez, A., y Fernández-Cézar, R. (2020). Dominio afectivo y práctica docente en Educación Matemática: un estudio exploratorio en maestros. *Revista iberoamericana de educación matemática*, *58*, 129-149.

McLeod, D.B. (1989). Beliefs, Attitudes, and Emotions: New Views of Affect in Mathematics Education. En D.B. McLeod, V.M. Adams, (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving* (pp. 245-258). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3614-6_17

Penagos, M., Mariño, L. F., y Hernández, R. V. (2017). Pensamiento matemático elemental y avanzado como actividad humana en permanente evolución. *Revista Perspectivas, 2*(1), 105-116.

Van Vaerenbergh, S. (2019). Problemas matemáticos, su resolución y dominio afectivo. Diferencias entre alumnos y alumnas del grado de maestro. *Revista INFAD De Psicología. International Journal of Developmental and Educational Psychology*, *1*(1), 59–68. https://doi.org/10.17060/ijodaep.2019.n1.v1.1377

LOS EFECTOS DE LA PRIORIZACIÓN CURRICULAR EN EL EJE DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD PRODUCTO DE LA PANDEMIA

Leandro Cárdenas, Bardy Medina, Katherine Slimming, Jaime Troncoso, Neyse Toledo

Universidad Católica de Temuco

lcardenas2019@alu.uct.cl, bmedina2019@alu.uct.cl, kslimming2019@alu.uct.cl, jaime.troncoso2019@alu.uct.cl, ntoledo@uct.cl

Finalizando el 2019 ocurrió una contingencia a escala mundial impactando en la educación. El Ministerio de Educación, buscando alivianar la enseñanza implementó una priorización curricular. La presente investigación busca conocer sus efectos tras lo ocurrido en estudiantes de segundo año medio, mediante el uso de una entrevista, dirigida a los docentes y una encuesta dirigida a los estudiantes. Concluyendo que hay desfase curricular y que no generó cimientos en el eje de estadística y probabilidad. Al tratar con una muestra de la población total, es necesario seguir con mayores investigaciones y ver las consecuencias en un futuro.

Educación matemática, Estadística y probabilidad, Educación en pandemia, Priorización curricular.

INTRODUCCIÓN

La educación en pandemia discrepa mucho de la educación a la cual los estudiantes estaban previamente acostumbrados y, tal como menciona la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL, 2020) “las medidas que tomaron los diferentes países del continente se relacionan intrínsecamente con la suspensión de las clases presenciales en todos sus niveles”. Por otra parte, Benavides et al. (2020) menciona que los profesores tuvieron la necesidad de abandonar sus salones de clases, a los cuales estaban acostumbrados hace muchos años, para verse forzados a convertirse en usuarios de una multitud de herramientas digitales que les permitieran interactuar con sus colegas y estudiantes. Los estudiantes, quienes no estaban tan acostumbrados a estar en sus hogares, debían de compartir los aparatos tecnológicos, así como compartían la conexión a internet con el resto de los habitantes de sus hogares, mientras lidian con todos los otros problemas relacionados a la pandemia y a los de la propia juventud, esto último, basado en la cita a The Chronicle of Higher Education que se hace en Benavides et al. (2020).

En Chile, además de comenzar a realizar las clases a través de distintas plataformas online, se trabajó con una priorización curricular actuando como un apoyo frente a la pandemia, y a la reducción de tiempo lectivo. Tal como redacta el Ministerio de Educación (2020), se priorizaron objetivos de carácter reducido, existiendo dos niveles: Un primer nivel donde se encuentran los contenidos imprescindibles, esenciales para avanzar a nuevos conocimientos, y un segundo nivel donde se encuentran los objetivos integradores y significativos. Quedando fuera muchos objetivos que son denominados como no priorizados, los que quedaron como aprendizaje autónomo.

La presente investigación tiene como objetivo conocer los efectos que produjo en los estudiantes la implementación de la priorización curricular en pandemia, en el área de la estadística y la probabilidad en matemática. Para eso, se definieron 4 factores importantes que influyen directamente: Educación en pandemia, currículum, priorización curricular, estadística y probabilidad, lo que nos permite tener una imagen más focalizada. La obtención de datos fue mediante la aplicación de una entrevista a

miembros docentes, y un cuestionario a estudiantes que cursan segundo medio. La elección de los estudiantes responde a que dicho grupo vivió un proceso de transición de enseñanza básica a media (8° básico a 1° medio).

Currículum y priorización curricular. Estadística

Angulo (1994) menciona que "el currículum consiste en aquello que se lleva a cabo en las escuelas, siendo el plan o la planificación por la cual se organizan los procesos escolares de enseñanza/aprendizaje". Con respecto al Currículum Nacional es posible afirmar, a partir de los estudios existentes, que su incorporación dentro del ámbito académico ha permitido proporcionar a los sistemas educativos una organización de las temáticas a llevar a cabo durante el ciclo escolar.

Para trabajar con el currículum durante este periodo, se creó la priorización que, tal como lo describe el Ministerio de Educación (2020), es una herramienta de apoyo curricular que permite enfrentar y minimizar las consecuencias adversas que han emergido por la situación mundial de pandemia por COVID-19. El haber implementado la Priorización Curricular requirió que cada establecimiento educacional adquiriera un rol protagónico en la construcción de un plan adecuado a su realidad, a fin de atender la creciente diversidad educativa. Así, el rol de los equipos directivos, y docentes, para liderar el proceso fue fundamental. No se trata de un nuevo currículum, sino de una herramienta para minimizar los efectos de la pandemia, tal como señala el Ministerio de Educación en el currículum nacional.

Con respecto a la Priorización Curricular implementada, es posible afirmar, gracias al Ministerio de educación (2022), que su realización y ejecución logró de cierta manera minimizar los problemas que pudo llevar consigo el seguir el desarrollo de los estudios durante el transcurso de la pandemia. A manera dispar de la evidencia, el 41,176% de los OA vinculados al eje de Estadística y Probabilidad no se priorizaron en los niveles de 1° básico hasta 4° medio. El eje de probabilidad y estadística, como menciona el Ministerio de Educación (2016), responde a la necesidad de que todos los y las estudiantes aprendan a realizar análisis e inferencias, y obtengan información a partir de datos estadísticos, este eje tiende a ser posicionado como la cuarta unidad presente en el año escolar dentro de la asignatura de Matemática, por lo que es el último en ser tratado en la mayoría de los ciclos escolares. Dicho eje, además, se encuentra dividido en dos áreas, la estadística y la probabilidad, y se espera que los estudiantes logren comprender la relación entre ambas, para que se comprenda el rol de la probabilidad en la sociedad.

METODOLOGÍA

La investigación presenta un enfoque cualitativo descriptivo de carácter exploratorio, pues consiste en indagar un tema poco abordado. Además, se considera un estudio de casos múltiples al tener en cuenta procesos de búsqueda para distintos tipos de participantes.

La investigación se llevó a cabo en la región de la Araucanía, comuna de Temuco con una muestra de 3 docentes y 19 estudiantes de segundo medio. Para la obtención se utilizaron dos instrumentos: una entrevista semiestructurada dirigida a los docentes, y una encuesta dirigida a los estudiantes. Ambos instrumentos contenían 12 preguntas. Para la creación de los instrumentos, se tomó en consideración los objetivos no priorizados señalados en el currículum, la implementación de la priorización y las características propias de la educación en pandemia.

Con la finalidad de obtener información sobre la objetividad de los instrumentos, se llevó a cabo una prueba pilo con un grupo de estudiantes de la Universidad Católica de Temuco. De dicha prueba, se reciben sugerencias de preguntas adicionales, así como modificaciones de tipo gramatical y formal. Se entregó una carta de consentimiento a los docentes, donde se explícita el anonimato y la libertad de responder. La recolección de datos de docentes, mediante el primer instrumento, se realiza de manera presencial y online. Se procuró contextualizar el carácter de la investigación, para dar respuesta a diferentes preguntas, entre ellas: (1) ¿Qué metodología estuvo empleando durante esos años para la enseñanza de las matemáticas?, (2) Durante el proceso, ¿recibió el apoyo necesario para el desarrollo de la enseñanza durante la pandemia? ¿Sus estudiantes recibieron apoyo? (capacitaciones, recursos, etc.). Las primeras preguntas buscaban esclarecer factores propios de la educación en pandemia y los recursos disponibles. La pregunta (4) ¿Creen que los contenidos fueron los indicados, considerando el aprendizaje realizado a través de las clases online?; y, (5) ¿Cree usted que el currículum nacional original podría haber funcionado a largo plazo durante la educación en pandemia?, están focalizadas en creencias en relación del currículum vigente. La pregunta (6) ¿Cómo cree usted que pudo afectar la implementación de la priorización curricular a los estudiantes que cursaron octavo básico?; y, (8) Durante la pandemia, ¿las habilidades que presentaban los alumnos estaban realmente a la par con las habilidades esperadas de los OAs? Son preguntas que dan a entender la visión y los efectos que produjo la aplicación de la priorización curricular. Preguntas (10) ¿Qué contenidos referentes al eje considera usted que es bueno volver a repasar?; y, (11) ¿Considera relevante el objetivo de principio multiplicativo de octavo básico?, enfocadas al eje de estadística y probabilidad. Estas últimas preguntas apuntan a obtener información sobre la importancia del eje y los objetivos no priorizados.

Para el segundo grupo, compuesto por la población de estudiantes, se elaboró un cuestionario de 12 preguntas: (1) ¿Qué recursos tecnológicos tuvieron disponible para el desarrollo de las clases durante los primeros años de la pandemia?; (3) ¿Cuáles de los siguientes hechos percibieron durante la educación en pandemia?; 4) En la escala del 1 al 5, ¿Qué tanto gusta de la asignatura de Matemática en base a sus contenidos?; (5) ¿Cómo considera que ha sido su desempeño en la asignatura de Matemática en la escala de 1 a 5?; (6) ¿Cómo ha sido su desempeño en el área de estadística y probabilidades?; (7) ¿Conocían la existencia y de qué trataba la priorización curricular previo a la encuesta presente?; (8) ¿Cómo calificaría el nivel de dificultad con el que se trató los contenidos de matemática durante las clases virtuales?; (9) ¿Sienten que los contenidos fueron bien abordados tras la implementación de la priorización curricular?, Si su respuesta fue no, ¿A qué cree que se debió esto?; (10) ¿Consideran el uso de la estadística y la probabilidad fundamental en su vida?; (11) ¿Recuerdan haber visto: "principio multiplicativo" en octavo básico?; y, (12) ¿Recuerdan haber visto en primero medio: "Comparar poblaciones mediante la confección de gráficos ‘xy’ para dos atributos de muestras"?.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos por la realización de la entrevista evidencian variadas respuestas por parte de los docentes, de los cuales uno de ellos efectuó clases en pandemia al grupo de estudiantes encuestados. Referente a la educación en pandemia los docentes entrevistados comentan que se vieron enfrentados a desafíos. Por ejemplo, señalan que: “tuvimos que aprender a usar nuevas plataformas y tuvimos que aprender a ocupar en el fondo herramientas digitales”, donde el 100% de los docentes

generó un cambio en su metodología. Además, un 33,3% de los docentes se encontraba con apoyo en relación con las herramientas tecnológicas para llevar a cabo en sus clases, lo cual permitió oportunidades nuevas de enseñanza en el aula virtual.

Referente al currículum nacional, el 100% de los docentes entrevistados mencionan que mantener el currículum como parte de la metodología de aprendizaje exhibiría ciertas dificultades, pues los estudiantes no presentaban todo lo necesario para llevar a cabo los contenidos a través de la educación a distancia, esto lo dejan claro con comentarios tales como: "yo tuve que afrontar funciones sin que los chiquillos supieran hacer un gráfico o supieran utilizar un plano cartesiano, por lo tanto ahí hay que tener esa consideración".

Con respecto a la priorización curricular, los docentes entrevistados hacen mención a que, a pesar de alivianar la carga académica en pandemia, la priorización hizo que se presentaran ciertas falencias en el aprendizaje de los estudiantes. El 100% de los docentes mencionó estar en desacuerdo con la elección de objetivos priorizados hasta cierto grado, tal como muestran comentarios como: "llevo varios años trabajando en el nivel, bastante tiempo, y cuando revise los aprendizajes priorizados, no eran acorde con lo que nosotros necesitábamos" o "Sí, está bien que se hayan priorizado contenidos 'fundamentales' pero hay contenidos que de verdad no eran tan relevantes como en otros niveles y que ocuparon el espacio que pudo ocupar objetivos más importantes".

En relación con el eje de estadística y probabilidad, el 100% de los docentes entrevistados menciona que los estudiantes no dominan conceptos básicos sobre medidas de tendencia central o tablas de frecuencia. Igualmente, determinaron que la exclusión del objetivo de principio multiplicativo fue una mala decisión, por su relación con combinatorio y otros objetivos de aprendizaje posteriores. "los chicos no sabían nada, nada, ni siquiera sabían lo que era la moda, si no saben lo básico no puedo seguir avanzando".

En cuanto a los resultados de la encuesta realizada a los 19 estudiantes, se evidenciaron diversos puntos respecto a los efectos de la pandemia. Sobre la educación en la pandemia, el 100% de los estudiantes contaba con alguno de los recursos como celulares, computadores y/o tablets necesarios para poder llevar a cabo su educación durante la pandemia, aunque solo 63,2% tenía una conexión estable y para ellos resultó ser un cambio repentino a lo acostumbrado, además del 47,7% notó un aumento de las tareas autónomas.

En atención al currículum nacional, los estudiantes encuestados tienden a discrepar con respecto a su gusto por la asignatura de Matemática, pero en su mayoría consideran tener un buen desempeño. Aun así, cuando se realiza un enfoque con respecto al área de la Estadística y la Probabilidad, se presenta una menor seguridad sobre el desempeño que logran tener en dicha unidad.

El mayor efecto de todo esto fue que solo el 47,4%, percibió la estadística y la probabilidad como una rama de la matemática relevante en la vida cotidiana, y aún menos de ellos, recuerdan haber trabajado con los objetivos que son considerado como de carácter autónomo.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La pandemia trajo consigo algunos efectos positivos, como aprender a utilizar recursos tecnológicos, pero, al mismo tiempo, trajo consecuencias negativas. En este sentido la educación fue el área más afectada, en especial el aprendizaje de los estudiantes, consiguiendo un retraso considerable en los

contenidos del eje de estadística y probabilidad**.** El objetivo de la investigación consistía en conocer los efectos en los estudiantes en pandemia tras la implementación de la priorización curricular, donde los resultados obtenidos por parte de ambas perspectivas revelan el impacto multidimensional a nivel de docentes y estudiantes. Al implementar la priorización curricular, la cantidad de contenidos que los estudiantes estaban acostumbrados a recibir se reduce considerablemente, lo cual puede llegar a dejar ciertos vacíos en los conocimientos que se dan a futuro y los cuales deben de relacionarse para comprenderse mejor.

El rendimiento de los estudiantes dentro del área de la matemática se vio directamente afectado por las metodologías llevadas a cabo durante la educación en pandemia, pues los docentes solo alcanzaban a enseñar cierta cantidad de objetivos. Esto se ve reflejado en el eje de Estadística y probabilidad, el que los estudiantes debieran dominar años anteriores, pero que hoy por hoy no recuerdan contenidos de esa unidad, ni conocimientos previos.

Los docentes se han percatado de las falencias que varios estudiantes presentan tras la realización de clases durante la pandemia y en la actualidad. Al respecto, el principal aprendizaje de los contenidos no priorizados estaba autorregulado por el propio estudiante (Rodríguez y Rodríguez, 2022), aun cuando muchos estudiantes tienen escasa habilidades para el aprendizaje autorregulado (Bajaña y Bustos, 2022). Los resultados sugieren los estudiantes no reconocen la importancia de dicho aprendizaje, lo que deja a ver que hay un menor aprecio por el eje de Estadística y probabilidad, lo que podría explicar, en parte, la divergencia en el desempeño por parte de los estudiantes.

La investigación realizada ha permitido recopilar información en base a nuevos terrenos en la educación tras la implementación del aprendizaje a distancia durante los años de pandemia, lo cual ha podido ayudar a establecer las bases para futuras investigaciones más focalizadas en el tema y, de esa manera, obtener mayores resultados al respecto.

REFERENCIAS

Angulo, J. (1994). *¿A qué llamamos currículum?* Aljibe.

Bajaña, F., y Bustos, A. (2022). Consecuencias del desarrollo en la educación en tiempos de post pandemia. *Ciencia y Educación-Revista Científica, 3*(8), 16-25.

Benavides, M., de Agüero, M., del Pilar, A., Hernández, A., Jaimes, V., Rendon, V., Sánchez, M., y Torres, R. (2020). Retos educativos durante la pandemia de COVID-19: una encuesta a profesores de la UNAM. *Revista digital universitaria, 21*(3), 1-24.

CEPAL. (2020). *La educación en tiempos de la pandemia de COVID-19.*

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2016). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Autor.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2020). *Priorización curricular covid-19 Matemática 1° Básico a 4° Medio.* Autor.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2022). *Atender la diversidad educativa para reducir las brechas de aprendizaje que dejó la pandemia.* CPEIP. https://cpeip.cl/lineamientos-priorizacion/

FACTORES PARA LA CONTEXTUALIZACIÓN CURRICULAR DE LA HABILIDAD MATEMÁTICA DE ARGUMENTAR Y COMUNICAR EN EGB

Constanza Ledermann[1], Nelly Córdova[2]

[1]Universidad de Chile, [2]Pontificia Universidad Católica de Chile

constanza.ledermann@uchile.cl, nacordova@uc.cl

En este estudio de caso de corte cualitativo se analiza el proceso de contextualización curricular llevado a cabo por profesoras de 6to básico y cómo este impacta en su práctica para el desarrollo de la habilidad curricular de argumentar y comunicar en matemáticas. A partir de entrevistas en profundidad a cuatro docentes en ejercicio, se analizan diversos factores que impactarían en la toma de decisiones para el desarrollo de esta habilidad, tales como el manejo del currículum, los saberes disciplinares y el conocimiento del contexto en el que se desarrolla la enseñanza.

Contextualización curricular, Argumentación matemática, Decisiones curriculares, Habilidades.

INTRODUCCIÓN

Cada vez existe mayor consenso acerca de la importancia de impartir una educación matemática que implique no solo la instrucción a partir de conocimientos, sino que también, el trabajo a partir de las habilidades y actitudes que la asignatura puede aportar para el desarrollo del ser humano y su equipamiento para enfrentar los desafíos que la sociedad -presente y futura- impone (Scott, 2015; Solar y Deulofeu, 2016). En concordancia con ello, el currículum chileno, a partir de la implementación de las Bases Curriculares (BBCC) de Educación Básica (MINEDUC, 2012), introduce una arquitectura curricular determinada por Objetivos de aprendizaje (OA) que "refieren a habilidades, actitudes y conocimientos que buscan favorecer el desarrollo integral de los estudiantes" (MINEDUC, 2012, p. 24). Esta estructura curricular ha tenido continuidad en las reformas posteriores de los otros niveles de nuestro sistema escolar, reforzando los principios de la educación señalados en la LGE. Más recientemente, en las BBCC de 3° y 4° medio (MINEDUC, 2019), se enfatiza la necesidad de garantizar el aprendizaje de cada estudiante por igual, con criterios de inclusión, señalando en esta línea que los Objetivos de Aprendizaje de las BBCC se formulan con el propósito explícito de ser contextualizados y adecuados a diversas realidades (p. 22).

Esta configuración curricular plantea la necesidad de avanzar hacia aprendizajes complejos e integradores, como las llamadas "habilidades del siglo XXI" (Bellei y Morawietz, 2016), que trascienden al mero manejo de información, apuntando al desarrollo de destrezas y actitudes vinculadas al conocimiento y, principalmente, su aplicación en diferentes situaciones y contextos. En el caso específico de la asignatura de Matemática, esto significa encausar nuestro currículum hacia la tendencia internacional de incorporar paulatinamente los procesos matemáticos que, junto con los contenidos matemáticos, favorecen la competencia matemática (Alsina, 2013).

Frente a estos requerimientos del currículum, los docentes deben, necesariamente, tomar decisiones para una implementación que apunte a hacerlo más pertinente y desafiante para sus estudiantes. Esto sitúa su labor en una doble dimensión acerca del currículum: una, que podríamos definir como técnica, referida al dominio de los instrumentos curriculares vigentes, y otra, de carácter político-

sociocultural que permite interpretar el currículum de acuerdo con sus contextos de formulación e implementación, para que esta sea pertinente, significativa, con criterios de inclusión y flexibilidad. Específicamente, en el currículum vigente se indica a la contextualización curricular como el proceso que apunta al desarrollo de aprendizajes desde su apropiación en los diversos contextos educativos, dotándolo de significado para los estudiantes desde sus propias realidades (MINEDUC, 2020).

CONTEXTUALIZACIÓN CURRICULAR COMO PRÁCTICA DECISIONAL COMPLEJA

La política educativa en Chile reconoce la toma de decisiones con respecto al currículum como parte clave del ejercicio docente. La contextualización curricular forma parte de un conjunto de prácticas decisionales sobre el currículum reconocidas oficialmente. Ésta se entiende como el proceso desarrollado por instituciones escolares y docentes, donde se resignifica el currículum (Guzmán et al., 2007) con la finalidad de dotarlo de relevancia y pertinencia de acuerdo con los contextos educativos (Espinoza et al. 2017). Esto significa, siguiendo a Grundy (1991), que la contextualización es un proceso praxeológico deliberativo, enmarcado en criterios de flexibilidad y autonomía (Osandón y Pinto, 2018). Este ejercicio de implementación curricular situado, distancia la labor docente de un énfasis meramente técnico, que centra su atención en la eficiencia en la cobertura del conjunto de objetivos prescritos.

La contextualización curricular implica una competencia para dar lectura compleja al texto curricular prescrito (Espinoza, 2017), comprendiendo como nuestro sistema educativo da respuesta a las preguntas curriculares centrales sobre el qué, el para qué y el cómo de la educación (Stenhouse, 2003), en articulación con las características de las escuelas y sus estudiantes, para dar consistencia a las decisiones que apunten a brindar oportunidades de aprendizaje relevantes y significativas. Para ello es fundamental el conocimiento de los documentos que componen la definición curricular nacional (sus principios, niveles de prescripción, definiciones y propósitos). Cómo se configura este núcleo saber curricular, implica para los docentes, diversos modos y oportunidades de acceso a la lectura del texto curricular (Espinoza et al. 2017) y con ello sus posibilidades de contextualización.

INCORPORACIÓN DE LA ARGUMENTACIÓN EN EL CURRÍCULUM DE MATEMÁTICA

En el currículum vigente, las habilidades cuentan con OA específicos y progresivos a lo largo de la trayectoria escolar (MINEDUC, 2012). Las BBCC consideran que, en general, estas "tienen un rol importante en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos y en la aplicación de conocimientos para resolver los problemas propios de la Matemática (rutinarios y no rutinarios) y de otros ámbitos" (MINEDUC, 2012, p. 89). Argumentar y comunicar constituye un eje de habilidades matemáticas, cuya progresión abarca desde primero básico a cuarto medio y se configura como una "actividad sociocultural de construir, presentar, interpretar, criticar y revisar argumentos" (Johnson, 2000, citado en Carrascal, 2015, p. 306). En la asignatura de matemáticas, esta habilidad se presenta junto a otras tres (modelar, representar y resolver problemas), y se asocia "tanto a nociones relativas al conocimiento matemático, como a un conjunto extenso de significados extra-matemáticos" (Goizueta y Planas, 2013, p. 157).

No obstante, pese a enfatizar la necesidad de favorecer este tipo de aprendizajes, en los diversos instrumentos curriculares se entregan orientaciones difusas para su abordaje y desarrollo, lo que

podría tener un impacto en la lectura curricular que realizan los docentes (Ledermann, 2021) y, en consecuencia, en su toma de decisiones respecto al currículum en relación con el desarrollo de la argumentación. En este sentido, la contextualización del currículum en torno a esta habilidad requiere de una resignificación del diseño curricular de acuerdo con las características y necesidades de cada comunidad educativa (Espinoza et al., 2018; Guzmán et al., 2007).

DISEÑO METODOLÓGICO

Los sujetos participantes corresponden a cuatro profesoras de colegios de distintas dependencias en la Región Metropolitana (Chile) que impartían clases de matemática en los niveles de 6° Básico. Se aplicaron entrevistas individuales semiestructuradas (Knox y Burkard, 2009) para indagar sobre los aspectos curriculares que ellas consideran al momento de tomar sus decisiones para desarrollar la habilidad de argumentación. El tiempo de entrevista osciló entre 32 y 112 minutos. Las entrevistas fueron grabadas y transcritas para análisis. Se realizó un análisis temático (Braun y Clarke, 2006), con el objetivo de establecer patrones y temas comunes en las entrevistas, a partir de una lectura inicial y el establecimiento de códigos iniciales y categorías preliminares de análisis, a partir de los cuales emergieron temas clave, a través de un proceso iterativo.

RESULTADOS

La contextualización curricular se configura, en el grupo de profesoras participantes, a partir de diversos elementos que impactan en la interpretación y decisiones sobre la habilidad curricular de argumentar en matemáticas. La Formación Inicial Docente emerge como un primer obstáculo para trabajar la argumentación, todas ellas coinciden en que no abordaron el desarrollo de habilidades en su formación inicial y continua. A ello añaden una dificultad para leer, interpretar y decidir de la manera más pertinente sobre el currículum. Tanto las Bases Curriculares como el Programa de Estudio se les presentan con orientaciones insuficientes para trabajar la argumentación y comprender su rol en la asignatura. Al respecto, una profesora sostiene que el Programa de estudio se enfoca más en Objetivos de aprendizaje:

Haga esta actividad y aquí se está haciendo esto, pero no te explica por qué, sólo te dice que esa es la habilidad que se ocupa, pero no hay un nexo donde tú, en el fondo, puedas tener un patrón y decir "ah, este tipo de actividades se ocupan para esta habilidad", al final, tú lo sacas por conclusión y mucha intuición, al final es mucha intuición (P3E2:11).

Las entrevistadas dan cuenta de una insuficiencia en las definiciones curriculares para la comprensión de la argumentación buscando orientaciones para su implementación en el Programa de Estudio, reconociendo la necesidad de un enfoque de trabajo integrado entre habilidades y conocimientos, lo que es consistente con lo planteado en el currículum. Al respecto, la profesora 4 menciona que:

Trato de trabajar harto las habilidades, pero también el contenido es fuerte […] uno se tienta trabajando el contenido, porque también es más rápido, es mucho más rápido, porque la habilidad tiene todo un proceso de planificación, de que tienes que ocupar más de la clase, y ahí vas perdiendo tiempo (P4E1:15).

Esto pareciera dar cuenta de una noción dicotómica, en la que las habilidades se valoran, pero no se priorizan como contenidos a abordar. Esta lectura curricular evidencia, además, que las profesoras no poseen una comprensión común acerca de la argumentación matemática, enfatizando diferentes

aspectos, como la capacidad de expresarse en un lenguaje matemático o como una herramienta general para la vida. Cuando un estudiante no se enfrenta a oportunidades de argumentación

Pierde la posibilidad de desarrollar habilidades comunicativas, más allá de lo enfocado en Matemática, […] la posibilidad de hablar en un lenguaje matemático que no es igual a los otros, de pensar de manera más profunda, de hacerte entender frente a los demás, […] habilidades en lenguaje matemático y la posibilidad de transmitir un mensaje, de convencer a un otro de que lo que tú estás pensando es correcto, de encontrar las palabras adecuadas (P2E2:46).

Por último, las profesoras coinciden en que las características del contexto socioeconómico de sus estudiantes influyen en el desarrollo y aprendizaje de esta habilidad, determinando e, incluso, obligando a estrechar la propuesta curricular oficial.

DISCUSIÓN

Los hallazgos de este estudio dan cuenta de diversos elementos que configuran el proceso de contextualización curricular que las docentes desarrollan sobre la habilidad de argumentar y comunicar en matemáticas. Se constata una débil construcción del conocimiento pedagógico para el desarrollo de esta habilidad a partir de oportunidades y condiciones de capacitación disímiles que dificultan la comprensión de su relevancia y razón de ser en el currículum.

Los instrumentos que componen el currículum prescrito cumplen una función como "instrumento que regula el carácter de la formación escolar y, por tanto, el dispositivo referencial de lo que se entiende por aprendizaje" (Assáel et al., 2018, p. 88), dirigiendo y orientando la implementación curricular, dado su carácter de "ideario/aspiraciones" que representa el currículum respecto de la sociedad en formación (Gimeno Sacristán, 2010). No obstante, de acuerdo a lo reportado en este estudio, esto pareciera no aplicar a la habilidad de argumentar y comunicar. Por lo anterior, pareciera necesario que las definiciones y orientaciones presentes en los instrumentos curriculares den cuenta del alcance de esta habilidad con mayor precisión. De lo contrario, se corre el riesgo de que el currículum "constituya una mera declaración de intenciones y que no permee en las prácticas pedagógicas" (Díaz Barriga, 2010, p. 43).

Finalmente, la relevancia que las docentes otorgan al contexto socioeconómico de sus estudiantes como un aspecto que determina, en gran medida, el desarrollo de la habilidad constituiría un tipo de creencia que ha sido descrita también como interferencia externa (Bellei et al., 2004), constituyendo una limitante del aprendizaje, a partir de un proceso de contextualización que deriva en un estrechamiento curricular, decisión que contraviene la equidad, uno de los principios básicos de la LGE.

REFERENCIAS

Alsina, A. (2013). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números*, 86, 5-28.

Assaél, J., Albornoz, N., y Caro, M. (2018). Estandarización educativa en Chile: tensiones y consecuencias para el trabajo docente. *Educação Unisinos, 22*(1), 83-90.

Bellei, C., Muñoz, G., Pérez, L. M., y Raczynski, D. (2004). *Escuelas efectivas en sectores de pobreza ¿Quién dijo que no se puede?* UNICEF - Ministerio de Educación.

Bellei, C. y Morawietz, L. (2016) Contenido fuerte, herramientas débiles. Las competencias del siglo XXI en la reforma educativa chilena. En F. Reimers y C. Chung, *Enseñanza y aprendizaje en el siglo XXI. Metas, políticas educativas y currículo en seis países* (pp. 121-162). Fondo de Cultura Económica.

Braun, V., y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101.

Carrascal, B. (2015). Proofs, mathematical practice and argumentation. *Argumentation, 29*(3), 305-324.

Díaz Barriga Arceo, F. (2010). Los profesores ante las innovaciones curriculares. *Revista Iberoamericana de Educación Superior, 1*(1), 37-57.

Espinoza, O., Guzmán, M.A., y Riquelme, S. (2018) Currículum nacional y oportunidades de desarrollo curricular local: proyecto curricular, programas de estudio y plan de formación ciudadana. En A. Arratia y L. Osandón (Eds.) *Políticas para el Desarrollo del Currículum: Reflexiones y Propuestas*. Ministerio de Educación de Chile.

Espinoza, O., Riquelme, S., y Salas, A. (2017). *Contextualización Curricular* [Documento de trabajo curso, Pontificia Universidad Católica de Chile].

Gimeno Sacristán, J. (2010). *¿Qué significa el currículum?* Ediciones Morata.

Goizueta, M., y Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las ciencias, 31*(1), 61-78.

Grundy, S. (1999) *Producto o praxis del Currículum*. Ed Morata.

Guzmán, M., Meza, I., Pascual, E., y Pinto, R. (2007). La contextualización como estrategia de construcción curricular. *Boletín de investigación educacional, 22*(1), 209-230.

Knox, S., y Burkard, A. W. (2009). Qualitative research interviews. *Psychotherapy Research, 19*(4), 566-575.

Ledermann, C. (2021). *Contextualización curricular para el desarrollo de la habilidad matemática de argumentar y comunicar en docentes de educación básica* [Tesis de Magíster, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile].

Ley N° 20370. Ley General de Educación. Diario Oficial de la República de Chile, Santiago, Chile, 12 de septiembre de 2009.

Ministerio de Educación [MINEDUC] (2012). *Bases Curriculares para la Educación Básica*. Autor.

Ministerio de Educación [MINEDUC] (2019). *Bases Curriculares 3° y 4° medio*. Autor.

Ministerio de Educación [MINEDUC] (2020). *Programa de estudio 3° Medio Matemática para formación general*. Autor.

Osandón, L., y Pinto, R. (2018). El currículum nacional y la descentralización: políticas, institucionalidad y saberes. En A . Arratia y L. Osandón, (Eds.), *Políticas para el Desarrollo del Currículum: Reflexiones y Propuestas*. Ministerio de Educación.

Scott, C. (2015). El futuro del Aprendizaje (I) ¿Por qué deben cambiar el contenido y los métodos de aprendizaje en el siglo XXI? Investigación y Prospectiva en Educación. UNESCO, París. Documento de trabajo *Education Research and Foresight*, 13, 1-16.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. Profesorado. *Revista de currículum y formación del profesorado, 9*(2), 1-30.

Stenhouse, L. (2003). *Investigación y desarrollo del currículum*. Ediciones Morata.

Solar, H., y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de Argumentación en el aula de Matemáticas. *Bolema*, *30*(56), 1092-1112.

USOS Y VALORACIÓN DE RECURSOS TIC: RESULTADOS DE UNA ENCUESTA REALIZADA A PROFESORES DE MATEMÁTICA

Verónica Parra, Juliana Orellano

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas

vparra@exa.unicen.edu.ar, orellanojuliana@gmail.com

Este trabajo aborda la cuestión del uso y valoración de los recursos TIC por parte de los profesores de matemática en servicio. Utilizando la noción recurso de Adler (2000), se readapta el instrumento "encuesta" generado por Taquez, Rengifo y Mejía (2017) y se implementa a 128 profesores de matemática de Argentina. Se indagan cinco aspectos específicos: perfil profesional; nivel de formación en usos de recursos TIC; nivel de usos previo al aislamiento social preventivo obligatorio decretado en Argentina; nivel de uso durante este aislamiento y la valoración de usos sobre cuatro tópicos relativos a la enseñanza/aprendizaje de la Matemática. Una de las conclusiones obtenidas es que al comparar el empleo de TIC previo Aislamiento Social Preventivo Obligatorio (ASPO) y durante la misma, "compartir vídeos", "comunicación" y "evaluaciones orales" son las de mayor incremento mientras que el "empleo de graficadores" ha presentado un decrecimiento.

Recursos TIC, Usos y valoración, Encuesta, Profesores de matemática.

INTRODUCCIÓN

Desde hace varios años se vienen desarrollando propuestas que sustentan el uso de las Tecnologías de Información y de Comunicación (TIC) como soporte al proceso de enseñanza/aprendizaje, especialmente en analizar las ventajas que supone su utilización. En este sentido, estas ventajas hacen suponer que estas nuevas tecnologías deben ocupar una parte representativa en la enseñanza de las matemáticas, lo que constituye un desafío para las diferentes esferas de la comunidad educativa: la de los estudiantes, la de los profesores en servicio, de los profesores en formación y de los formadores de profesores, entre otros. Centrándonos en el ámbito de la Matemática, y presentando algunos antecedentes, podemos mencionar algunas investigaciones relativas a los profesores de matemática en formación. Por ejemplo, al análisis de como las TIC fortalecen el desarrollo de competencias (Zavala Urquizo et al., 2021), la caracterización de los conocimientos y creencias entorno a las TIC (Valbuena-Duarte et al., 2021), y al proceso de articulación de estas en sus prácticas pedagógicas (Anaya Manjarrés et al., 2021). Además, podemos referir a los profesores de matemática en servicio. Por ejemplo, a los efectos de la pandemia en los cambios en las prácticas de enseñanza de los profesores (Bonservizi y Sgreccia, 2021), en su formación en TIC y la influencia de estas en sus prácticas pedagógicas (Padilla Escorcia y Conde-Carmona, 2020). Estas y otras investigaciones ponen de manifiesto la importancia de los recursos TIC y evidencian las dificultades de su integración genuina en las clases de matemática, en la formación de profesores y/o en las prácticas de los profesores en servicio. Situándonos en este tópico, entendido como una temática de investigación de relevancia y evolución significativa, principalmente a partir de la pandemia, tenemos por objetivo abordar aquí la cuestión del uso y valoración de los recursos TIC por parte de los profesores de matemática en servicio. De esta manera, nos formulamos las siguientes cuestiones: ¿Qué cambios significativos manifiestan los profesores de matemática respecto al uso de los recursos TIC previo y durante la pandemia? ¿Qué tipo de valoración explicitan estos profesores de este tipo de recursos?

Readaptamos el instrumento "encuesta" generado por Taquez et al. (2017) y lo implementamos a un conjunto de 128 profesores de matemática de Argentina entre el año 2020 y el año 2021. Indagamos sobre cinco aspectos específicos: perfil profesional; nivel de formación en usos de recursos TIC; nivel de usos previo al aislamiento social preventivo obligatorio decretado en Argentina; nivel de uso durante este aislamiento y la valoración de usos sobre cuatro tópicos relativos a la enseñanza/aprendizaje de la Matemática.

MARCO CONCEPTUAL

Se adopta la noción de *recurso* de Adler (2000) quien afirma que "la funcionalidad de un recurso en y para la enseñanza de las matemáticas reside en su uso práctico, más que en su mera presencia" (p. 1). Define recurso como aquello que puede nutrir, revitalizar, aportar nuevos elementos, alimentar de nuevo o de manera diferente la práctica matemática escolar. Si bien, en este trabajo exploramos sobre los recursos digitales (materiales), pretendemos conocer, a partir de lo explicitado por los profesores, como esos recursos han nutrido (y nutren en el sentido de Adler) su práctica matemática actual y las diferencias pre y durante el Aislamiento Social Preventivo Obligatorio (de aquí en adelante, ASPO) que se instaló en Argentina durante la pandemia.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Utilizando la noción de recurso de Adler (2000), se readapta el instrumento "encuesta" generado por Taquez et al. (2017) y se implementa a un conjunto de 128 profesores de matemática en servicio en el nivel secundario y superior de Argentina. El muestreo fue intencional y se trató de llegar a la mayor cantidad de profesores de matemática posibles. Se distribuyó la encuesta a través de un formulario de Google compartido vía mail, redes sociales, entre otros, y es importante mencionar que esta instancia del trabajo se realizó en plena pandemia, a inicios de noviembre del 2020. Con una primera versión del instrumento se realizó una prueba piloto con 5 profesores-investigadores de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN, quienes además de responderla, realizaron observaciones y comentarios que fueron atendidos, generando una segunda adaptación a finales del mismo mes. La encuesta indaga sobre aspectos específicos del uso y valoración de recursos TIC: situación profesional; nivel de formación en el uso de recursos TIC; nivel de uso en la situación previa a la Pandemia; situación actual y valoración de recursos TIC y su uso en la enseñanza de saberes específicos de la Matemática. La encuesta estuvo conformada por 6 secciones con un total de 27 ítems. La primera sección refiere a la presentación de la encuesta; la segunda, al perfil del encuestado; la tercera, a sus capacitaciones en recursos TIC; la cuarta y quinta, al uso de recursos TIC para las clases (preparación, desarrollo y evaluación), antes (cuarta sección) y después (quinta sección) de decretarse el ASPO, respectivamente. La sexta sección, sobre la valoración para la enseñanza/aprendizaje de la matemática. El análisis de los resultados se realiza a utilizando técnicas estadísticas tales como tablas de frecuencias, gráficos de barras, nube de palabras, tablas de doble entrada que permiten comparar valores de dos variables, tabla de variaciones, entre otros. Presentamos aquí algunos resultados de todas las secciones, excepto, la primera.

RESULTADOS PRELIMINARES

Los resultados de la segunda sección (perfil del encuestado) resultan ser los siguientes: la mayor parte de los profesores pertenecen a los rangos etarios 30-39 (35,9%) y 40-49 años (31,3%). Entre 20-29

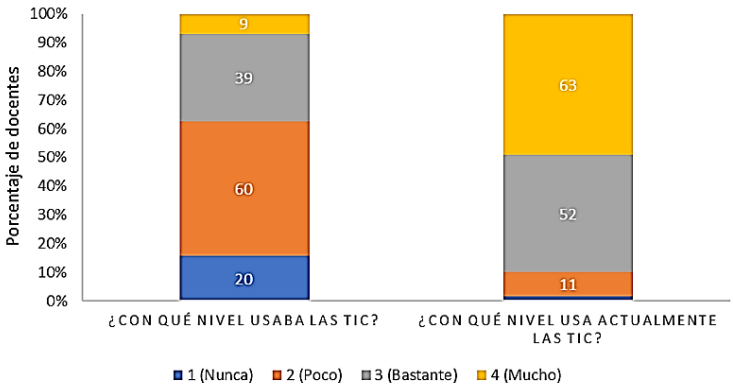
años, un 14,8%; entre 50-59 años, un 14,8% y mayores de 60 años, un 3,1%. Respecto al máximo nivel académico alcanzado, el 50,8% de los profesores tiene un título de nivel superior no universitario, mientras que el 33,6% es profesor graduado en la universidad. Un 15,6% posee además estudios de posgrado. Al considerar las dos variables (rango etario y máximo nivel académico alcanzado) simultáneamente se observa que la mayor proporción de los profesores tienen entre 40-49 años y cuenta con título superior no universitario. En cuanto a la antigüedad docente y al tipo de establecimiento en el cual se desempeñan (de gestión privada o de gestión pública o ambos en simultáneo), la mayor proporción de profesores posee entre 7 y 13 años de experiencia y un 64,8% se desempeña en la gestión pública. Finalizando esta sección, la mayor parte de los profesores trabaja en el nivel secundario superior (con grupos de estudiantes de 15, 16 y 17 años).

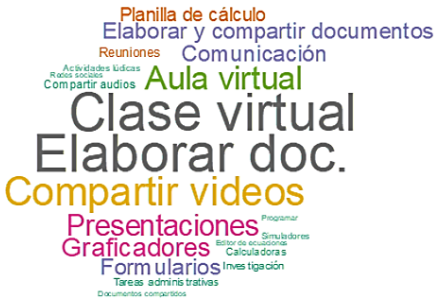
Respecto a la tercera sección de la encuesta (capacitaciones y nivel de formación en recursos TIC en los últimos 5 años), el 43,8% de los profesores manifestó haber recibido entre 1 a 3 cursos/capacitaciones; el 28,9% entre 4 a 6; el 10,9% entre 7 a 10 cursos; el 10,4% más de 10 cursos y el 7% ningún curso/capacitación. Comparamos los cursos realizados sobre TIC durante los últimos cinco años con el rango etario al que pertenecen, para analizar si la edad de los docentes afecta al número de cursos/capacitaciones TIC recibidas (con una confianza del 95%), concluimos que no hay evidencia que apoye la falta de independencia entre las variables (valor $p = 0,91$). Indagando en formación TIC más específica, es decir, en aplicaciones y softwares y considerando que las posibles respuestas para estos casos eran “mucha”, “bastante”, “poca” o “ninguna” formación, concluimos que el porcentaje de profesores que aseguran tener “mucha” formación es la siguiente: en procesadores de texto: un 50%; en planillas de cálculo, un 7%; en presentaciones por diapositivas, un 33,6%; en aplicaciones para programar, un 7%; en servicios de videoconferencias, un 12,5%; y en plataformas de enseñanza, un 17,2%.

Describimos el nivel de uso de los recursos TIC comparando los resultados de la cuarta sección de la encuesta (previo a decretarse el ASPO) con los resultados de la quinta sección (durante el ASPO). Así, concluimos que el empleo de TIC para el desarrollo de clases virtuales se incrementó con 58 menciones entre la etapa previa al ASPO y durante la misma. También se observa el incremento del empleo de las TIC para compartir videos, con 29 menciones más y en la elaboración de documentos, con un incremento de 24 menciones. En cuanto a las disminuciones, se observa un descenso importante en el empleo de softwares graficadores, con 25 menciones menos durante el ASPO. La nube de palabras del lado derecho de la Figura 1 sintetiza las menciones a los usos durante el ASPO. Aquí, se puede observar que “clase virtual” y “elaborar documentos” además de “compartir videos” y “aula virtual”, son los usos más mencionados. El lado derecho de la misma figura presenta un gráfico de barras con la clasificación en función de las respuestas “mucho”, “bastante”, “poco” o “ningún” nivel de uso de recursos TIC.

Figura 1.

Del lado izquierdo, recursos TIC en ASPO y previo al ASPO. Del lado derecho, usos más frecuentes en matemática durante el ASPO.





Cuando se compara a qué categorías y subcategorías corresponden los softwares mencionados por los docentes durante el ASPO y la etapa previa al mismo, se observa que los referidos a "comunicación" son los que más aumentos en menciones tienen, siendo la subcategoría "clase virtual" la más destacada. Si nos referimos a los softwares que disminuyeron en mayor proporción, se observan los de la categoría "específicos" y dentro de ella, como subcategoría, el "uso de graficadores" es la que más se redujo. La Tabla 1 presenta los datos de esta variación.

Tabla 1.

Variaciones de usos de TIC previo y durante el ASPO.

Usos	Durante el ASPO	Var.	Usos	Durante el ASPO	Var.
Actividades lúdicas	3	1	Graficadores	26	-25
Aula virtual	34	17	Informes	0	-1
Calculadoras	4	-4	Intercambios en foros	0	-1
Capacitaciones	0	-4	Investigación	5	4
Clase virtual	59	58	Planillas de cálculos	15	0
Compartir audios	7	7	Presentaciones	28	2
Compartir videos	44	29	Programar	1	-1
Comunicación	22	21	Redes sociales	1	0
Documentos compartidos	2	-2	Resoluciones algebraicas	0	-3
Editor de ecuaciones	1	-2	Reuniones	8	6
Elaborar documentos	60	24	Seguimiento académico	0	-1
Elaborar y compartir documentos	20	20	Simuladores	3	2
Formularios	22	21	Tareas administrativas	6	5

Respecto a la variación del uso de recursos TIC en los momentos de acreditación/evaluación, se observa un destacado incremento en el uso de evaluaciones orales con 38 menciones más y, en segundo lugar, un destacado incremento en el uso de formularios con 34 menciones más. Estas variaciones se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2.

Variación de menciones de usos de TIC en los momentos de acreditación/evaluación.

Usos	Durante el ASPO	Var.	Usos	Durante el ASPO	Var.
Análisis estadístico	1	-1	Evaluaciones orales	43	38
Aula virtual	22	13	Fichas interactivas	3	3
Autocorrección	3	-2	Formularios	50	34
Calcular	4	-2	Generacion de multimedias	5	3
Compartir examen	7	6	Graficar y/o analizar funciones	5	1
Construcción de gráficos	2	-1	Participación en foros	2	1
Construcciones geométricas	1	-2	Planilla de registro	4	2
Cuadros conceptuales	1	1	Presentaciones	10	-3
Demostraciones	1	1	Recepción de trabajos por mail	2	2
Devoluciones	4	3	Simuladores	0	-1
Disco virtual	1	1	Tutorías	1	1

Finalmente, respecto a la valoración de los recursos TIC (sexta sección de la encuesta), específicamente, a la valoración de los usos de estos recursos como instrumentos para: 1) favorecer el estudio escolar de la matemática, 2) para cooperar/colaborar con la actividad docente, 3) para facilitar el desarrollo de actividades de exploración de los estudiantes y 4) para favorecer la retroalimentación con los estudiantes; la mayor parte de las respuestas fue, en los cuatro tópicos, la opción “bastante” (de entre las posibles opciones “nada”, “poco”, “bastante” y “mucho”). Más precisamente, un 69% para el primer tópico; un 63% para el segundo; un 59% para el tercero y un 66% para el cuarto, marcando una gran diferencia con las restantes tres opciones.

CONCLUSIONES

Las conclusiones más relevantes son que la mayor proporción de los profesores tienen entre 40-49 años, cuenta con título superior no universitario, posee entre 7 y 13 años de experiencia y un 64,8% se desempeña en la gestión pública, en el nivel secundario superior (con grupos de estudiantes de 15, 16 y 17 años). Respecto a las capacitaciones y nivel de formación en recursos TIC en los últimos 5 años, el 43,8% de los profesores manifestó haber recibido entre 1 a 3 cursos/capacitaciones, siendo esto independiente de la edad con la variable rango etario (valor p = 0,91, con una confianza del 95%). Aseguran tener “mucha” formación en procesadores de texto y “poca” en presentaciones por

diapositivas. Se observó un incremento del empleo de las TIC para compartir videos, con 29 menciones más y en la elaboración de documentos, con un incremento de 24 menciones. En cuanto a las disminuciones, se observa un descenso importante en el empleo de softwares graficadores con 25 menciones menos durante el ASPO. Los profesores manifiestan en cambio, un aumento de recursos referidos a "comunicación". Si nos referimos a los softwares que disminuyeron en mayor proporción se observan los de la categoría "específicos" y dentro de ella, como subcategoría, el "uso de graficadores" es la que más se redujo. Respecto a la variación del uso de recursos TIC en los momentos de acreditación/evaluación, se observa un destacado incremento en el uso de evaluaciones orales con 38 menciones más y, en segundo lugar, un destacado incremento en el uso de formularios con 34 menciones más. Finalmente, respecto a la valoración de los recursos TIC, el mayor porcentaje de profesores alude a que favorecen el estudio escolar de la matemática.

Estos resultados llaman la atención en varios aspectos. Por un lado, y según lo que se mencionó en antecedentes, los recursos TIC se suponen útiles y favorecedores de la enseñanza/aprendizaje de la matemática. Si bien aquí es a lo que aluden la mayor parte de los profesores, esto no se condice que los aspectos anteriores, puesto que, por ejemplo, hubo un decrecimiento en el empleo de software graficadores. Este tipo de recursos, como por ejemplo GeoGebra, potencia el análisis de diversos temas de estudio, tales como desplazamientos de funciones a través de deslizadores. Por otro lado, los resultados del uso de evaluaciones orales (en aumento durante la pandemia), resulta interesante puesto que, poder explicitar en palabras aspectos vinculados al estudio de la matemática, permite desarrollar competencias que desde lo escrito no saldrían a la luz.

Finalmente, concluimos de lo presentado hasta aquí, y teniendo en cuenta que el análisis de la encuesta aún está en proceso, que los profesores se han nutrido (en el sentido de Adler) de los recursos TIC cuyo uso casi obligado generó la pandemia y ha permitido ampliar el sistema de recursos de muchos de los profesores de matemática.

REFERENCIAS

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*(3), 205-224.

Anaya Manjarrés, C., Polo de Oro, M. P., Tovar Ortega, T., y Solorzano Movilla, J. G. (2021). Articulación de las TIC en docentes en formación en educación matemática. *Dictamen Libre*, *29*, 1-16.

Bonservizi, V., y Sgreccia, N. (2021). Las TIC en el aula de formación de profesores en Matemática. Devenir en 2020 en el caso de la UNR. *UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *63*, 1-21.

Padilla Escorcia, I. A., y Conde-Carmona, R. (2020). Uso y formación en TIC en profesores de matemáticas: un análisis cualitativo. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, *60*, 116-136.

Taquez, H., Rengifo, D., y Mejía, D. (2017). *Diseño de un instrumento para evaluar el nivel de uso y apropiación de las TIC en una institución de educación superior* [Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, México].

Valbuena-Duarte, S., Merlano Meza, D., y Conde Carmona, R. (2021). Conocimientos y creencias entorno a las TIC de profesores de matemática en formación. En J. G. Moriel Junior (Ed.), *V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 50-57). Red MTSK Iberoamericana.

Zavala Urquizo, D., Cobos Velasco, J., Muñoz Correa, K., y Muñoz Correa, G. (2021). TIC y el fortalecimiento de competencias matemáticas en estudiantes de pedagogía de la enseñanza matemática. *Horizontes. Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, *5*(21), 1363-1374.

DOMINIO E IMPLEMENTACIÓN DE LOS SOFTWARES EDUCATIVOS

Maicol Jara, Kevin López, Kevin Nova, Katia Queupul, Neyse Toledo

Universidad Católica de Temuco

mjara2018@alu.uct.cl, klopez2019@alu.uct.cl, knova2017@alu.uct.cl, kqueupul2019@alu.uct.cl, ntoledo@uct.cl

Durante la pandemia de COVID-19, los docentes de enseñanza media en matemática con el objetivo de generar aprendizajes significativos en el estudiante integran herramientas digitales que complementan los distintos ejes de la matemática, dentro de estas herramientas podemos encontrar los softwares educativos, los cuales son considerados como material de apoyo que le permite al docente acercar elementos teóricos a material interactivo para así poder generar un mejor aprendizaje. En esta investigación se buscó ver como los docentes integran los softwares educativos, obteniéndose como resultados que tan solo un poco más de la mitad logra integrar de manera satisfactoria.

Software educativo, Recursos tecnológicos, Educación Matemática.

INTRODUCCIÓN

La pandemia de coronavirus que afecto al mundo el año 2020 obligó a muchos establecimientos educacionales en Chile a replantear su metodología de enseñanza. De esto surge la metodología de enseñanza virtual de forma masiva a nivel nacional. Este cambio de metodología se realiza con la finalidad de cumplir las restricciones sanitarias impuestas por el Ministerio de salud. Así, se implementan las clases virtuales y, en dicho cambio de metodología se vieron involucrados los elementos tecnológicos del hogar de cada estudiante.

La tecnología es un recurso mediador entre el estudiante y su aprendizaje (Castillo, 2020), por lo que en este contexto surge la problemática de ¿Cómo los docentes integraron o integran los diferentes Softwares Educativos (SE) durante los años 2020, 2021 y 2022, en el área de matemática de primero a cuarto año de educación media? El propósito de esta investigación es describir lo que conocen los docentes del software que utilizan y cómo los implementan con sus estudiantes. Así, con esta información se busca identificar las necesidades de los docentes en el área de manejo tecnológico e implementación de los SE. Es importante estudiar el uso de los SE y su implementación, pues en la actualidad tiene un rol protagónico dentro del desarrollo de las sociedades educativas, cumpliendo un papel importante como medio de la comunicación e información en la enseñanza y el aprendizaje (Fernández et al., 2017).

De lo anterior nos surgió la siguiente interrogante: ¿integran de manera correcta los SE los docentes de matemática? Para buscar soluciones primero debemos identificar cuáles son las falencias de los docentes al momento de utilizar un SE, falencias tanto en el ámbito de dominio del recurso como de implementación. Es debido a esto que surge la siguiente pregunta: ¿qué conocen los docentes del software que utilizan y cómo los implementan con sus estudiantes?, por lo que como objetivo general se resulta en describir lo que conocen los docentes del software educativo que utilizan y cómo lo implementan con sus estudiantes.

SOFTWARE EDUCATIVO

Es una aplicación que proporciona mucha fiabilidad para el docente a la hora de hacer y realizar sus clases, por el motivo que dispone de una variedad de programas computacionales para realizar distintos métodos que faciliten la enseñanza y el proceso de aprendizaje del estudiante. Este se puede especificar como un programa computacional que facilite el proceso de enseñanza de los estudiantes y, que debe poseer características estructurales y funciones que puedan ser de apoyo en el proceso de aprender, enseñar, administrar para quien esté destinado la enseñanza y el aprendizaje (Vidal et al., 2010).

Angeli y Valanides (2009, p.155) declaran que "Cuando se observa el contexto actual de preocupación por la presencia de las Tecnologías de la información y Comunicación (TIC) en educación, se percibe la necesidad de que exista una orientación teórica que fundamente y guíe al profesorado en la integración de las TIC". Por esta razón, se construye el marco de saberes docente para la integración de la tecnología denominado "Conocimiento Tecnológico y Pedagógico del Contenido" de la traducción "Technological Pedagogical Content Knowledge", más conocido como TPACK Este modelo de representaciones gráficas, desarrollado por Mishra y Koehler entre los años 2006 y 2009, está basado en la construcción de Lee Shulman, modelo que será utilizado para identificar el conocimiento de los profesores con los Softwares Educativos (Koehler et al., 2015).

Según UNIR (2020), algunas de las bases principales del TPACK son el Conocimiento Tecnológico (TK) Conocimiento Pedagógico (PK) y Conocimiento del contenido (CK), de las cuales utilizaremos estas tres categorías generales para describir como los docentes se encuentran integrando los SE.

METODOLOGÍA

La investigación tiene carácter cualitativo, puesto que según Ugalde y Balbastre (2013) la metodología cualitativa se caracteriza por el contacto entre el investigador y el sujeto a investigar, generando así una situación de cercanía para el individuo a estudiar. El alcance de esta investigación es exploratorio, ya que es primordial analizar el dominio e implementación que tienen los docentes al utilizar los SE. La investigación es aplicada en fenómenos que no se han investigado previamente y se tiene el interés de examinar su comportamiento y sus características (Ramos, 2020).

Esta investigación se realizó en la ciudad de Temuco y alrededores. La entrevista se aplicó a docentes de matemática en enseñanza media que cumplían con los siguientes requisitos: haber realizado clases en modalidad online el año 2020 o 2021, haber realizado clases a cursos de primer a cuarto año medio utilizado software educativo en sus clases.

Ya entrando en el campo de estudio, se busca un mínimo de 12 docentes, se les entrega dos cartas, una de consentimiento informado la cual deberán llenar y firmar. Esta carta, también, explica que las respuestas serán totalmente confidenciales y solo serán para el uso de esta investigación. Una segunda carta contiene la información de los integrantes de la investigación, investigador a cargo y objetivo de estudio.

Como instrumento se utilizó la entrevista semi estructurada, puesto según Tejero (2021) la entrevista es una de las técnicas cualitativas más utilizadas en la investigación sociológica. Esta entrevista está dirigida hacia el docente y consta de una serie de preguntas que apuntan a distintas categorías, dicha entrevista es de carácter semi estructurado. Se construyó en base a las tres categorías básicas del

modelo TPACK junto a la práctica docente. El piloto se realizó a un total de 4 docentes y, luego de ello fue corregida la entrevista, Dicha corrección constituyó la entrevista final.

RESULTADOS PRELIMINARES

Con respecto a la categoría (TK), mediante las preguntas, se logra llegar a los siguientes resultados. El 67% de los docentes entrevistados reconoce y describe las herramientas que presenta el software educativo que más utiliza en sus clases. Por el contrario, un 33% de los docentes no reconoce las herramientas como "graficar funciones, modelar figuras y calcular medidas" de dicho software. Por otro lado, el 78% de los docentes no investigaron sobre nuevos softwares educativos, mientras que el 22% de los docentes si investiga, independientemente de los recursos o necesidades que presenten sus centros educacionales.

Dadas las preguntas correspondientes a la categoría (CK), podemos mencionar que un 11% de los entrevistados destaca que no utiliza algún software en la implementación de sus clases, respecto a los ejes de matemática. Un 33% de los docentes manifiesta que el software educativo lo utilizan en solo un eje matemático. El 57% restante de los entrevistados menciona que lo utilizan en más de un eje matemático, dentro de los cuales podemos destacar la implementación en los ejes de geometría y de algebra y funciones. Por consiguiente, el 63% de los docentes expresan que no pueden abarcar todo el contenido de los ejes en los cuales utilizan dichos softwares, esto debido que el software que utilizan solo les sirve para elementos matemáticos puntuales, mientras que un 37% logra abarcar la mayoría del contenido de un eje en específico. Un 45% de los docentes menciona que sus estudiantes generan mayor interés y aprendizaje, respecto a los contenidos correspondientes, cuando se trabaja con el software educativo. Un 22% menciona que se logra apreciar el interés de los alumnos, pero aun así es difícil identificar si generan aprendizajes significativos o no, debido que no utilizan evaluaciones formativas o calificativas luego del uso de los SE. Por último, un 33% no identifica esta característica.

Con respecto a la categoría (PK), podemos encontrar que un 67% de los entrevistados adapta el nivel de dificultad de los softwares educativos, mientras que el 33% restante no menciona una adaptación de los softwares al contexto de sus estudiantes. Por lo anterior, el 56% de los docentes evalúa a sus estudiantes a través de los softwares educativos y, al contrario, un 44% de los docentes no considera una evaluación con uso de con uso softwares.

En respuesta a las preguntas correspondientes a la práctica docente, el 89% de los entrevistados prefiere seguir usando los softwares educativos luego de haber terminado las clases de modalidad online. Un 11% de ellos manifiesta no seguir implementándolos. En este sentido, los docentes expresan que sería muy conveniente capacitarse en nuevos softwares u en otros enfocados en el área de matemáticas, pues comentan que estos serían beneficiosos para fortalecer el aprendizaje, y para encontrar el momento pertinente para integrarlos en el aula. Uno de los entrevistados expresa que "Un docente jamás deja de aprender" y que "es beneficioso actualizar los conocimientos tanto para el profesor como para los estudiantes".

CONCLUSIONES PRELIMINARES

La pandemia trajo consigo la necesidad de trabajar con recursos tecnológicos, abriendo un gran campo de posibilidades a los docentes para llevar a cabos clases de manera online. Esto provocó que

hoy en día los docentes reconozcan los softwares educativos que son de carácter matemático. Entre dichos softwares educativos destaca GeoGebra, con el cual los docentes se encuentran más familiarizados, pues presenta amplias herramientas que facilitan el llevar a cabo las clases sobre los ejes de Geometría y de Álgebra y Funciones.

Cabe destacar que, aunque el software educativo les abre un gran campo de posibilidades a los docentes, es complicado poder llevar a cabo una unidad completa, dadas las restricciones que se pueden encontrar los docentes en sus establecimientos educacionales. Por ejemplo, en el aula de clases, la poca conectividad a Internet, el tiempo, el horario (considerando las dos horas pedagógicas), los equipos que se encuentran en sus respectivas escuelas. Estos factores influyen en la capacidad de los docentes de poder trabajar de manera eficaz en la clase, dado que logran encontrarse con algún inconveniente (Computadores lentos, poca capacidad RAM, etc.) al momento de implementar o trabajar con el software educativo.

En cuanto al lado pedagógico, se puede concluir que la gran mayoría de los docentes adapta el nivel de dificultad del software educativo a sus estudiantes. Esto se justifica en el planteamiento didáctico de la enseñanza de la matemática que, requiere la necesidad de cambiar el paradigma del profesor hacia el manejo de estrategias didácticas que beneficien el proceso de enseñanza y aprendizaje del estudiante (Meneses, 2014). Dado este hecho, se puede apreciar como los docentes tratan de incorporar a sus planificaciones la intención de que los estudiantes realicen actividades evaluativas con los softwares. Igualmente, existen diversos factores, tales como la organización en el laboratorio; equipos en mal estado; la presentación de la actividad o evaluación a tratar, provocando que dicha evaluación deba llevarse a cabo en más de las horas correspondientes a la clase. Con esto podemos concluir el que no lo hagan, dado que no existe el tiempo adecuado para poder realizar las actividades.

La gran mayoría de los entrevistados sigue implementando los softwares educativos después de haber finalizado la pandemia, puesto que constituyen un valioso medio de enseñanza para la educación y formación general del estudiante. De la misma manera que el multilateral y complejo proceso de enseñanza-aprendizaje necesita de una diversidad de tipos de clase, métodos y medios para el logro de los objetivos, cada tipo de software está orientado hacia el cumplimiento de funciones didácticas específicas. Mientras más visual se haga el aprendizaje, mayor será el volumen de contenidos que se logrará procesar e incorporar en forma de conocimientos. De esta forma se alcanza también una mejor retención (Candelario-Dorta et al., 2018). Por otro lado, todos los docentes están dispuestos a recibir una capacitación en relación a softwares educativos dirigidos a la asignatura de matemática, pues tienen en cuenta que los objetivos se pueden alcanzar con mayor calidad; pueden abordar nuevos conocimientos, emplear métodos y procedimientos más activos; pueden aprovechar nuevas formas de evaluación que conduzcan a un aprendizaje más integral, a la comprobación del desarrollo de habilidades más generales y útiles para vivir en un mundo informatizado (Candelario-Dorta et al., 2018).

REFERENCIAS

Angeli, C., y Valanides, N. (2009). Epistemological and methodological issues for the conceptualization, development, and assessment of ICT–TPCK: Advances in technological pedagogical content knowledge (TPCK). *Computers & Education, 52*, 154-168.

Binda, N. U., y Balbastre-Benavent, F. (2013). Investigación cuantitativa e investigación cualitativa: buscando las ventajas de las diferentes metodologías de investigación. *Revista de Ciencias económicas, 31*(2), 179-187.

Candelario-Dorta, O. (2018). El software en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Física. *EduSol, 18*(63), 123-136.

Castillo, L. M. (2020). Lo que la pandemia nos enseñó sobre la educación a distancia. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, 50*, 343-352.

Fernández, I. Riveros, V., y Montiel, G. (2017). Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de apropiación. *Omnia, 23*(1), 9-19.

Koehler, M. Mishra, P., y Cain, W. (2015). ¿Qué son los Saberes Tecnológicos y Pedagógicos del Contenido (TPACK)? *Virtualidad, Educación y Ciencia*, *6*(10), 9-23.

Meneses, M., y Artunduaga, L. (2014). *Software educativo para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el grado 6.* [Tesis de Licenciatura, Universidad Católica de Manizales, España].

Ramos, C. (2020). Los alcances de una investigación. *CienciAmérica. 9(3), 1-5*.

Tejero, J. (2021). *Técnicas de investigación cualitativa en los ámbitos sanitario y sociosanitario.* Ediciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.

UNIR. (2020). La metodología TPACK: en qué consiste este modelo y cuáles son sus ventajas. https://www.unir.net/educacion/revista/tpack-que-es/

Vidal Ledo, M., Gómez Martínez, F., y Ruiz Piedra, A. M. (2010). Software educativo. *Educación medica superior, 24*(1), 97-110.

USOS DE LA DIFERENCIAL EN UNA LECCIÓN SOBRE EL CONCEPTO DE INTEGRAL

Manuel Alejandro Verón[1], Belén Giacomone[2], Margarita del Carmen Benítez[1]

[1]Universidad Nacional de Misiones, [2]Universidad de la República de San Marino

alejandroveron@fceqyn.unam.edu.ar, belen.giacomone@unirsm.sm, mbenitez@fceqyn.unam.edu.ar

En este trabajo, se presenta el análisis y valoración de la idoneidad didáctica de una lección de un libro de texto que relaciona la integral y la diferencial. Para el análisis se emplean las nociones de idoneidad didáctica, configuración didáctica y configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos del Enfoque Ontosemiótico. El objetivo es identificar potenciales conflictos y mejoras en el aprendizaje de los significados del diferencial pretendidos en el libro de texto. Los resultados permiten al profesor reflexionar sobre las potencialidades y limitaciones del libro y anticiparse a posibles conflictos, aspectos fundamentales para mejorar la gestión del proceso instruccional.

Diferencial, Idoneidad Didáctica, Conflictos semióticos, Libro de texto, Reflexión del profesor.

INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El uso del libro de texto es un recurso ampliamente usado en las clases de matemáticas. Es considerado como un plan de acción o planificación de un proceso de enseñanza y aprendizaje (Frank y Thompson, 2021) que usan con frecuencia los profesores y que condiciona lo que puede suceder en las aulas (Castillo et al., 2022), y, por lo tanto, es importante que puedan anticipar y resolver potenciales conflictos, como así también proponer alternativas para mejorar los aprendizajes de los estudiantes. Por tal motivo, Konic et al. (2010) plantean la necesidad de revisión continua para su evaluación en su aspecto disciplinar y didáctico.

En los cursos de cálculo o análisis matemático de diferentes carreras universitarias, el estudio de los conceptos de integral y diferencial ocupan un lugar importante. Resulta de interés indagar cómo se presenta las relaciones de estos conceptos en una lección de un libro de texto, teniendo en cuenta las dificultades de los estudiantes reportados por la literatura (Ely, 2017; Jones, 2015). En cuanto a estudios que abordan su tratamiento en libros de texto (como Gómez, 2019; López-Gay et al., 2015; Oldenburg, 2016; Pulido, 2010), se reportan dificultades relacionadas con la forma en que se los presenta.

Partimos de considerar que una lección "es un proceso de instrucción (potencial o planificado) que se compone de la secuencia de prácticas matemáticas y didácticas que propone el autor para el estudio del tema en cuestión" (Burgos et al., 2020, p. 42). De esta manera, es posible valorar la idoneidad didáctica de lecciones de libros de texto.

El objetivo de este artículo es compartir análisis y reflexiones de una lección sobre el estudio de la integral en la que interviene la diferencial, teniendo en cuenta los conocimientos didáctico-matemáticos con relación al diferencial de una función.

A continuación, se sintetizan las nociones teóricas y metodológicas que sirven de fundamento para abordar el problema de investigación; posteriormente, se presenta el análisis de una lección de un libro de texto; finalmente, se discuten algunas implicaciones para la formación de profesores.

MARCO TEÓRICO-METODOLÓGICO

El análisis de los conocimientos y los significados implicados en el cálculo integral, y de las reflexiones sobre su uso en relación con el concepto de diferencial, se realiza desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino et al., 2020). En particular, la noción de Idoneidad Didáctica (Breda et al., 2018; Godino, 2013) permite abordar el problema del análisis didáctico permitiendo describir y caracterizar las configuraciones didácticas propuestas (lecciones del libro de texto) identificando elementos que puedan ser potencialmente conflictivos, desde el punto de vista de los conocimientos matemáticos pretendidos, de las posibilidades de los estudiantes, y del proceso de instrucción que se propone.

La idoneidad didáctica se considera como un criterio sistémico de optimización de un proceso de enseñanza de las matemáticas (Godino et al., 2020). El grado de idoneidad didáctica de una lección de un libro de texto podrá incrementar en la medida se tenga en cuenta los diversos significados de los objetos matemáticos del contenido en estudio. Por consiguiente, la valoración de este proceso se realiza teniendo en cuenta los conocimientos didáctico-matemáticos en relación con la diferencial de una función (Verón y Giacomone, 2021).

Para el análisis de las configuraciones didácticas se utilizan las nociones de significado pragmático y configuración ontosemiótica (ej. Godino et al., 2017), la noción de configuración didáctica (Godino et al., 2014) y las facetas (epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e instruccional) e indicadores de idoneidad didáctica.

En este trabajo seleccionamos para analizar una lección (una configuración didáctica), con relación al concepto del diferencial de una función tomada del libro de texto de cálculo Stewart (2012). Las herramientas del EOS permiten estudiar potenciales conflictos epistémicos, relacionados a los significados y objetos institucionales presentes en la lección; potenciales conflictos cognitivos, relativos a los conocimientos previos; y potenciales conflictos instruccionales, relacionados a los modos de interacción y uso de los recursos didácticos (Burgos et al., 2020).

ANÁLISIS DE UNA CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA PARA EL ESTUDIO DE LA INTEGRAL

A continuación, seleccionamos a modo de ejemplo una sección del libro de texto de cálculo (una configuración didáctica) de Stewart (2012).

Figura 1.

Uso de la diferencial en la integral.

> **NOTA 1** Leibniz introdujo el símbolo $\int$ y se llama **signo de integral**. Es una S alargada y se eligió debido a que una integral es un límite de sumas. En la notación $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ se llama **integrando**, y a y b se conocen como **límites de integración**; a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**. Por ahora, el símbolo dx no tiene significado por sí mismo; la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$, vista como un todo, es un símbolo único. La dx indica simplemente que la variable independiente es x. El procedimiento para calcular una integral se llama **integración**.

Fuente: Stewart (2012, p. 372).

Prácticas y objetos

Para el análisis de las facetas epistémicas y cognitivas, en primer lugar, se describen las prácticas matemáticas que se proponen en cada lección, identificando los objetos matemáticos primarios que intervienen en las mismas.

Luego de la presentación de la definición de la integral definida como el límite de suma (Stewart, 2012, pp. 371-372), el libro de texto realiza una nota donde hace referencia a la diferencial de x. En las prácticas que se presentan predomina un lenguaje natural y simbólico. Se destaca la proposición:

"el símbolo dx no tiene significado por sí mismo" (Stewart, 2012, p. 372).

"la expresión, $\int_a^b f(x)dx$, vista como un todo, es un símbolo único" (Stewart, 2012, p. 372).

"dx indica simplemente que la variable independiente es x" (Stewart, 2012, p. 372).

Relaciones

En esta configuración didáctica se pretende establecer relaciones entre la integral y la diferencial, indicando que en la expresión de la integral definida la función de la dx es solo para indicar cual es la variable independiente de la integración.

Procesos

Conceptualización/definición: se plantea que la dx no tiene significado por sí mismo y que solamente indica la variable de integración en la expresión de la integral definida.

Interpretación/representación: se menciona que la expresión de la integral definida debe ser considerada como un único símbolo y que la dx indica la variable independiente.

Potenciales conflictos

En la configuración didáctica se observa la nueva conceptualización de la diferencial como un indicador de la variable de integración, con relación a la integral definida. Esto puede llegar a generar un conflicto epistémico y cognitivo ya que en secciones anteriores se presenta a la diferencial como "dx es una variable independiente; esto es, dx cualquier número real" (Stewart, 2012, p. 253). Por otro lado, al mencionar que "dx no tiene significado por sí mismo" (Stewart, 2012, p. 372), se puede originar un potencial conflicto epistémico-cognitivo (Ely, 2017; Jones, 2015) ya que previamente, el libro de texto refuerza la idea de $dx = \Delta x$. Además, en páginas siguientes se retoma este hecho mencionando, sin muchas explicaciones, cómo en la definición de la integral se reemplaza Δx por la dx en la expression $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$ (Stewart, 2012, p. 374).

REFLEXIONES FINALES

En este artículo se ha presentado el análisis de una lección de un libro de texto de cálculo para el estudio de la integral que involucra al diferencial de una función, con el objetivo de identificar posibilidades, limitaciones y potenciales conflictos epistémico-cognitivos del libro de texto para la enseñanza y el aprendizaje de la diferencial.

En la configuración didáctica se refleja un uso instrumental de la diferencial como un elemento necesario para definir a la integral, con lo cual es posible asociar el uso de la diferencial al significado parcial de Diferencial de Cauchy (Verón y Giacomone, 2021) ya que se menciona que la diferencial de x indica la variable independiente y que no tiene significado. Esto va en línea con lo que ha sido reportado en diversas investigaciones como uno de los usos de la diferencial que genera diferentes conflictos epistémicos y cognitivos en los estudiantes (por ejemplo: Burgos et al., 2021; Hu y Rebello, 2013; López-Gay et al., 2015).

Los resultados permiten describir y caracterizar potenciales conflictos epistémicos, relacionados con los significados parciales del diferencial, donde cobra un papel central el uso del lenguaje símbolo y su relación con la integral; también, se identifican potenciales conflictos cognitivos, relacionados principalmente con los saberes previos de los estudiantes. Teniendo en cuenta tales conflictos, con este de tipo análisis el docente podría reflexionar sobre la organización del contenido y el orden de la secuencia de actividades y, así, proponer cambios en la conceptualización del diferencial en las diferentes configuraciones didácticas evitando generar nuevos conflictos de tipo instruccionales, para ello será necesario plantear otras situaciones-problemas que permitan abordar otros significados parciales del diferencial.

Por último, consideramos importante destacar la importancia de realizar este tipo de análisis desde la formación inicial y continua de profesores de matemáticas. El profesor debe conocer y saber usar herramientas que le permitan reflexionar en forma competente sobre la propia práctica (Castillo y Burgos, 2022; Giacomone et al., 2018). Pero también, debe conocer los distintos significados que pone en juego de la diferencial en relación con otros conceptos como la integral, y comprender cuál de estos se está movilizando en cada problema, lección o configuración didáctica.

REFERENCIAS

Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34*(66), 40-68. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03

Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Burgos, M., Bueno, S., Pérez, O., y Godino, J. (2021). Onto-semiotic complexity of the Definite Integral. *Journal of Research in Mathematics Education, 10*(1), 4-40.

Castillo, M. J., y Burgos, M. (2022). Reflexiones de futuros maestros sobre la idoneidad didáctica y modo de uso de una lección de libro de texto. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *36*(72). 555-579. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a25

Castillo, M., Burgos, M., y Godino, J. D. (2022). Directrices para el análisis de las lecciones de los libros de texto de matemáticas sobre el tema de la proporcionalidad. *Uniciencia, 36*(1), 1-19.

Ely, R. (2017). Definite integral registers using infinitesimals. *The Journal of Mathematical Behavior, 48*, 152-167. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.10.002

Frank, K., y Thompson, P.W. (2021). School students' preparation for calculus in the United States. *ZDM Mathematics Education, 53*, 549-562. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01231-8

Giacomone, B, Godino, J. D., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa, 44*, 1-25. http://dx.doi.org/10.1590/s1678-4634201844172011

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*, 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(2), 3-15. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M., y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J.M. Contreras et al. (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble, 34*(2/3), 167-200.

Gómez, A. (2019). A look to differential. *Journal of Physics: Conference Series. V International Conference Days of Applied Mathematics, 1414*(1), 1-7.

Hu, D., y Rebello, N. S. (2013). Understanding student use of differentials in physics integration problems. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research, 9*(2), 1-14.

Jones, S. R. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *Journal of Mathematical Behavior, 38*, 9-28. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.01.001

Konic, P.M., Godino, J.D., y Rivas, M.A. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas,* 74, 57-74.

López-Gay, R., Sáez, J. M., y Torregrosa, J. M. (2015). Obstacles to mathematization in physics: The case of the differential. *Science & Education, 24*(5-6), 591-613.

Oldenburg, R. (2016) Differentiale als Prognosen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*, 55-82. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0096-2

Pulido, R. (2010). La enseñanza de los diferenciales en las escuelas de ingeniería desde un enfoque socioepistemológico. *Relime, 13*(4-I), 85-97.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (7ma. Ed.). Cengage Learning Editores.

Verón, M. A., y Giacomone, B. (2021). Análise dos significados do conceito de diferencial de uma perspectiva ontosemiótica. *Revemop, 3,* e202109. https://doi.org/10.33532/revemop.e202109

SUJETO CIUDADANO REPRESENTADO EN LAS PRÁCTICAS DISCURSIVAS DEL CURRÍCULO NACIONAL CHILENO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Tania Andrade Vega[1], Ismenia Guzmán Retamal[2]

[1]Universidad Central, [2]Universidad de Los Lagos

tania.av@gmail.com, ismenia.guzman@ulagos.cl

La investigación problematiza a los sujetos ciudadanos que son representados en los discursos curriculares, desde una perspectiva crítica y adoptando una aproximación metodológica con sustento en el análisis crítico del discurso (en adelante ACD) de Fairclough. Tomando como muestra las bases curriculares de la formación en matemática escolar para el ciclo de enseñanza básica, que emergen del Ministerio Educación se describen léxica y gramaticalmente, utilizando las técnicas de Grize y Thompson y se analizan las prácticas discursivas y los efectos ideológicos que las constituyen. El estudio releva el uso de fragmentaciones, y universalidad para ocultar al sujeto ciudadano crítico y contribuir a una formación de sujetos ciudadanos de tipo tradicional.

Currículo, Análisis discursivo, Ciudadanía crítica, Ideología, Formación ciudadana.

INTRODUCCIÓN

Los continuos cambios sociales, políticos y económicos a los que se ven desafiadas las sociedades actuales dados los procesos de globalización, han impulsado reformas curriculares a gran escala que se han caracterizado por incorporar la formación ciudadana como un eje fundamental (Vanegas, 2014).

En este sentido, es pertinente cuestionar las visiones de ciudadanía que se implementan en los discursos curriculares y, principalmente, cuáles son las representaciones discursivas que transitan respecto de los sujetos ciudadanos que se constituyen en ese campo discursivo.

Desde una perspectiva crítica y adoptando una aproximación metodológica con sustento en el análisis crítico del discurso (ACD) de Fairclough, la investigación busca contribuir a la problematización del sujeto ciudadano representado en los discursos curriculares. Tomando como muestra las bases curriculares de la formación en matemática escolar para el ciclo de enseñanza básica, se describen léxica y gramaticalmente, y se analizan las prácticas discursivas y los efectos ideológicos que las constituyen.

ASPECTOS TEÓRICOS

Este trabajo se estructura bajo 3 pilares. El primero relacionado con entender los discursos curriculares como dispositivos pedagógicos y lingüísticos de acuerdo a Bernstein, es decir, como herramientas para la reproducción hegemónica de ideologías. Un segundo elemento es desarrollado bajo el alero de ciudadanía crítica, la que promueve la formación ciudadana no sólo desde la perspectiva cívica, sino también desde la participación activa (Valero y Skovsmose, 2012). Por último, el tercer pilar teórico se desarrolla tomando como conceptualización principal la educación

matemática crítica para de identificar las ideologías que transitan en los diseños curriculares en materia de matemática escolar.

METODOLOGÍA

Como se ha señalado, el objeto de estudio de esta investigación refiere a una aproximación a la representación de sujeto ciudadano en los diseños curriculares de Matemática. En este contexto, se optó por la utilización de una metodología de tipo cualitativa (Flick, 2012) específicamente en el análisis crítico del discurso de Flairclough (2008). El criterio para el análisis de los discursos se constituyó de los aportes teóricos de Thompson y Grice, quienes promueven el discurso como texto, práctica discursiva y práctica social (Thompson, 1998).

RESULTADOS

Los discursos curriculares representan al sujeto pedagógico desde una perspectiva tradicional fragmentando sus apariciones y universalizando ideologías de ciudadanía desde la participación cívica. En tanto, la educación matemática responde a ideologías que la representan como un constructo herramienta para la alfabetización hacia el mercado.

Tabla 1.

Resumen los principales hallazgos en términos de estrategias discursivas.

Estudiantes	Deícticos que los sitúan en el hoy, estrategias de eternalización y obliteración en pos de "la matemática"
Profesores	Operaciones de proyección valorativa y obliteración, sustituyéndolos por "la matemática" "el colegio" "la asignatura"
Sistema Educativo	Proyección valorativa, enlazada con estrategias de legitimación, unificación y ocultamiento mediante sinécdoques; valorizan distintas asignaturas, pero la prioridad es "matemática". Utilización de narrativización, racionalización y estandarización, para promover un sistema educativo justo y de amplio acceso
Matemática	Operaciones constitutivas y de valoración que sitúan a la asignatura como eje fundamental de la alfabetización, eternalizándola. Otras estrategias ideológicas son la simulación y cosificación de las maneras de aprender.
Aprendizaje	Nominalización del verbo, naturalización y metaforización de la actividad de aprender como una actividad individual, lo que contradice amplias investigaciones que visibilizan a la actividad de aprender en la cultura humana como un proceso que se desarrolla en función de otros, con otros para otros.
Libertad de enseñanza	Operaciones valorativas y de apropiación. Estrategias de simulación a partir del ocultamiento. Se promueve un sistema educativo de amplio acceso.

Fuente: Elaboración propia

CONCLUSIONES

Estudiantes y docentes son concebidos bajo una ideología de tipo liberal, la cual constituye la idea de educación a partir de la libertad individual. Rastros discursivos que evidencian estas conclusiones dicen relación con la insistente naturalización del aprendizaje como un proceso progresivo e

individual desestimando, la relevancia de la escuela como núcleo/motor del desarrollo del colectivo en un territorio determinado.

Las textualidades muestras rasgos de ciudadanía liberal al establecer la legitimización del estado-nación a partir de la participación y pertenencia, la última ampliamente pesquisada en los discursos a partir de las estrategias de universalización y estandarización. Universalización de la matemática como aspecto importante de la cultura, estandarización de los procesos de aprendizaje.

Los discursos promueven una ciudadanía de tipo liberal que se inclina por valores abstractos y universales. Ejemplo de aquello es la incorporación del "amor por el trabajo" como un fenómeno social permanente, invariante y a-histórico.

Los estudiantes aprenden mediante procesos cognitivos individuales. En tanto que los docentes son observados en el currículo como facilitadores y quienes detentan el poder del conocimiento.

El mundo real tiene una estructura única, las matemáticas colaboran en su descubrimiento, se muestra, a partir de las textualidades, una cosificación de los procesos de aprendizaje de la matemática escolar se presenta sin un carácter histórico y social.

Los procesos de aprendizaje son individuales y se realizan a partir de la manipulación de lo concreto. Características que evidencian unas matemáticas de la tierra por sobre las matemáticas críticas que apuntan a la formación de ciudadanos críticos.

REFERENCIAS

Almond, G., y Verba, S. (1963). *The civic culture: Political attitudes and Democracy in Five Nations.* SAGE.

Andrade, T., y Guzmán, I. (2018). Educación Matemática y formación ciudadana. Un estudio que confronta la matemática escolar, el currículo y las prácticas docentes. *Paradigma*, *39*(1), 319-331.

Apple, M. (1986). *Ideología y currículo.* Akal Universitaria.

Arias, R., y Peralta, H. (2011). La enseñanza, una puerta para la complejidad y la crítica. *Estudios pedagógicos, 37*(1), 293-302.

Bernstein, B. (1993). *La estructura del discurso pedagógico.* Morata.

Bordieu, P. (1999). *La miseria del mundo.* Akal.

Fairclough, N. (2003). El análisis crítico del discurso como método para la investigación en ciencias sociales. En R. Wodak, y M. Meyer, *Métodos de análisis crítico del discurso.* Gedisa S.A.

Fairclough, N. (2008). El análisis crítico del discurso y la mercantilización del discurso público: las universidades. *Revista Discurso y Sociedad, 2(1)*, 170-185.

Flick, U. (2015). *Introducción a la investigación cualitativa.* Ediciones Morata.

Tham, M. T. (2014). *La implementación del currículum escolar de formación ciudadana. Las experiencias de estudiantes y profesores de 8o Básico*. [Tesis de Magíster, Universidad de Chile, Chile].

Thompson, J. B. (1998). *Ideología y cultura moderna: Teoría crítica social en la era de la comunicación de masas.* Universidad Autónomo Metropolitana.

Vanegas, Y. (2013). *Competencias ciudadanas y desarrollo profesional en matemáticas*. [Tesis Doctoral, Universitat de Barcelona, España].

Vanegas, Y., y Giménez, J. (2010). Aprender a enseñar matemáticas y educar en ciudadanía. En M. Callejo, y J. Goñi, *Educación matemática ciudadanía* (pp. 147-166). Graó.

Wodak, R. (2003). De que se trata el análisis crítico del discurso (ACD). Resumen de su historia, sus conceptos fundamentales y sus desarrollos. En R. Wodak, y M. Meyer, *Métodos de análisis crítico del discurso* (pp. 17-33). Gedisa S.A.

NIVELES DE JUSTIFICACIONES DE GENERALIZACIONES MATEMÁTICAS MANIFESTADOS POR ESTUDIANTES CHILENOS DE 9-10 AÑOS SEGÚN SU PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Sara Embid[1], Eder Pinto[2], Marta Molina[3]

[1]Universidad de Granada, [2]Universidad del Desarrollo de Chile, [3]Universidad de Salamanca

sembid@correo.ugr.es, epinto@udd.cl, martamolina@usal.es

La agenda investigadora del Early Algebra tiene entre sus horizontes ampliar los estudios sobre generalización matemática y aritmética generalizada. Tras aplicar un experimento de enseñanza, evidenciamos cómo los estudiantes chilenos de 9-10 años justifican relaciones matemáticas generales sobre números pares, impares e igualdades numéricas en un contexto que fomenta la comunicación y debate de ideas matemáticas. Este trabajo aporta una caracterización novedosa para las justificaciones de generalizaciones en función del pensamiento algebraico evidenciado. Los resultados muestran una gran riqueza en la construcción de argumentos de enfoque relacional que se sofistican a medida que avanza la instrucción.

Early algebra, Pensamiento algebraico, Generalización matemática, Justificación, Educación básica.

INTRODUCCIÓN

En el panorama actual, está adquiriendo cada vez más relevancia un marco para guiar a los escolares de la educación básica en los procesos de identificación, representación, justificación y razonamiento de generalizaciones matemáticas (véase Blanton et al., 2011). Este marco aparece directamente asociado a una propuesta curricular - *early algebra* - que busca integrar modos de pensamiento algebraico en los cursos de la educación básica (Molina, 2009). El tratamiento que recibe el álgebra en Chile se fundamenta a partir de las Bases Curriculares de Primero a Sexto Básico (MINEDUC, 2018), documento que promueve desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes con base en las relaciones entre números, formas, objetos y conceptos matemáticos.

A este respecto, presentamos una investigación que recoge evidencias de desarrollo de pensamiento algebraico en estudiantes de 9-10 años que participaron de una escuela de verano. En concreto, este trabajo se centra en las justificaciones de generalizaciones matemáticas manifestadas por los estudiantes al trabajar con expresiones aritméticas en tareas de aritmética generalizada (números pares e impares; igualdades numéricas).

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

Adoptamos el marco conceptual propuesto por Kaput (2008), quien asume que "el corazón del pensamiento algebraico está compuesto de un proceso de simbolización complejo que tiene como propósito la generalización y el razonamiento con generalizaciones" (p. 9). La simbolización se interpreta de forma holgada, incluyendo no solo la notación algebraica, sino también otras representaciones como pueden ser gráficos, tablas y lenguaje natural. En esta investigación, referiremos a tres áreas de contenido o enfoques del pensamiento algebraico: (a) aritmética generalizada; (b) equivalencia, expresiones, ecuaciones e inecuaciones; y (c) pensamiento funcional. En particular, centramos la atención en el álgebra como aritmética generalizada; área en que las

regularidades en operaciones aritméticas pueden ser generalizadas más allá de números específicos y las generalizaciones empleadas para resolver problemas desde un enfoque relacional.

Diferentes autores (p.ej. Molina, 2009; Schifter y Russell, 2020) señalan que trabajar desde la aritmética generalizada supone guiar a los estudiantes para que sean capaces de aplicar un enfoque relacional, reconociendo a su vez que una operación es más que un proceso o algoritmo. Este desempeño relacional puede valorarse indicando, por ejemplo, los niveles de pensamiento algebraico que dichos estudiantes exhiben al trabajar en tareas de aritmética generalizada. Recientemente, Blanton et al. (2022) han indagado acerca de los niveles de pensamiento que manifiestan los estudiantes de 6-7 años en su comprensión de los argumentos de paridad a medida que avanzan en una secuencia de instrucción. Como resultado, estos autores consiguen informar sobre la capacidad evidenciada por los estudiantes para razonar sobre la paridad utilizando representaciones variadas y desarrollando argumentos basados en dichas representaciones. A través de preguntas dirigidas (p. ej. "¿qué sucede al sumar un número par y un número impar?", "¿qué tienen en común estas igualdades numéricas?"), los niños tienen ocasiones para comunicar sus ideas matemáticas y desarrollar su pensamiento algebraico. Crear oportunidades para justificar seleccionando tareas que inciten a justificar y conjeturar es valioso para la educación matemática (Thanheiser y Sugimoto, 2022).

MARCO METODOLÓGICO

La investigación presentada se enmarca en el paradigma de la investigación de diseño, concretándose a través de un experimento de enseñanza (Molina, 2021). Este experimento se llevó a cabo a través de una escuela de verano virtual, implementada por la Facultad de Educación de la Universidad del Desarrollo de Chile y concebida como un espacio de discusión en el que los estudiantes pudiesen identificar, justificar, representar y generalizar ideas matemáticas. Participaron 10 niñas y 11 niños que habían terminado recientemente 4º básico (9-10 años) y nunca antes habían trabajado con problemas que involucren el uso de letras en su acepción de número generalizado.

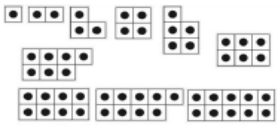
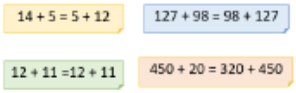
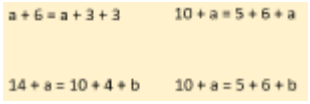
La investigación se estructuró en 10 sesiones a través de una serie de etapas: pretest (sesión 0); intervención (sesiones 1 a 8) y postest (sesión 9). La intervención se desarrolló de acuerdo a las áreas de contenido del álgebra escolar señaladas en el marco conceptual. Particularmente, se diseñaron tres sesiones de aritmética generalizada de 135 minutos cada una. Cada una de estas sesiones se organizó en tres bloques idénticamente distribuidos para que los estudiantes pudiesen: (a) examinar y comunicar las regularidades percibidas (en pequeño grupo de 4-5 alumnos); (b) articular y compartir afirmaciones generales (en gran grupo de 21 alumnos) y (c) extender lo aprendido (en grupos intermedios de 10-11 alumnos). Los docentes promovieron la discusión de ideas y el uso de argumentos cada vez más sofisticados.

Para el análisis de los datos procedentes de dichas sesiones, se seleccionaron y agruparon una serie de cuestiones de entre las planteadas por los docentes, optando por aquellas que presentaban mayor potencial para recoger las justificaciones generales que surgen gracias a las discusiones de aula. El instrumento principal para la recogida de datos fue la videograbación de las sesiones. Gracias a estas videograbaciones, se pudo profundizar en las ideas matemáticas generales que los estudiantes verbalizan a través de respuestas fundamentalmente orales. Ocasionalmente, estas respuestas se apoyan en soportes escritos y/o manipulativos (tarjetas par-impar). Se trabajaron conjeturas sobre números pares e impares (sesión 1), igualdades numéricas sin letras (sesión 2) e igualdades numéricas

que incluyen la letra en su acepción de número generalizado (sesión 3). El contenido de estas sesiones, así como los grupos de cuestiones pueden consultarse en la Tabla 1.

Tabla 1.

Descripción de las sesiones de aritmética generalizada.

Contenido de las sesiones	Grupos de cuestiones
S1 Números pares e impares 	G1 ¿Esta suma es par o impar? / ¿Cuál es tu estrategia para ganar? G2 ¿Qué obtienes al sumar dos impares /dos pares /impar y par? G3 ¿Qué obtienes al sumar tres números pares / impares?
S2 Igualdades sin letras 	G4 ¿Cómo podrías encontrar el número que falta? G5 ¿La sentencia es verdadera o falsa? ¿Qué tienen en común las sentencias verdaderas?
S3 Igualdades con letras 	G6 ¿La sentencia es verdadera o falsa? ¿Cómo harías para que sea verdadera?

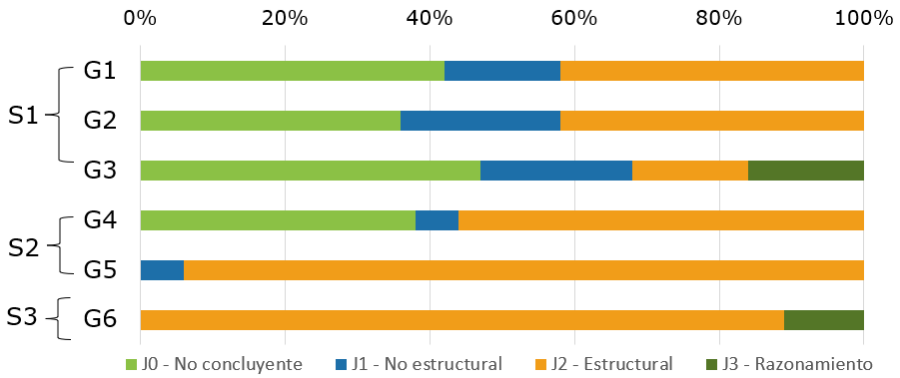
En general, no nos interesaba tanto la dicotomía respuesta correcta/incorrecta sino la justificación que dicha respuesta incluía con énfasis en el grado de sofisticación del pensamiento algebraico evidenciado (véase Blanton et al., 2022). Establecemos diferentes niveles para las justificaciones de generalizaciones que organizamos en orden ascendente, situando un nivel base no concluyente (J0), un nivel basado en respuestas con enfoque no estructural (J1), un nivel con enfoque estructural (J2) y un nivel con indicios de razonamiento lógico (J3). Estas clasificaciones se realizaron partiendo de las interpretaciones que hace la autora de las producciones fundamentalmente orales de los estudiantes. En particular, si los alumnos planteaban justificaciones que combinaban más de un enfoque, referíamos al nivel de orden inmediatamente superior.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

De manera general, los estudiantes que participaron en la Escuela de Verano terminaron mostrando evidencias de justificaciones a ideas matemáticas generales de nivel mínimo J2. Este hecho se consigue gracias a una secuencia de instrucción específicamente diseñada para fomentar el pensamiento relacional en las sesiones 2 y 3. En particular, 16 alumnos aportaron respuestas de nivel J2 y 5 de nivel J3 al interrogarlos con cuestiones de G6. Las respuestas de alumnos que sólo justificaron con nivel J0 son frecuentes a lo largo de S1 e inicios de S2, pero desaparecen por completo conforme se realizan preguntas más refinadas en S2 y S3. También el nivel J1 va adquiriendo cada vez menos protagonismo, lo que indica que el enfoque no estructural deja de ser la única forma escogida por los alumnos para justificar generalizaciones. En la Figura 1 presentamos un gráfico que recoge una panorámica de los niveles de la justificación de generalizaciones manifestados a través de los diversos grupos de cuestiones y sesiones.

Figura 1.

Niveles para la justificación de generalizaciones manifestados por los estudiantes.



Con especificidad en la sesión de números pares e impares, compartimos con los estudios de Blanton et al. (2022) que el nivel concluyente menos sofisticado, J1, se sustentaba bajo modos de proceder basados exclusivamente en la manipulación operacional de uno o más términos. Por ejemplo, ante la cuestión general de si "par + impar" era par o impar, encontrábamos lo siguiente: "8 + 7 es 15 y 15 es impar". Por otro lado, las justificaciones que clasificamos según J2 se debían, en parte, a las oportunidades brindadas por los maestros para apoyar los discursos de sus alumnos y al uso de material manipulativo que guiase sus pesquisas (tarjetas par-impar). Si bien el nivel J3 tuvo un alcance minoritario, los vestigios de este razonamiento lógico mostraron que existen escolares capaces de apoyarse en resultados previos ya probados ("impar + impar = par", "par + impar = impar") para justificar aspectos más generales ("impar + impar + impar = impar").

Por último, la variedad de respuestas manifestadas al trabajar con igualdades numéricas está en consonancia con estudios previos sobre cómo se enfrentan los niños de primaria al signo igual al proponerles tareas específicas que promueven el pensamiento relacional (Blanton, Stroud, et al., 2019). Los niños que capturaron lo general en las igualdades numéricas pudieron comunicar ideas matemáticas cuyo lenguaje era cada vez más refinado. Sin ir más lejos, "orden", "dirección", "invertido", "posición" e incluso "conmutativa" y "sumandos" fueron términos habituales para expresar lo que sucedía con sentencias de la forma "a + b = b +a". Con la asociativa sucedió algo similar y los términos "unido" y "separado" fueron sustituidos por "compuesto" y "descompuesto". Tal y como concluían Schifter y Russell (2020), las prácticas de discusión guiadas por el profesorado permiten a los estudiantes verbalizar una comprensión más sofisticada de las propiedades de las operaciones de suma y resta.

CONCLUSIONES

Nuestros resultados ponen de manifiesto que la construcción de argumentos sofisticados para justificar aspectos generales de expresiones aritméticas es posible con alumnado de 9-10 años. Es más, muestran que es viable caracterizar las justificaciones de dichos estudiantes en función del pensamiento algebraico evidenciado. Hacer a los alumnos partícipes del proceso de justificación favorece un enfoque relacional, tal y como reflejan los resultados obtenidos tras la implementación de las sesiones de aritmética generalizada en la escuela de verano.

En cuanto a aportaciones para la docencia, conviene señalar que las cuestiones planteadas en esta investigación podrían resultar útiles para promover el desarrollo de pensamiento algebraico en niños de edades similares a las de los participantes. Dado que en las discusiones entre profesorado y alumnado surgieron justificaciones de alto nivel que pusieron en evidencia las capacidades argumentativas de los estudiantes, sería beneficioso consultar la planificación detallada de las sesiones de aritmética generalizada en el trabajo ampliado de Embid (2022).

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido posible gracias al proyecto 23.400.173 financiado por la Universidad del Desarrollo de Chile, al proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por la Agencia Estatal de Investigación de España y al grupo de investigación FQM-193 de la Universidad de Granada.

REFERENCIAS

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., y Zbiek, R. M. (2011*). Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5*. Series in Essential Understandings. NCTM.

Blanton, M. L., Stroud, R., Stephens, A., Gardiner, A. M., Stylianou, D. A., Knuth, E., Isler-Baykal, I., y Strachota, S. (2019). Does Early Algebra Matter? The Effectiveness of an Early Algebra Intervention in Grades 3 to 5. *American Educational Research Journal*, 56(5), 1930–1972. https://doi.org/10.3102/0002831219832301

Blanton, M. L., Gardiner, A. M., Ristroph, I., Stephens, A., Knuth, E., y Stroud, R. (2022). Progressions in young learners' understandings of parity arguments. *Mathematical Thinking and Learning*, 1–32. https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2053775

Embid, S. (2022). Una mirada a los números pares, impares e igualdades numéricas: ¿cómo justifican generalizaciones los niños de 9-10 años según su pensamiento algebraico? [Tesis de Máster, Universidad de Granada, España]. https://digibug.ugr.es/handle/10481/76343

Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? En James J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–18). Lawrence Erlbaum Associates.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2018). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. Autor. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/2342?show=full

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135–156. https://doi.org/10.30827/pna.v3i3.6186

Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83–97). SEIEM.

Schifter, D., y Russell, S. J. (2020). A Model for Teaching Mathematical Argument at the Elementary Grades. *Journal of Educational Research in Mathematics*, *30*(1), 15–28. https://doi.org/10.29275/jerm.2020.08.sp.1.15

Thanheiser, E., y Sugimoto, A. (2022). Justification in the context of elementary grades: Justification to develop and provide access to mathematical reasoning. En K. N. Bieda, A. M. Conner, K. W. Kosko y M. Staples (Eds.), *Conceptions and Consequences of Mathematical Argumentation, Justification, and Proof*. (pp. 35–48). Springer.

CARTOMAGIA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁCTICO: SUS IMPLICANCIAS EN LA ACTITUD DE LOS ESTUDIANTES HACIA LA MATEMÁTICA. UNA EXPERIENCIA EN CUARTO MEDIO

Elías Navarro Molina, José Galaz Arraño

Universidad Central de Chile

elias.navarrom@alumnos.ucentral.cl, jose.galaz@ucentral.cl

El objetivo de investigación planteado es analizar la actitud hacia la Matemática, de estudiantes de cuarto medio, en una intervención didáctica sobre términos algebraicos, basada en matecartomagia y los fundamentos de ARPA. El principal aporte de esta investigación son las potenciales propuestas didácticas que puedan surgir a partir de la trabajada, utilizando la cartomagia como recurso y considerando una eventual mejora en la actitud de los estudiantes hacia la matemática. Como resultado preliminar, la intervención estudiada genera cambios principalmente en las dimensiones cognoscitiva, afectiva y conativa de la actitud de los estudiantes hacia la Matemática.

Actitud, Matecartomagia, Álgebra, Didáctica, Resolución de problemas.

PROBLEMÁTICA

A través de los años se ha podido estudiar la importancia de las actitudes que los estudiantes muestran hacia la matemática. Según Ruminot (2017), en Chile las prácticas de enseñanza han tendido a la institucionalización del contenido seguido de ejercitación.

Si bien hay diversas propuestas didácticas en torno a la resolución de problemas, existe escasa literatura dedicada al uso de la magia en ese contexto, por lo que resulta interesante pensar la cartomagia matemática como una aplicación matemática, trascendiendo su carácter motivador y conformando un problema en sí mismo.

En consideración de lo expuesto, la pregunta de investigación es: “En estudiantes de cuarto medio, ¿cómo influye en su actitud hacia la matemática una propuesta didáctica, basada en matecartomagia y los fundamentos de la Resolución de Problemas en las Aulas [ARPA]?”. Al alero de aquello, este trabajo tiene por objetivo analizar la actitud hacia la Matemática, de estudiantes de cuarto medio, en una intervención didáctica sobre términos algebraicos, basada en matecartomagia y los fundamentos de ARPA (s.f.).

REFERENTES TEÓRICOS

Base de las categorías de análisis aquí utilizadas, son las componentes de las actitudes, planteadas por Martínez (2008): cognoscitiva, afectiva, conativa y comportamental.

En cuanto a la resolución de problemas, Activando la Resolución de Problemas en las Aulas [ARPA] (s.f.) caracteriza un problema como una actividad matemática en la que quien se enfrenta a ella, desconoce un camino hacia la solución. Las etapas presentadas en ARPA son: entrega, activación, consolidación y discusión, cuya aplicación es detallada en la metodología.

Finalmente, se entiende por cartomagia a la rama de la magia que utiliza como instrumento una baraja. A su vez, la matecartomagia comprende a aquellos efectos que pertenecen a la cartomagia y que se valen de principios matemáticos, los cuales permiten describir y explicar algebraicamente los mecanismos con los que funcionan este tipo de juegos de magia.

METODOLOGÍA

El paradigma utilizado es el cualitativo, mientras que el diseño propuesto es etnográfico. El muestreo es de tipo teórico, puesto que el estudio se realizó en una muestra de 9 estudiantes de cuarto medio, considerando paridad de género (diferencia de 1, indistintamente). Se consideró su rendimiento en la asignatura de matemática.

En términos de los instrumentos utilizados, en primer lugar, se realizó un grupo de enfoque (entrada) con los estudiantes que participarían en la intervención. La guía de temas fue semiestructurada y está basada en el cuestionario sobre creencias y actitudes acerca de las matemáticas de Gil et al. (2006).

Posteriormente, el investigador desarrolló tres sesiones de implementación de la propuesta didáctica, las cuales se detallan a continuación.

- Sesión 1
    - Entrega: Los estudiantes observan un juego de matecartomagia (STEMMathsMagic, 2012) realizado por el monitor, quien posteriormente organiza 3 grupos de 3 estudiantes. Los alumnos reciben y leen una hoja con la pregunta a trabajar: "¿Cuál es el procedimiento con el que funciona el juego? En otras palabras, ¿cómo funciona? Ten en cuenta que el orden inicial de las cartas sí importa."
    - Activación: Los estudiantes trabajan en el problema, manipulando una baraja de cartas con el fin de recrear el juego antes visto. El monitor interactúa con los grupos únicamente cuando existen dificultades para comprender o trabajar la pregunta.
    - Consolidación: En esta etapa los estudiantes lograron entender cómo opera el procedimiento para que el juego sea exitoso. El monitor se asegura, mediante preguntas, que todos hayan dado con la respuesta a la pregunta.
    - Discusión: A modo de plenario, los grupos sociabilizan sus ideas en relación a la pregunta trabajada.
- Sesión 2
    - Entrega: Se conforman los mismos grupos de la primera sesión. Un grupo presenta el juego a sus compañeros, a modo de recordatorio. Luego, reciben una hoja con la pregunta a trabajar: "¿Por qué funciona el mecanismo del juego de magia? Considera experimentar con distintas cantidades de monedas y cartas."
    - Activación: Los estudiantes trabajan el problema, manipulando una baraja de cartas con el fin de comprender qué es lo que sucede con los distintos movimientos de cartas y monedas a lo largo del juego (buscan un patrón).

- Consolidación: Los estudiantes concluyen que las coincidencias en el juego son inevitables, dada la naturaleza de los movimientos realizados a lo largo del mismo. El monitor se asegura, mediante preguntas, que todos hayan dado con la respuesta a la pregunta.
- Discusión: A modo de plenario, los grupos sociabilizan sus ideas en relación a la pregunta trabajada.

- Sesión 3
  - Entrega: Se conforman los mismos grupos de las sesiones anteriores. Reciben una hoja con la última instrucción de la secuencia: "Describe y explica algebraicamente el mecanismo descubierto anteriormente. Procura utilizar términos algebraicos que representen los movimientos y posiciones de las cartas a lo largo del juego".
  - Activación: Los estudiantes trabajan el problema, utilizando una baraja de cartas a modo de guía, buscando describir algebraicamente el patrón comprendido en la sesión anterior.
  - Consolidación: Los estudiantes explican mediante descripciones de la baraja (por ejemplo: "Un montón de cartas queda de la forma $s+1, s+2, s+3, \ldots, N-2, N-1, N$"), así como mediante el uso de igualdades que permitan explicar el principio subyacente (por ejemplo: "(…) entonces la carta que queda segunda desde arriba será $N-(N-1-s)=s+1$").
  - Discusión: A modo de plenario, los grupos sociabilizan sus ideas con relación a lo trabajado.

Durante las tres sesiones, se efectuaron registros audiovisuales para facilitar la observación cualitativa. Finalmente, se realizó un grupo de enfoque de salida, con características idénticas a la inicial.

RESULTADOS

Desde el punto de vista cognoscitivo, la propuesta didáctica influyó en las concepciones de los estudiantes en torno a la Matemática, transitando desde la sistematicidad al razonamiento. Pese a que la dimensión matemática del problema no requería conocimientos distintos a la utilización de lenguaje algebraico, el trabajo de esta modalidad se tornó compleja para el grupo, que sacó la tarea adelante mediante el intercambio de opiniones e ideas. Esto reafirma la idea de que el trabajo en equipo es adecuado para la resolución de problemas de este tipo, al menos.

En relación a lo afectivo, durante la implementación los estudiantes sintieron entretenimiento y frustración, al igual que en sus clases regulares. Eso sí, lo primero fue predominante. La autoconfianza de los participantes se ve fortalecida por el tipo de problema en sí mismo y por el trabajo en equipo, siendo esto último fundamental para el desarrollo de las sesiones.

En referencia a lo conativo, la propuesta didáctica es atractiva para la totalidad de los estudiantes. Considerándola como una opción más interesante que las clases de Matemática regulares. El contexto

desconocido bajo el que trabajaban fue un facilitador más que una barrera, puesto que los participantes se predispusieron rápidamente al trabajo con la intención de trabajar en lo solicitado.

Finalmente, desde lo comportamental no se evidencia cambios drásticos en el estudiante a causa de la propuesta didáctica. Se mantienen elementos desde la clase tradicional, como preguntar cuando tienen dudas o momentos de desconcentración, aunque estos no hayan afectado negativamente el trabajo. Considerando lo dicho, se plantea como hipótesis que existen cambios importantes en la actitud de los estudiantes hacia la Matemática tras la intervención didáctica, los que podrían constituir un punto de inicio a un cambio de paradigma de la disciplina y su estudio.

REFLEXIONES

El diseño de la propuesta didáctica responde a un tránsito estructurado entre el efecto mágico y la utilización de lenguaje algebraico, considerando que los estudiantes deben adaptarse a un nuevo contexto de trabajo. Desde el análisis realizado, se puede señalar que se evidencia una diferencia en la actitud de los estudiantes antes y después de la implementación didáctica. Se destaca la motivación que genera en el estudiante, principalmente por catalogarse al problema trabajado como entretenido. Lo novedoso de la propuesta, para los estudiantes, es un factor importante en este cambio de actitud, considerando el carácter motivacional de la magia, así como la manipulación de objetos concretos.

Con base en este estudio preliminar, se espera en un futuro ampliar la muestra del experimento, refinar la guía de ambos grupos de enfoque y obtener resultados más conclusivos, considerando también a estudiantes que, por causas relativas a covid-19, no pudieron participar de la experimentación.

Este trabajo abre posibilidades de investigación en torno a la utilización de la magia educativa, especialmente en el área del álgebra.

REFERENCIAS

Activando la Resolución de Problemas en las Aulas. (s.f.). *Fundamentos de ARPA.* https://arpa.uchile.cl/fundamentos-de-arpa/

Gil, N., Guerrero, E., y Blanco, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 4*(1), 47-72.

Martínez, O. (2008). Actitudes hacia la matemática. Sapiens. *Revista Universitaria de Investigación, 9*(1), 237-256.

Ruminot, C. (2017). Los Efectos Adversos de una Evaluación Nacional sobre las Prácticas de Enseñanza de las Matemáticas: El Caso de SIMCE en Chile. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 10*(1), 69–87.

STEMMathsMagic (2012) *The Mind Match Experiment (Mathematical Magic series)* [Archivo de vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=syn_cSQt4Ro.

ESTUDIO DE CLASES DE MODELACIÓN MATEMÁTICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA CON ESTUDIANTES DE SEGUNDO AÑO MEDIO SEGÚN EL MODELO DE BLOMHØJ Y HØJGAARD

Natalia Alvarado Garcés

Colegio San Carlos de Aragón

n.alvarado.04@hotmail.com

La investigación tiene como objetivo plantear una situación de aula permita resolver dificultades de enseñanza- aprendizaje de la función cuadrática, según Zaslavsky (en Graf et al., 2018) como la interpretación de la información gráfica, la relación entre la función y la ecuación cuadráticas, entre otras; mediante una situación de modelación. El objeto de análisis corresponde a los resultados de la implementación de una situación de aula basada en la teoría socio-critica de Barbosa (2004), la cual es analizada a través del ciclo de Blomhøj y Højgaard de modelización matemática. Esto en el marco de la metodología basada en el Estudio de Clases de origen japonés.

Función cuadrática, Situación Cuadrática, Modelación Matemática, Secuencia Didáctica.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación tiene como objetivo principal plantear una situación de aula para estudiantes de segundo año medio (15–16 años) a modo de plantear una propuesta con el fin de colaborar en la resolución de dificultades de enseñanza y aprendizaje del concepto de la función cuadrática mediante un trabajo de modelación, dado el énfasis e importancia que ha adquirido la habilidad de modelación en las Bases Curriculares en Chile y la dificultad que produce su desarrollo. Para generar la situación de aula se inicia con un análisis histórico epistemológico, un análisis curricular analizado desde dos aristas, las bases curriculares y el tratamiento en los textos ministeriales, de modo de identificar el tratamiento del concepto mediante una modelación. De acuerdo con estos análisis se confecciona una secuencia didáctica que consta de tres clases, proponiendo una construcción a través manipulación de elementos concretos, una segunda haciendo uso de patrones y finalmente una tercera clase correspondiente a una modelación basada su construcción en la teoría Socio-Crítica de Barbosa (2004), cuyos resultados son analizados según las fases del modelo de Blomhøj y Højgaard de modelización matemática.

Este estudio utiliza como metodología el estudio de clases de origen japonés, donde cada resultado de la aplicación de la clase fue analizado, para su nueva aplicación, con sus respectivas mejoras; en este caso se presentan los análisis de los resultados de la primera aplicación, dado que en la siguiente aplicación las modificaciones no fueron favorables para evidenciar la transición por las fases del ciclo de modelación; dicha metodología de investigación permite proyectar la implementación de la situación de aula en diversos niveles educacionales.

MARCO TEÓRICO

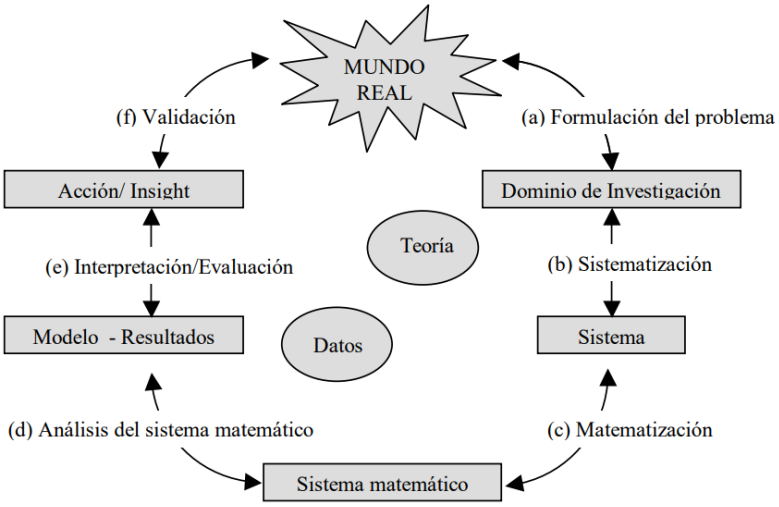
Por una parte, el modelo planteado por Borromeo (2010) quien desde una visión cognitiva plantea un ciclo de modelación, el cual ha sido base de investigaciones hasta la actualidad, además de sus trabajos de Evaluación del proceso de modelación desde la formación inicial docente, los cuales

permiten ser de complemento al modelo cognitivo que permite explicar las etapas del proceso de modelización matemática, en los estudios de Blomhøj y Højgaard (2003).

Desde una arista Socio-crítica, la modelación matemática planteada por Barbosa (2004) quien al proceso de la modelación agrega elementos de situar la matemática en contextos reales y útiles para la sociedad y el entorno donde se encuentra el estudiante, de modo de visibilizar el uso de la matemática en lo cotidiano, además de situar y clasificar los tipos de clases según los roles, frente a la resolución de la tarea del docente y el estudiante. De esta forma, dichos referentes didácticos han permitido, para los efectos de esta investigación, su articulación desde la construcción de la situación de aula a través de la perspectiva socio-crítica según Barbosa (2008) y un posterior análisis cognitivo de los resultados obtenidos de la aplicación, mediante el ciclo de modelación matemática propuesto por Blomhøj y Højgaard (2003), ciclo presentado en la Figura 1.

Figura 1.

Ciclo de modelación propuesto por Blomhøj y Højgaard (2003).



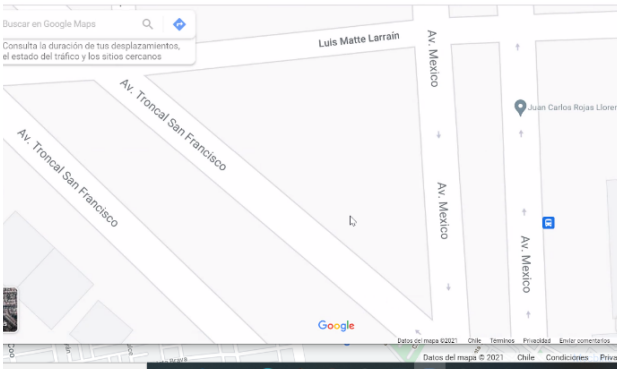
METODOLOGÍA

Los pasos que se siguieron para la mejora progresiva de las situaciones de aula, utilizando como guía principal las etapas de preparación, investigación y revisión, de las cuales la clase considerada como unidad de análisis, corresponde a la clase llamada “Somos una constructora”, siendo la última de la secuencia didáctica propuesta. Se llevó a cabo un pilotaje con estudiantes de cuarto medio con el fin de revisar posibles problemas de redacción o de instrucciones principalmente, posteriormente, dos implementaciones con estudiantes de segundo año medio (15–16 años) de un colegio particular subvencionado, científico humanista de la ciudad de Santiago, Chile.

La situación de aula propuesta se encuentra desglosada con sus tiempos estimados previamente e intervenciones propuestas a realizar por el docente durante y al finalizar la implementación, la cual se muestra en la Tabla 1:

Tabla 1.

Situación de aula "Somos una constructora", aplicación 1.

Tiempo	Actividad	Instrucciones para el docente
30 minutos	"Somos una constructora" El espacio triangular de la foto corresponde a un triángulo rectángulo isósceles, donde uno de sus catetos mide 40 m. Este es un espacio desierto, el cual la junta de vecinos desea utilizar, para lo que han solicitado a diferentes constructoras que presenten proyectos que sean favorables para el sector y a su vez se utilice de la mejor manera posible el espacio. Para lo que se propone como condiciones que debe ser una construcción de base rectangular que utilice la esquina de Luis Matte con Av. México como vértice y otro vértice en  la hipotenusa correspondiente a Av. Troncal San Francisco. Dibuje 5 rectángulos que cumplan con las condiciones dadas. Calcule la medida de sus lados, el área y el perímetro. ¿Cuál es la relación entre ancho y largo? ¿Cuál es la relación entre ancho y área?	Los estudiantes trabajan de manera grupal, con no más de 3 integrantes. Se deben agrupar de manera tal que formen un triángulo con sus mesas para mantener distancia social. El profesor plantea la problemática a trabajar. El profesor entregará impreso el plano a cada uno de los estudiantes. Los estudiantes realizan cálculos y responden preguntas en la hoja entregada.
10 minutos	Institucionalización esperada por los estudiantes: ¿Cuál es la relación entre ancho y largo? Lineal con pendiente negativa Ancho + largo = medida del cateto ¿Cuál es la relación entre ancho y área? Relación de tipo cuadrática Área= $a(cateto - a)$ Próxima clase se revisará las características de esta función.	Institucionalización: Profesor realiza lluvia de ideas respondiendo a las preguntas presentadas anteriormente. El profesor escribe las respuestas de los estudiantes en la pizarra de modo que se registre los posibles resultados obtenidos.

RESULTADOS

Para el análisis de resultados se separaron, los grupos de cada una de las implementaciones como implementación A, B y C y los grupos generados en ellas con sus respectivos rótulos especificados en la Tabla 2:

Tabla 2.

Clasificación de los grupos de sujetos informantes según la intervención en que fueron participes.

Implementación	Rótulos de los grupos
Primera implementación (A)	AG1
Segunda implementación (B)	BG1- BG2 – BG3 – BG4
Tercera implementación (C)	CG1- CG2 – CG3 – CG4 – CG5- CG6 – CG7

Posteriormente, y de acuerdo con los registros tanto escritos como audiovisuales de la clase, se analiza el cumplimiento por cada etapa del ciclo de modelación, según Blomhøj y Højgaard (2003), de cada uno de los equipos de trabajo, lo cual se encuentra resumido en la Tabla 3:

Tabla 3.

Síntesis de resultados por categorías de análisis propuestas para el estudio, según el modelo de Blomhøj y Højgaard (2003).

	Categorías					
Grupos	Formulación del problema	Sistematización	Matematización	Análisis del sistema matemático	Interpretación / conclusiones	Evaluación de la validez del modelo
AG1	X	X	X			X
BG1	X	X			X	
BG2	X	X	X		X	X
BG3	X					
BG4	X	X	X	X	X	X
CG1	X	X	X			
CG2	X	X	X			
CG3	X	X	X			
CG4	X	X	X			
CG5	X	X	X	X	X	
CG6	X	X				
CG7	X	X				

En el caso de la segunda implementación, los estudiantes lograron transitar en mayor medida en las fases del ciclo de modelación, en contraste con la tercera implementación; en cambio, en esta última se puede rescatar, que a pesar de que no todos lograran completarlo, realizaron un trabajo más autónomo, lo cual se ve evidenciado en el registro audiovisual.

En relación con los estudiantes de la tercera implementación, solo un grupo transitó por todas las fases del ciclo de modelación, esto debido a que, en su mayoría, invirtieron mucho tiempo en la resolución de la primera pregunta, lo cual no permitió dar el espacio a los estudiantes avanzar en las demás tareas matemáticas planteadas, por ello se consideró poco fructífera la mejora realizada desde la segunda a la tercera aplicación de la clase.

CONCLUSIONES

Desde el punto de vista de las habilidades y actitudes, se espera que logren los estudiantes de Enseñanza Media en Chile, según como están definidas en las Bases Curriculares (MINEDUC, 2015), podemos señalar que esta secuencia permite ser una contribución a un acercamiento hacia el desarrollo y trabajo por parte de los estudiantes de la habilidad de modelación, además de una preparación con relación a ella; todo esto dentro del contexto de las funciones cuadráticas. Si bien es cierto no fue completado el ciclo de modelación matemática por todos los estudiantes, es importante rescatar que, a pesar de no haber trabajado las habilidades previo a la aplicación, como lo plantea Blomhøj (2004), de modo de desarrollar dichas competencias, esto si se logró con algunos grupos de estudiantes, lo cual permite realizar una reestructuración considerando las falencias evidenciadas, de este modo fortalecer la situación de aula para una siguiente aplicación.

Proyecciones y aportes de la investigación

La proyección considera la dificultad asociada al tiempo, subsanando la situación, a través de una separación de la misma actividad en dos bloques de clases, considerando esta situación de aula como un proyecto, en el cual se solicite a los estudiantes exponer sus posibles proyectos para realizar, de modo que sean capaces de argumentar sus decisiones de manera más explícita. Esto permitiría a los estudiantes a su vez transitar por el modelo completo de modelación matemática, ya que una de las principales debilidades fue la validación de los datos obtenidos, y la generación de una forma algebraica para la relación entre las variables.

Por otra parte, la situación de aula presentada fue aplicada en estudiantes de educación técnica superior, quienes cuentan con un acercamiento mayor a la resolución de problemas y situaciones de modelación mediante el proyecto ARPA instaurado en la institución, lo cual será una nueva unidad de análisis dadas las características del nivel y formación de los estudiantes.

REFERENCIAS

Barbosa, J. C. (2008). As discussões paralelas no ambiente de aprendizagem modelagem matemática/The parallel discussions in the mathematical modeling learning environment. *Acta Scientiae*, *10*(1), 47-58.

Blomhøj, M. (2004). *Mathematical Modelling: A Theory for Practice*. En B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lester, A. Wallby y K. Wallby (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). National Center for Mathematics Education.

Blomhøj, M., y Højgaard, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, *22*(3). 123–139. https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123

Borromeo, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(1), 99-118.

Graf, L. K., Mayer, S., y Landwehr, J. R. (2018). Measuring processing fluency: One versus five items. *Journal of Consumer Psychology*, *28*(3), 393-411.

Minesterio de Educación de Chile [MINEDUC] (2015). *Bases Curriculares. 7º básico a 2º medio*. Autor.

PENSAMIENTO FUNCIONAL EN 1° DE PRIMARIA: ESTRUCTURAS UTILIZADAS EN LA FUNCIÓN $f(x) = 5x$

Sandra Fuentes M., María C. Cañadas

Universidad de Granada, España.

sandrafuentesm@gmail.com, mconsu@ugr.es

Este documento forma parte de una investigación más amplia sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria realizada en España (www.pensamientoalgebraico.es). Presentamos parte de una investigación exploratoria realizada con 32 alumnos de 1° de primaria (6-7 años). Se les planteó de forma escrita, una tarea de generalización en el contexto de pensamiento funcional, la cual involucra la función f(x)=5x. Identificamos 11 estructuras diferentes que los niños utilizaron al resolver la tarea planteada. Identificamos dos estructuras que son utilizadas con mayor frecuencia, f(x)=5x para números pequeños y consecutivos, y f(x)=x para números más grandes y no consecutivos.

Early algebra, Estructuras, Pensamiento funcional.

INTRODUCCIÓN

Este reporte de investigación se enmarca en el *early algebra*, específicamente en el enfoque funcional, el cual se centra en el estudio de las relaciones funcionales entre variables. Las investigaciones en el campo del pensamiento funcional son recientes y se enfocan en el análisis de la generalización, las representaciones, las estrategias y hace muy poco analizan las estructuras matemáticas que los alumnos utilizan al resolver una tarea (Mulligan et al., 2006).

A nivel curricular, en varios países se está incorporando nociones algebraicas en primaria, incluso en infantil. En Chile, en las bases curriculares, aparece el eje de patrones y álgebra, desde 1° de primaria a partir del año 2012 y este año académico también podemos observar que, en España, donde se desarrolla nuestra investigación, se incluye el sentido algebraico en primaria, lo que pone en valor investigaciones de este tipo (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022).

El objetivo principal de este trabajo es identificar las estructuras que los alumnos de primero de primaria (6-7 años) establecen en la resolución de una tarea de generalización que involucra la función $f(x) = 5x$.

MARCO TEÓRICO

En este apartado describimos los principales elementos del marco conceptual y algunos antecedentes.

El pensamiento funcional es un proceso cognitivo que se centra en establecer relaciones entre dos o más cantidades que varían simultáneamente. Este proceso involucra las funciones como contenido matemático. El pensamiento funcional se centra en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (Cañadas y Molina, 2016, p. 211).

A través del pensamiento funcional, se busca que los alumnos sean capaces de detectar similitudes y diferencias entre los valores de las variables involucradas, repetición y otros aspectos de las

regularidades, así como realizar operaciones aritméticas para generalizar, partiendo de casos particulares y llegando a la generalización.

Son variadas las investigaciones en torno al pensamiento funcional que abordan diferentes nociones como la generalización, representaciones, estrategias o estructuras. Algunas de ellas, por la edad de sus participantes (5-7 años), son: Blanton y Kaput (2004); Castro et al. (2017).

La estructura es una noción relacionada con el pensamiento funcional (Molina y Cañadas, 2018). Esta permite realizar conexiones entre los conceptos y procedimientos matemáticos, ayudando a establecer una regularidad y la posterior generalización. Identificar las estructuras que los alumnos utilizan al resolver una tarea algebraica, nos permite analizar la diversidad de conexiones matemáticas que movilizan frente a una misma tarea.

Diferentes investigaciones se enfocan en las estructuras que los alumnos utilizan al desarrollar las diferentes tareas. Pinto y Cañadas (2017) identificaron 17 estructuras diferentes en las respuestas de alumnos de 3° de primaria, para establecer una misma regularidad. Cinco estructuras se correspondieron de forma correcta con la tarea planteada. Al comparar las estructuras de alumnos de 3° y 5° de primaria, los de 3° establecieron una mayor variedad de estructuras, utilizando en muchas de ellas una estructura aditiva. En cambio, los alumnos de 5° utilizaron estructuras multiplicativas en sus estrategias de resolución. Torres et al. (2018) trabajaron con 6 alumnos de 2° de primaria en una tarea que involucraba la función $f(x) = x + 3$, utilizando la máquina de funciones. Se pueden observar diferentes estructuras que los alumnos identificaron de forma verbal. Entre ellas, se encuentran $x + x$, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$. Finalmente, 5 de los 6 alumnos establecieron la relación correcta.

METODOLOGÍA

Esta es una investigación de carácter descriptivo (Hernández et al., 2010), ya que el análisis de los datos pretende describir las estructuras utilizadas por los alumnos.

Trabajamos con 32 alumnos de un colegio concertado de Granada, la mitad de los alumnos eran no lectores y la otra mitad estaba recién iniciando el proceso de lectoescritura. No tenían formación previa en tareas similares a las planteadas en esta investigación.

Diseñamos 3 tareas de generalización en el contexto de una fiesta de cumpleaños ($f(x) = x$, $f(x) = 3x$ y $f(x) = 5x$) en el seno del proyecto de investigación en el que se enmarca este trabajo. En este reporte describiremos lo acontecido con la tarea 3. Se buscó que las tareas tuvieran un contexto cercano a los alumnos y con números que no complicaran la resolución de la tarea y los llevaran a la generalización.

En la tarea 3, la variable independiente es el número de niños que asisten a una fiesta de cumpleaños y la dependiente el número de globos que se deben comprar. Los valores dados a la variable independiente fueron cercanos consecutivos (1, 2, 3, 4 y 5), lejanos no consecutivos (8 y 10) y para la generalización utilizamos números que escapan de su ámbito numérico (20 y 100). La tarea 3 establecía una relación entre el número de niños y el número de globos necesarios para la fiesta de cumpleaños. Se les dio escrita la relación 1 niño - 5 globos ($f(x)=5x$) y se construyó con el gran grupo la relación 2 niños - 10 globos, quedando como apartados de esta tarea los valores para 3, 4, 5, 8, 10, 20 y 100 niños.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

Analizamos las estructuras utilizadas en las producciones escritas de los alumnos al resolver la tarea 3. Damos una descripción de cada estructura identificada en las respuestas de los alumnos. Se presenta a continuación, la tabulación de los datos obtenidos, el análisis y discusión de estos.

Las estructuras que los alumnos utilizaron en la resolución de la tarea fueron:

(a) f(x) = 5x, Identifican la relación el quíntuple de elementos, a cada niño le corresponden 5 globos.

(b) f(x) = 3x, Identifican la relación el triple, a cada niño le corresponden 3 globos.

(c) f(x) = 2x, Identifica la relación doble, a cada niño le corresponden 2 globos.

(d) f(x) = x, Identifican la relación identidad, a cada niño le corresponde solo un globo.

(e) f(x)=10, Solo escriben o dibujan 10 elementos en cada caso pedido, sin importar el número de niños en la fiesta.

(f) f(x) = x+1, Identifican la relación uno más, por lo que a cada niño le corresponde un globo y sobra uno siempre.

(g) f(x) = x+5, Suman el caso unitario a la variable independiente, al número de niños invitados a la fiesta le suman 5 globos.

(h) f(x) = x-1. Identifican la relación uno menos, por lo que siempre queda un niño sin un globo.

(i) f(x) = x/2, Identifican la relación mitad, compran la mitad de los globos que niños en la fiesta.

(j) f(x) = 5z, Cambia el número de niños de la relación, se le pregunta por 8 niños, contesta lo que corresponde a 6 niños.

(k) f(x) = 2*f(x-1). Duplican el valor del número de niños anteriormente encontrado. Estas categorías son excluyentes, ya que la respuesta del alumno podía corresponder a una única estructura.

En la Tabla 1 se resumen el número de alumnos que utilizaron cada estructura.

Tabla 1.

Estructuras utilizadas en la tarea 3.

Estructura	**Apartado**						
	A (x=3)	B (x=4)	C (x=5)	D (x=8)	E (x=10)	F (x=20)	G (x=100)
(a) f(x)=5x	11	11	7	4	3	0	1
(b) f(x)=3x	3	1	0	0	1	1	0
(c) f(x)=2x	0	1	0	1	4	4	0
(d) f(x)=x	4	5	11	12	10	7	12
(e) f(x)=10	2	2	1	1	1	1	0
(f) f(x)=x+1	1	0	1	1	2	3	0
(g) f(x)=x+5	3	2	2	1	1	2	2

(h) f(x)=x-1	0	0	2	1	0	0	0
(i) f(x)=x/2	0	0	0	0	0	1	0
(j) f(x)=5z	0	0	0	2	0	0	0
(k) f(x)=2*f(x-1)	4	3	2	0	0	0	0
Estructuras por apartado	7	7	7	8	7	7	3

Observamos que en promedio se utilizaron 7 estructuras distintas en cada apartado, siendo el apartado de generalización el que presenta menos estructuras, solo 3.

De la Tabla 1 se desglosa que, en los primeros apartados, cuando los números son cercanos y consecutivos, es así como la estructura f(x) = 5x, fue utilizada por 11 alumnos en el apartado A y B, 7 en el apartado C y luego decae a 4 y 3 en los apartados D y E, respectivamente. A medida que los valores son más grandes y no consecutivos, las respuestas escapan de su ámbito numérico y tienden a utilizar estructuras que hagan que los números resultantes sean más accesibles. Observamos este cambio de estrategia desde el apartado C, donde la estructura f(x) = x, es utilizada con mayor frecuencia, 11, 12, 10, 7 y 12, para los apartados C, D, E, F y G. En cuanto a la estructura f(x)=2x, son 4 alumnos que la utilizan en los apartados E y F. Es posible que los alumnos que utilizaron la estructura f(x)=3x, hayan trasladado la estrategia encontrada en la tarea 2 (f(x) = 3x).

Se observa que solo uno o dos alumnos utilizan estructuras aditivas, agregándole 1 elemento y que 2 o 3 alumnos, dependiendo del apartado, le agregan 5 elementos al total de niños invitados a la fiesta o bien, tenemos el caso de 2 alumnos en el apartado C y 1 alumno en el apartado D, que utilizan el restarle 1 al total de elementos necesarios para la fiesta. Un alumno, en el apartado F, utiliza la mitad y solo uno cambia el número de niños de la relación, respondiendo por 6 niños cuando se le pregunta por 8. También observamos que dos alumnos duplican el valor obtenido en el apartado anterior.

Al ordenar los datos en la Tabla 1, se pierden las individualidades, pero se aprecia en las producciones escritas, que los alumnos que establecen una estructura correcta continúan con ella en todos los apartados.

CONCLUSIONES

Con el análisis de las producciones escritas de los alumnos hemos identificado 11 estructuras diferentes evidenciadas en las respuestas, no identificamos estructuras equivalentes y solo una de ellas es la adecuada a la tarea. Las estructuras no adecuadas siguen la lógica de las tareas anteriormente trabajadas (f(x) = x y f(x) =3x). En cada apartado utilizaron una media de 7 estructuras distintas, es decir, los alumnos tratan de establecer y validar estructuras que den solución al problema que se les plantea. A medida que se aumenta el valor de la variable independiente por el que se pregunta, aparece un mayor número de estructuras para dar solución al problema. Esto puede indicar que los alumnos no tienen clara la respuesta y encuentran mayores dificultades porque en algunos casos la estructura no responde a la tarea.

Aportamos a Blanton y Kaput (2004) y Castro et al (2017), que los alumnos utilizaron la estrategia de armar grupos con 5 elementos para solucionar el problema y llegar a la generalización, la estructura utilizada en este contexto es f(x)=5x. Coincidimos con Pinto y Cañadas (2017) en la variedad significativa de estructuras que los alumnos utilizan. También concordamos con Torres, Cañadas y

Moreno (2018) en que cuando se les pide generalizar, el número de estructuras disminuye. Aportamos a estos autores, que a medida que el ámbito numérico de las respuestas obtenidas aumenta, cambian la estructura a una que como solución de números más pequeños.

Actividades como la presentada, que suponen un problema para los estudiantes, puede promover el uso de diferentes estructuras, así como el desarrollo del pensamiento algebraico en cuanto se pretende llegar a la generalización. Prever y analizar las estructuras que los alumnos pueden utilizar en la resolución de una tarea de generalización permite al profesor reconocer si los contenidos que desea abordar son adecuados con esos alumnos. Además, permite adelantar los errores que pueden tener lugar en la clase y establecer estructuras equivalentes para la resolución de la tarea.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo forma parte de los proyectos con referencias EDU2016-75771 y PID2020-113601GB-I00, financiados por Agencia Española de Investigación y el FEDER y Beca Chile N° 72210402.

REFERENCIAS

Blanton, M., y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Jonsen Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). PME.

Castro, E., Cañadas, M. C., y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de educación infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 6*(2), 1-13.

Cañadas, M. C., y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE, 56*, 24386-24504.

Mullingan, J., Mitchelmore, M., y Prescott, A. (2006). Integrating concepts and processes in early mathematics: The Australian pattern and structure mathematics awareness Project (PASMAP). En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 209-216). PME.

Molina, M., y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en el *early algebra*. En P. Flores, J. L. Lupiáñez e I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Atrio.

Pinto, E., y Cañadas, M.C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). SEIEM

Torres, M. D., Cañadas, M. C., y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). SEIEM.

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA DESARROLLAR HABILIDADES MATEMÁTICAS MEDIANTE EL ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES DE LOS RADICALES

Jacqueline Vallejos, Roberto Vidal

Universidad Alberto Hurtado

jacqueline.vallejos.p@gmail.com, rvidal@uahurtado.cl

Al amparo de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, hemos diseñado una secuencia de actividades para el aprendizaje del radical y sus principales propiedades, enmarcada en los elementos que proporciona la ingeniería didáctica, como producto y metodología de investigación, aportando con ello a un necesario cambio en las prácticas docentes, dados los resultados de un estudio previo, que indica que se mantiene vigente un modelo tecnicista en el trabajo con radicales en libros de texto, mientras que nuestra propuesta permite dar un vuelco enfocado en el desarrollo habilidades matemáticas, a la vez que los propios estudiantes son quienes construyen colaborativamente su conocimiento.

Radical enésimo, Propiedades de radicales, Habilidades matemáticas, TAD, Momentos didácticos.

INTRODUCCIÓN

Es indudable que la excesiva mecanización en la enseñanza de educación matemática coarta el desarrollo de habilidades matemáticas y la posibilidad de que el estudiantado pueda construir el conocimiento. Preiss et al. (2011) hablan de una pedagogía externalista, tras concluir que los docentes, mayoritariamente, entrenan destrezas y la resolución de problemas se desarrolla a un nivel rutinario y básico, lo que, por cierto, se contradice con los lineamientos de las bases curriculares que se proponen, transversalmente desde 1° básico hasta 4° medio, donde se promueve el desarrollo de 4 habilidades matemáticas: resolver problemas, modelar, representar, comunicar y argumentar. A pesar de que se ha avanzado en la incorporación de resolución de problemas, siguen primando los de tipo rutinario, aquellos en los que el docente o el libro de texto proporcionan una técnica para su resolución. En particular, la enseñanza de las propiedades de los radicales se caracteriza por una secuencia más o menos estable, según el estudio de Vidal (2009) y el análisis praxeológico realizado en esta investigación. En ella se suele definir el concepto y sus propiedades, se proporciona como técnica la aplicación de las propiedades, ejemplificándolas con ejercicios resueltos, de modo que el estudiante replique estas técnicas en la resolución de ejercicios y problemas. Bajo esta perspectiva nace la inquietud de contar con herramientas que promuevan el desarrollo de habilidades en la unidad de radical enésimo y sus propiedades. Esta investigación, pretende aportar con una secuencia que admita espacios de reflexión, indagación, ensayo y error de manera que el estudiantado pueda ir construyendo los conceptos de radical enésimo y sus propiedades en conjunto con sus compañeros y profesor, dando lugar al desarrollo de las 4 habilidades matemáticas antes mencionadas.

ANTECEDENTES

Es habitual encontrar una gran cantidad de errores en la aplicación del concepto de radical y sus propiedades. Al respecto, Pochulu (2009) en un estudio realizado en Argentina, en el que buscaba categorizar errores en el aprendizaje de la matemática en estudiantes que ingresan a la universidad,

identifica que los estudiantes indican que los radicales de índice impar y radicando negativo no poseen solución real, no factorizan adecuadamente para simplificar un radical y aplican una distributividad inexistente en la radicación respecto de la suma. Años más tarde en los Ángeles Chile, Tapia y Ulsen (2017) detectan los mismos errores. Errores que también se presentan en docentes y libros de texto, al respecto, Vidal (2009) tras un análisis de libros de texto chilenos distribuidos entre los años 1969 y 2009, concluye que en estos destacan una enseñanza mecanicista de los radicales, presentando, además, errores conceptuales y procedimentales.

Finalmente, en cuanto a las habilidades matemáticas, Radovic y Preiss (2010) observan una baja participación de los estudiantes en el aula y un abuso de preguntas cerradas, concluyendo que no hay espacio para un buen desarrollo de habilidades en los educandos. Por su parte, Olfos et al. (2014) afirman que los profesores propenden a discursos que destacan por una transmisión de conocimientos. Cabe entonces preguntarse: ¿Qué características debería presentar una secuencia de actividades, referida a la construcción del radical enésimo y sus propiedades, para estudiantes de 2° año de educación media?

MARCO REFERENCIAL

En el presente trabajo se utilizaron constructos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y el conjunto de las 4 habilidades matemáticas que se proponen en las bases curriculares de 7° a 2° medio (MINEDUC, 2015), tanto para el diseño como para el análisis de los resultados.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD) plantea la importancia de devolver a los objetos matemáticos escolares su razón de ser. Al respecto, Chevallard (1999) propone el paradigma del cuestionamiento del mundo en lugar del monumentalismo. Esta teoría postula que toda actividad humana puede ser modelada de una única forma, a través de la noción de praxeología, la que contempla dos aspectos inseparables: la “praxis” y el “logos”, el saber hacer y el saber, la primera asociada al tipo de tareas y las técnicas que permiten su resolución; la segunda apunta a las tecnologías y teorías, que justifican las técnicas y fundamentan el discurso tecnológico.

En la TAD encontramos el constructo de los momentos didácticos, estos momentos, son 6 y aportan de manera directa en el desarrollo de las habilidades matemáticas. Analicemos cada uno de ellos: en el momento del primer encuentro el estudiante se ve en la necesidad de resolver alguna cuestión inicial, que conlleva la resolución problema no rutinario. En el momento de exploración, debe analizar el tipo de tareas, buscando una forma de ser realizada, es decir, el estudiante comienza a conjeturar acerca de cómo resolver el problema. En el momento del trabajo de la técnica, requiere buscar una técnica que permita resolver la cuestión inicial, para esto puede indagar en sus conocimientos previos, también recurrir al uso de material concreto o aplicar la técnica de ensayo y error, entre otros, de manera que mediante la observación y análisis de la tarea presentada pueda conjeturar y establecer alguna técnica para su resolución. En el momento de lo tecnológico-teórico se revisa si las técnicas funcionan, además, las comparan con sus compañeros y deciden cuál resulta más útil, por lo tanto, requieren compartir sus conjeturas, verbalizarlas y argumentarlas. En el momento de la institucionalización, la técnica es despojada de todo aquello que no es útil, dejando sólo lo necesario para resolver la cuestión inicial, de modo que se encuentra un modelo para resolver el tipo de tareas. Finalmente, en el momento de la evaluación, habrá que reflexionar sobre lo aprendido y verificar si existen limitaciones en la técnica.

METODOLOGÍA

La investigación adopta un enfoque cualitativo de tipo descriptivo e interpretativo, puesto que queremos averiguar en profundidad si los estudiantes evidencian que logran desarrollar las 4 habilidades matemáticas mientras van construyendo las propiedades de los radicales. Esto con una muestra auto seleccionada, pues el coordinador de un colegio particular pagado de la comuna de Vitacura, solicitó realizar la implementación en su establecimiento.

Tomando elementos de la ingeniería didáctica, la investigación se estructura en 4 fases: en la fase 1(de análisis preliminares) se analizaron los actores del triángulo didáctico; el devenir de los conceptos raíz y radical, sus formas de enseñanza en el libro de texto y finalmente los errores frecuentes presentes en los estudiantes. En la fase 2 (de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas) se construyó la secuencia de actividades a la luz de los antecedentes estudiados en la fase anterior con su respectivo análisis a priori. En la fase 3 (de la experimentación) se comienza con entrevistas abiertas a los docentes de un colegio de la Región Metropolitana, para luego implementar la secuencia a través de 5 sesiones de 90 minutos cada una, en un segundo año medio.

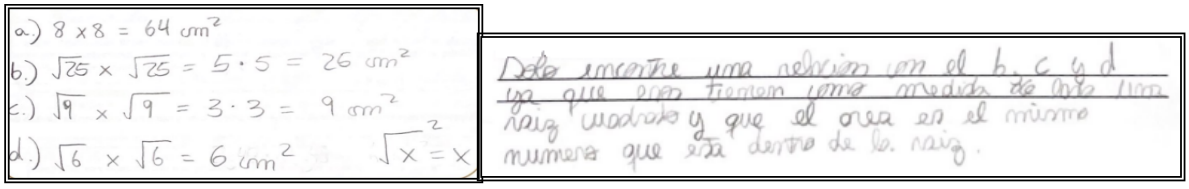
RESULTADOS

Al analizar las producciones de los estudiantes encontramos que estos consiguen resolver gran parte de las actividades propuestas. Veamos algunos ejemplos de sus respuestas.

Para construir la propiedad del radical enésimo elevado a "n", se plantea como cuestión inicial, determinar el área de cuadrados dadas las medidas de sus lados, medidas que van desde números enteros a irracionales. Dando lugar al momento del primer encuentro (Figura 1).

Figura 1.

Respuesta sobre la construcción del radical.



Como se aprecia en la Figura 1, para resolver la cuestión inicial la técnica aplicada es la multiplicación del lado del cuadrado por sí mismo, en los casos que la medida del lado es un radical de orden 2 de un cuadrado perfecto, el estudiante calculó las raíces cuadradas obteniendo números enteros que posteriormente multiplicó para encontrar el área del cuadrado. Además, el estudiante explica la relación encontrada, descubre que el área de un cuadrado cuyo lado es un radical de orden 2 es igual a su radicando. Más adelante, con el resto de las actividades, logran modelar que:

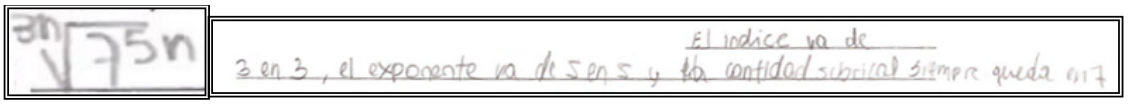
$$\sqrt[n]{a^n} = a, \forall n > 1, con\ n \in \mathbb{N}\ y\ \forall\ a > 0, con\ a \in \mathbb{R}$$

En la construcción de la propiedad de la simplificación de radicales se proponen varias secuencias para que los estudiantes observen su comportamiento, una de ella es: $\sqrt[3]{7^5}, \sqrt[6]{7^{10}}, \sqrt[9]{7^{15}}, \ldots$ en el momento de la técnica y tecnológico-teórico los estudiantes modelan la secuencia usando como

técnica la construcción de un patrón (Figura 2) y como tecnología el concepto de múltiplos pues explican que el índice va de 3 en 3 y el exponente de 5 en 5.

Figura 2.

Respuesta sobre la construcción de un patrón del radical enésimo.



En el caso de la propiedad de multiplicación de radicales enésimos se presentó, como cuestión inicial, el cálculo de áreas de triángulos que genera la necesidad de multiplicar radicales y luego una serie de igualdades en las que descubren las condiciones que deben cumplir sus elementos para que estas sean verdaderas y con esto llegar a modelar la propiedad. En los casos en que los radicales no se pueden representar como números enteros se les permitió el uso de calculadora para que se concentraran en las condiciones y no en los cálculos. Las tecnologías en el estudio de esta propiedad son variadas y algunas confusas, en la Figura 3 podemos ver que se sustentan en las relaciones observadas en las igualdades que son verdaderas. En el momento de la institucionalización los 3 estudiantes seleccionados para la muestra consiguen establecer la igualdad que generaliza la multiplicación de radicales (Figura 4).

Figura 3.

Respuesta manifestada por el estudiante.

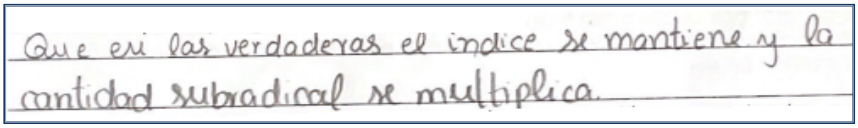
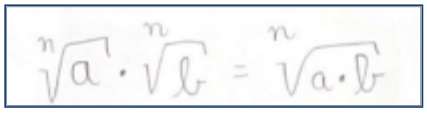


Figura 4.

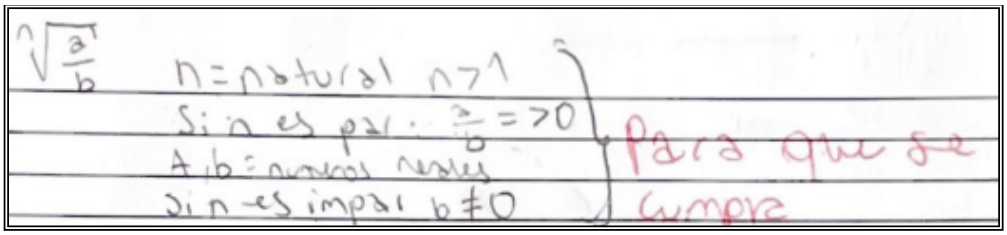
Respuesta manifestada por el estudiante.



En el momento de la evaluación de la propiedad de la división de radicales, se observan algunas incoherencias y falta de rigurosidad en la notación y restricciones, a pesar de esto, se evidencia la búsqueda de las restricciones de la propiedad y el intento de explicitarlas. Aquí son importantes las devoluciones que el docente pueda realizar para guiar mejor este momento, así como también las puestas en común con sus compañeros, para determinar entre todos los campos de validez de la división de radicales.

Figura 5.

Respuesta manifestada por el estudiante.



CONCLUSIONES

En un primer estudio, referido al análisis preliminar, se desarrolló un análisis praxeológico del libro de texto que evidencia tecnologías basadas en el concepto de potencia y sus propiedades, en lugar del concepto de radical enésimo y se observan modelos docentes tecnicistas que trivializan el saber y no admite desarrollo de habilidades matemáticas.

Tras el análisis de las entrevistas al docente, se evidencia un cambio en la percepción frente a la nueva metodología de trabajo, ya que inicialmente se mostró inseguro respecto de esta y finalmente manifiesta que "han resultado súper interesantes los análisis que realizan los estudiantes" destacando el aumento en la participación de los mismos logrando la construcción colaborativa de las propiedades y definiciones, proceso en el que han ido desarrollando habilidades matemáticas. Concluye que el "balance ha sido súper positivo" y se queda con las ganas de poder incorporar la metodología para las unidades posteriores.

En su mayoría los estudiantes resuelven exitosamente las tareas presentadas en las 5 lecciones que se pudieron implementar, se observa que van construyendo los objetos en estudio y desarrollando las habilidades matemáticas con mayor fluidez a medida que avanzan en las lecciones, se destaca que los momentos didácticos promueven el desarrollo de las habilidades y que sus tecnologías sustentan las técnicas desde el concepto de radical enésimo y/o regularidades observadas por ellos y no del cambio de representación al concepto de potencia que se observó en los antecedentes y en el análisis praxeológico del libro de texto.

REFLEXIONES

Si bien no se alcanza, al menos en la muestra analizada, una total rigurosidad en el lenguaje y la notación que requiere la matemática en el saber erudito, se evidencia una participación activa de los estudiantes en la construcción del concepto de radical enésimo y sus propiedades y sin lugar a duda el avance en el desarrollo de habilidades se logra con la movilización de los momentos didácticos. No es menor el cambio de metodología al que se enfrentaron, tanto docente como estudiantes, y a pesar de esto lograron adoptar una nueva forma de aprendizaje colaborativo que promueve el desarrollo del pensamiento matemático, situando al estudiante en un papel protagónico como pequeño investigador.

REFERENCIAS

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Bosch M., Espinoza L., y Gascón J. (2003) El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas, *Recherche en Didactique des Mathematiques*, *23*(1), 1-57.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2016). *Matemática. Programa de Estudio Segundo año medio*. Autor.

Olfos, R., Guzmán, I., y Estrella, S. (2014). Gestión Didáctica en Clases y su Relación con las Decisiones del Profesor: el caso del Teorema de Pitágoras en séptimo grado. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*, 341-359.

Pochulu, M. (2009) Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación, 8, 1-15*.

Preiss, D., Larraín, A., y Valenzuela, S. (2011). Discurso y pensamiento en el aula matemática chilena. *Psykhe*, *20*(2), 131-146.

Vidal, R. (2009). *Las raíces y radicales en libros de texto en Chile (1969-2009). Un análisis de rupturas epistemológicas como aporte a la Didáctica de las Matemáticas*. [Tesis doctoral, PUCV, Chile].

Tapia, A., y Ulsen, L. (2017). *Identificación y análisis de errores frecuentes en potencias y raíces en estudiantes de segundo año medio de los ángeles*. [Tesis de Licenciatura, Universidad de Concepción, Chile].

CARACTERIZAR EL KMT SOBRE PATRONES EN LAS PLANIFICACIONES DEL PROFESORADO

María Eugenia Reyes Escobar, Antonio Moreno Verdejo

Universidad de Granada

e.mreyesescobar@go.ugr.es, amverdejo@ugr.es

Este trabajo caracteriza el conocimiento de patrones que manifiestan tres profesores en ejercicio, en su evaluación docente. Se utiliza una metodología cualitativa, específicamente estudios de casos. Se analiza la tarea de planificación de los portafolios con las categorías del subdominio del Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Para este subdominio y sus tres categorías, se definen descriptores del contenido de patrones. Se presentan indicios y evidencias encontradas en las planificaciones de patrones de tercer año básico.

Didáctica de la matemática, Pensamiento algebraico, Patrones, KMT, Profesores.

INTRODUCCIÓN

Este estudio de caso forma parte de una investigación doctoral que indaga en el conocimiento didáctico del contenido-PCK- que manifiestan los docentes de enseñanza básica en sus planificaciones hacia el eje de Patrones y Álgebra en el contexto de su evaluación docente.

Como lo expresan Blanton y Kaput (2005), la incorporación del álgebra en la educación básica no es un asunto trivial, si se considera que, generalmente, los profesores de estos niveles no cuentan con una formación inicial exclusiva en matemáticas (Ávalos y Matus, 2010), y que ello podría conducir a que su conocimiento carezca de profundidad disciplinar, imposibilitando comprender el cómo y el porqué del álgebra en enseñanza básica.

Chile comienza a ser miembro de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico desde enero del 2010, y para lograr este ingreso tuvo que modificar sus políticas de cooperación y de desarrollo con el fin de mejorar el bienestar económico y social de sus ciudadanos (Serrano, 2015). Para modificar las mediciones de docentes, se implementa la evaluación docente desde el año 2013, a través de criterios basados en un Marco para la Buena Enseñanza (MBE) que define los conocimientos y las habilidades mínimas que los docentes deberían cumplir (Roa-Tampe, 2017).

La evaluación docente se mide a través de cinco instrumentos: portafolio, pauta de autoevaluación, entrevista por un evaluador par, informe de referencia de terceros y prueba de conocimientos disciplinares, guiándose por el MBE, que define cuatro esferas del adecuado desempeño profesional: planificación y preparación de la enseñanza; creación de ambientes propicios para el aprendizaje; evaluación y reflexión sobre la práctica docente; evaluación sobre las tareas y responsabilidades profesionales (Assael y Pavez, 2008; MINEDUC, 2018).

El portafolio es el instrumento fundamental de la evaluación docente, por el peso que se le asigna al clasificar al profesorado en las categorías de desempeño, y también porque es el que presenta el mayor poder discriminatorio (Gajardo et al., 2020). La instancia de planificación es solo una parte que muestra el conocimiento didáctico de lo que el profesor sabe, en este caso sobre Patrones, este es solo

un escenario que es diferente al que tiene, cuando realiza su práctica docente. Los portafolios se solicitaron al Sistema de Evaluación del Desempeño Profesional Docente, se mantiene la confidencialidad de la información de los datos elaborados por docentes y se utilizan únicamente para el fin de esta investigación.

Para la investigación contamos con las planificaciones y reflexiones de los portafolios de enseñanza básica de la asignatura de matemática, específicamente en relación con los objetivos de aprendizaje (OA) del eje de Patrones y Álgebra. Utilizando como herramienta de análisis el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. Con fines de difusión internacional, el grupo ha adoptado el uso de las siglas correspondientes a la traducción en inglés *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)* del nombre del modelo y de sus subdominios, por lo que de aquí en adelante nos referiremos a él como MTSK.

Frente a este escenario, nace la interrogante de investigación, de acuerdo con la tarea de planificación: ¿cuál es el conocimiento sobre la enseñanza de Patrones que manifiestan tres profesores, en las planificaciones de tercer año básico en el contexto de su evaluación docente? De esta interrogante surge el objetivo de este reporte de investigación que es caracterizar el conocimiento de la enseñanza sobre Patrones, a partir de las planificaciones, realizadas por tres profesores en tercer año básico, en el contexto de su evaluación docente.

METODOLOGÍA

La metodología utilizada es cualitativa, estudios de caso y de acuerdo con su alcance es descriptiva (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018). Tiene un enfoque cualitativo porque se realizan categorías de análisis, desde los criterios del MTSK, un modelo diseñado desde y para la investigación, cuya finalidad es servir como herramienta teórica y analítica, que permita identificar el conocimiento específico del profesor de matemáticas y comprender la naturaleza de este, desde un punto de vista sistemático y artificialmente organizado para su análisis (Carrillo et al., 2018).

Corresponde a una investigación de estudios de casos. Se trata de una revisión del módulo uno, contamos con los portafolios planificados hacia Patrones. Se analiza la planificación de la unidad pedagógica implementada. Las bases curriculares del Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2018, p. 236) establecen que el objetivo de aprendizaje de patrones de tercero básico (OA 12) es "Generar, describir y registrar patrones numéricos, usando una variedad de estrategias en tablas del 100, de manera manual y/o con software educativo".

Estas planificaciones fueron realizadas por tres docentes: dos generalistas y uno de educación diferencial. Ejercen en escuelas municipales, en distintas regiones, y eligieron el objetivo curricular de Patrones, en la elaboración de su portafolio en el año 2016 y 2017. Se seleccionan extractos de las planificaciones de cada docente. Cada planificación desarrolla tres clases. El análisis se abordó en dos fases: primero, la codificación de los episodios; segundo, la organización de los episodios basados en evidencias e indicios. Se seleccionan extractos, sobre las categorías del KMT y para estas categorías se elaboraron descriptores en torno al contenido de Patrones.

RESULTADOS

El subdominio KMT (Knowledge of Mathematics Teaching) es el conocimiento de la enseñanza de la matemática, corresponde al conocimiento del profesor sobre las categorías de: Teorías sobre

enseñanza; Recursos para la enseñanza; y Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Se considera el conocimiento de recursos materiales o virtuales, modos de presentar el contenido y el potencial que puede tener para la enseñanza, así como el conocimiento de ejemplos adecuados para cada contenido, intención o contexto determinado. Las categorías para este subdominio han sido construidas basándose en evidencias empíricas (e. g. Escudero, 2015; Flores-Medrano, 2015).

El subdominio KMT presenta de manera significativa indicios y evidencias en dos de sus tres categorías, tal como se puede apreciar en la Tabla 1.

Tabla 1.

Indicios y evidencias de Patrones en las categorías del subdominio KMT.

Categoría	Descriptor	Indicio y/o Evidencia
1.1 Teorías sobre Enseñanza	1.1.1 Teorías institucionalizadas y personales de enseñanza	Ausencia de indicio y /o evidencia
1.2 Recursos materiales y virtuales	1.2.1. Materiales concretos estructurados y no estructurados para la enseñanza de patrones.	Docente C Clase 1: A cada pareja de estudiantes se les entregan palitos de fósforos. En sus mesas de trabajo las parejas deberán crean los patrones que ellos determinen/Evidencia
	1.2.2. Recursos digitales, como software educativo, plataformas web, pizarras digitales, etc.	Docente A: Clase 3: Motivo a los alumnos observando diferentes tipos de patrones utilizando un software. Es un indicio porque no presenta un link de respaldo/Evidencia Docente B: Ausencia de indicio o evidencia Docente C: Ausencia de indicio o evidencia
1.3. Estrategias técnicas, tareas y ejemplos	1.3.1. Ejemplos de patrones en lo cotidiano	Docente B Clase 1: Los estudiantes se organizan en dos grupos y se acercan a trabajar por estaciones que están habilitadas en las esquinas de la sala con diferente set de frutas y brochetas de frutas para formar dos categorías de patrones. /Evidencia
	1.3.2. Preguntas orientadoras y de cuestionamiento	Docente A Clase 1: Pregunto: ¿Las secuencias son ascendentes o descendentes? ¿Cuál es el patrón que permite formar la primera secuencia? ¿Qué números del recuadro usaron para completarla?/Evidencia
	1.3.3. Estrategias para el uso y tránsito entre representaciones de patrones	Docente A Clase 3: Proyecto una imagen de secuencia de que se ha elaborado con palos de fósforos y se pide que la reproduzcan en forma concreta para luego contestar algunas preguntas. La primera secuencia que aparece es la siguiente: una chica, dos grandes, dos chicas y tres grandes. Luego de formar, espero que establezcan la cantidad de fósforos necesaria para armar una secuencia como se muestra en la figura proyectada/Evidencia
	1.3.4. Tareas en la enseñanza de patrones (identificación, completar partes vacías, extensión,	Docente C Clase 1: Para complementar, realiza un ejemplo utilizando figuras geométricas con material concreto, creando un patrón de tres figuras para que luego los alumnos sigan la secuencia. Realiza tantos ejercicios de

	combinación y la reversibilidad)	manera que los estudiantes logren comprender y descubrir el concepto de patrón con material concreto/ Evidencia

El resultado obtenido en la codificación de las categorías requirió la redacción de descriptores en relación con el contenido de Patrones. Esto facilitó la codificación, donde se hace referencia en las planificaciones, a indicios y/o evidencias, destacando la información de episodios, fragmentos de episodio, frases o palabras relativas a la codificación de cada descriptor. El indicio es una señal que permite deducir la existencia de conocimiento, en cambio, la evidencia es una certeza de que se manifiesta el conocimiento. Se puede afirmar que dos o más subdominios de conocimientos están relacionados en un episodio si se identifican indicios o evidencias (Flores-Medrano, 2015) que ayuden a interpretar el conocimiento que han manifestado los docentes y qué relación se establece.

CONCLUSIONES

Se caracteriza el conocimiento del profesorado sobre la enseñanza de Patrones, a través de la ausencia o presencia de indicios y evidencias, sobre las categorías del subdominio KMT en las planificaciones de tercer año básico. Los resultados demuestran que el profesorado de tercer año básico manifiesta evidencias en dos de las tres categorías del KMT.

El profesorado manifiesta ausencia de indicios y evidencias hacia la categoría Teorías sobre Enseñanza.

Para la categoría de Recursos materiales y virtuales para la enseñanza de Patrones el profesorado manifiesta ausencia de indicio y evidencia hacia el descriptor de Recursos Digitales. Pero presenta evidencia significativa en las planificaciones con Material concreto estructurado y Material simbólico hacia Patrones. La presencia de evidencia significativa del Material concreto se menciona en: juegos de rectas numéricas en el suelo, fichas de colores, secuencias con palos de fósforos, secuencias con figuras geométricas y tableros con números de secuencias ascendente y descendente. Además de la presencia de evidencia de Material simbólico mencionada en: búsqueda de regularidades, actividades del texto escolar del Mineduc y extensión de secuencias.

Y para la categoría Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, el profesorado manifiesta evidencias significativas en todos los descriptores de esta categoría. Para los ejemplos de Patrones en lo cotidiano mencionan evidencias con: mascotas, alimentos, naturaleza, días de la semana, meses del año. Las preguntas orientadoras y de cuestionamiento, son formuladas en relación con el objeto matemático de Patrones referidos a: conceptos, materiales utilizados, al desarrollo de secuencias y la resolución de problemas. Para el conocimiento de estrategias de tránsito entre distintas representaciones, el profesorado manifiesta conocimiento sobre actividades de Patrones. Las actividades planificadas transitan desde el material concreto utilizado a las representaciones pictóricas, tales como: búsqueda y creación de patrones numéricos, continuación de secuencias ascendentes y descendentes, búsqueda de regularidades, completar tablas, generalización, resolución de problemas de patrones, y creación de secuencias y patrones. En la creación de Tareas para la enseñanza de patrones, el profesorado manifiesta conocimiento en la identificación de Patrones, completar partes vacías, extensión de secuencias ascendentes y descendentes, combinación y reversibilidad de secuencias.

Esta investigación aporta al modelo del conocimiento didáctico con la revisión de planificaciones oficiales de la evaluación docente y el tipo de actividades que utilizan los docentes frente al contenido de Patrones. También aporta en la inclusión de descriptores hacia un objeto matemático específico como son los Patrones, ya que este modelo presenta distintas categorías, las que no fueron suficientes para el análisis de las planificaciones frente a este contenido. Este hecho subraya la importancia de la presente investigación, puesto que representa un paso más en la fundamentación como marco teórico del modelo MTSK, y responde a la observación realizada en Sosa et al. (2015): Aún faltan estudios sobre cómo la investigación sobre el conocimiento del profesor puede afectar a la práctica, además de otras investigaciones que den cuenta de la relación que guardan estas y otras categorías y sus respectivos indicadores. Esta investigación pretende visibilizar el conocimiento didáctico de tres profesores de primaria que planifican Patrones, en el contexto de su evaluación docente, permitiendo visualizar el carácter sistemático y sistémico del MTSK.

REFERENCIAS

Assaél, J., y Pavez, J. (2016). La Construcción e Implementación del Sistema de Evaluación del Desempeño Docente Chileno: Principales Tensiones y Desafíos. *Revista Iberoamericana De Evaluación Educativa, 1*(2),42-55.

Ávalos, B., y Matus, C. (2010). *La Formación Inicial Docente en Chile desde una Óptica Internacional. Informe Nacional del Estudio Internacional IEA TEDS-M*. Ministerio de Educación de Chile.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for research in mathematics education, 36*(5), 412-446.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores, E., Escudero, D., Vasco, D., Rojas, N, Aguilar, A. Ribeiro, M., y Catalán, C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva, Huelva].

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)*. [Tesis doctoral, Universidad de Huelva, Huelva].

Hernández-Sampieri, R., y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta.* Mc Graw Hill Education.

Gajardo, L., González, D., y Gajardo, L. (2020). La evaluación docente en Chile: la actitud del profesorado hacia los instrumentos que evalúan el desempeño profesional docente. *Revista Inclusiones*, *7*(2), 517-556.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2018). *Bases Curriculares Primero a Sexto básico*. Autor.

Roa-Tampe, K. A. (2017). La evaluación docente bajo la óptica del desarrollo profesional: el caso chileno. *Educación y Educadores, 20*(1), 41-61.

Serrano, C. (2 de febrero de 2015). Mejoras en educación. La Tercera. Recuperado de http://www.latercera.com/noticia/opinion/ideas-y-debates/2015/01/895-614967-9-mejoras-en-educacion

Sosa, L., Flores-Medrano, E., y Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 173-189.

ASIGNATURA CRÍTICA, FACTOR DE RETENCIÓN Y TECNOLOGÍA EVALUATIVA: ENACTACIONES DE LA MATEMÁTICA EN LAS NIVELACIONES AL INICIO DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR CHILENA

Rafael Miranda-Molina

Universidad Alberto Hurtado

ramiranda@uahurtado.cl

Se reportan los resultados de una investigación sobre nivelaciones matemáticas en la educación superior, a partir de un conjunto de artículos y ponencias que las presentan como buenas prácticas para la retención. En un análisis discursivo que se alinea con los estudios sociopolíticos de educación matemática, se sostiene que la matemática se despliega en las nivelaciones como asignatura crítica, como un factor predictivo del abandono y como una tecnología que permite medir la vulnerabilidad académica que se busca nivelar. En suma, se da cuenta de una construcción discursiva que remite a diversos espacios institucionales de formación, investigación y gestión.

Nivelación, Enactación, Discurso, Problematización, Equidad.

INTRODUCCIÓN

La equidad se ha posicionado progresivamente como una preocupación por ampliar el acceso y participación de diversos grupos sociales a la Educación Superior (ES), en una tensión entre sus fines de justicia social y la persistente subrepresentación de quienes mayor movilidad social necesitan (Sabzalieva et al., 2022). Es la paradoja de la universidad selectiva que también aspira a ser inclusiva.

La problemática de equidad se sustenta en comprender la injusticia educativa como representativa de otros fenómenos de exclusión (Popkewitz y Lindblad, 2000), lo que en la ES se legitima atribuyendo la subrepresentación y menor persistencia de sendos grupos sociales a su insuficiente preparación (Miranda-Molina, 2022). Desde este discurso -de nivelación- las iniciativas de equidad se explican como estrategias de compensación de exclusiones anteriores y exteriores a la Universidad.

La matemática cumple un rol protagónico en las nivelaciones, como un ámbito de intervención prioritario (Miranda-Molina, 2021), sin embargo, comprenderla solamente como algo por estudiar y aprender dificulta reconocer otras formas en las que lo matemático se pone en juego en la producción del déficit estudiantil que se busca nivelar. Este trabajo indaga sobre las formas en que la matemática se despliega, a partir de un conjunto de artículos y ponencias que presentan la nivelación como una buena práctica para reducir el abandono. Alineado con los estudios sociopolíticos de educación matemática (Valero, 2012) se sostiene que la matemática se *enacta* como asignatura crítica, como factor predictivo del abandono y como una tecnología que hace medible la vulnerabilidad por nivelar.

MARCO TEÓRICO

Este trabajo se inscribe en la sociología crítica de la política educativa (Ozga, 2019) campo que busca interrogar sus categorías y problematizaciones, prestando atención a que las propuestas de las políticas se ofrecen como soluciones a problemas usualmente implícitos. Dichos problemas son efectos de un complejo entramado de actores, condiciones materiales y saberes que permiten construir la realidad educativa (Fenwick y Edwards, 2010). En este contexto, el anglicismo *enactar* asocia a

oficializar o promulgar, a representar o poner en acto; y a movilizar o poner en acción, con lo que se ilustran las formas complejas y situadas en las que las políticas son recibidas, interpretadas y puestas en práctica creativamente dentro de los límites que sus discursos enmarcan (Ball et al., 2012).

También se alinea con los estudios sociopolíticos de educación matemática (Valero, 2012) desde la crítica a los discursos del déficit estudiantil en la ES, que como parte de una racionalidad que responsabiliza de su propia exclusión a grupos históricamente marginados (Iverson, 2012), les construye como el principal foco de intervención para su permanencia. Como barrera cultural para reconocer factores y prácticas institucionales necesarios de mejorar (O'Shea et al., 2016), estos discursos atribuyen el bajo desempeño a una falta de preparación del estudiantado. En este sentido, la matemática es moldeada por discursos, prácticas y relaciones de poder que contribuyen a la producción de subjetividades (Le Roux, 2017) y conocimiento sobre lo social (Yasukawa, 1998). Como se ha planteado antes, mediante despliegue matemático, la vulnerabilidad académica se hace medible, a partir de metáforas de brechas y desniveles que ubican al sujeto de nivelación en el nivel inferior y que constituyen el déficit por nivelar (Miranda-Molina, 2022).

DISEÑO METODOLÓGICO

Este trabajo forma parte de un proyecto mayor que indaga sobre las problematizaciones de las nivelaciones en la ES (Miranda-Molina, 2022), y actualmente busca profundizar sobre el rol de la matemática en ellas (Miranda-Molina, 2021) con la pregunta: ¿Cómo se *enacta* la matemática en las nivelaciones de ES?. Como una investigación documental, se trató de un proceso sistemático de búsqueda, análisis e interpretación de documentos (McCulloch, 2004), para seleccionar un conjunto de trabajos que presentan las nivelaciones como buenas prácticas para reducir el abandono en la ES. De esta forma se construyó un corpus de trabajo conformado por los siguientes documentos:

- 25 artículos (A) publicados entre 2013 y 2019 en revistas de ES en español (Scielo, Scopus y Redalyc), que cuentan con el término "nivela*" en título, resumen o palabras clave.
- 86 ponencias (P) presentadas en el congreso CLABES (Universidad Tecnológica de Panamá, 2019) entre 2011 y 2019, con el término "nivela*" en título, resumen o palabras clave.

A partir de estos datos se realizó un análisis temático reflexivo (Braun y Clarke, 2006), partiendo por un proceso iterativo de codificación inductiva de menciones explícitas a la matemática, lo que permitió identificar patrones temáticos, en tanto, ideas recurrentes sobre las nivelaciones matemáticas. Estos patrones son luego interpretados desde los referentes teóricos, para construir una descripción temática sobre las formas en que la matemática se *enacta* en las nivelaciones.

RESULTADOS

Los temas que a continuación se sintetizan dan cuenta de tres formas en las que la matemática se *enacta* en las nivelaciones, esto es, las formas en que estos saberes se despliegan para construir las nivelaciones, sus objetos (qué se nivela), sujetos (a quién se nivela) y lugares (dónde se nivela).

La matemática como asignatura crítica: baja preparación y alta exigencia

Con gran recurrencia nivelaciones se inscriben en ámbitos y niveles descritos como "críticos" debido a contar con menor nivel de logro, lo que se suele explicar como consecuencia de una insuficiente preparación matemática del estudiantado. Así se contrapone el mérito demostrado para ingresar a la

ES con una *"necesidad de nivelación especialmente en áreas vinculadas a la competencia matemática"* (p. 1385). Como explica desde un programa de nivelación de una Facultad de Ingeniería:

> Las competencias matemáticas básicas de los estudiantes que se incorporan a la educación superior son generalmente débiles, lo cual complejiza los procesos de enseñanza aprendizaje de las asignaturas de Matemática y de aquellas que requieren de la matemática para su despliegue (p. 855).

La matemática universitaria es concebida como parte del nivel superior de la brecha por nivelar, lo que se refuerza al describirla como un ámbito de mayor exigencia y como una característica que se hereda a asignaturas y carreras que la incorporan. En este contexto se distingue una matemática básica -o escolar- de otra universitaria que contaría esencialmente con un nivel de complejidad mayor:

> Salvo carreras muy específicas, prácticamente la totalidad de esos estudiantes debe cursar asignaturas de Matemática Básica, y en ciertas carreras las mallas curriculares contemplan asignaturas que requieren habilidades matemáticas más complejas, como Cálculo, Álgebra, Estadística y Física (p. 855).

La matemática, entonces, se *enacta* en las nivelaciones como un ámbito de intervención de mayor exigencia, característica también atribuida a lo universitario y a ciertas asignaturas y carreras que la incorporan. El carácter crítico, en cambio, refiere a un menor nivel de logro que se explicaría como consecuencia de la insuficiente preparación del estudiantado y menor exigencia del nivel escolar.

La matemática como factor predictivo del abandono

En la intersección entre la alta exigencia (nivel superior) y baja preparación (nivel inferior) de la brecha por nivelar, el desempeño matemático sirve también como un factor predictivo del abandono, y, por lo tanto, un elemento constitutivo de perfiles estudiantiles. Luego, por medio de prácticas de evaluación es posible estimar la probabilidad de abandono e individualizar al sujeto de nivelación.

Derivado de una comprensión de la matemática como saber necesario para acceder y persistir, las macro-problemáticas de equidad se traducen al nivel de la práctica en nivelaciones diseñadas para remediar una preparación insuficiente en asignaturas críticas. Estas acciones se enmarcan en una narrativa que explica la subrepresentación de sendos grupos sociales producto de un desempeño insuficiente en pruebas de admisión, donde la matemática suele contar con una alta ponderación:

> …no han tenido la posibilidad de acceder a una educación escolar de calidad y que, por tanto, no cumplen los requisitos de la PSU necesarios para ingresar a la educación superior. Dichos puntajes están altamente correlacionados con el nivel socioeconómico de los postulantes, generando una sobre representación de estudiantes de mayores ingresos (p. 1318).

De manera similar en diversas investigaciones el desempeño matemático es asociado a la probabilidad de abandono, lo que lleva a que éste se traduzca como uno de varios factores explicativos, en tanto, variables independientes en modelos de regresión buscan establecer el porcentaje de la varianza -de la retención- que cada una explicaría. Con esto se busca:

> …explicar la deserción de primer semestre a partir del desempeño de los estudiantes en las evaluaciones diagnósticas de matemática y comunicación, controlando por variables de tipo

> socioeconómicas, de educación previa, institucionales y características personales de los estudiantes (p. 1904).

Luego el desempeño matemático no solo trae consecuencias en términos de admisión, sino que también es recurrente que dichos puntajes sean considerados como un elemento constitutivo de perfiles académicos con los que se individualiza al sujeto de nivelación:

> "…los cuales son jerarquizados en virtud de sus resultados en distintas pruebas aplicadas en su proceso de admisión. Ello, sumado a algunos antecedentes sociodemográficos (edad, situación familiar, situación laboral, rendimiento escolar secundario, capital cultural de los padres, etc.) permiten constituir perfiles de riesgo de abandono, que prioriza por lo tanto la asignación de un tutor" (p. 1993).

La matemática, entonces, también se *enacta* como un factor predictivo del abandono, en la medida que se estima como un saber necesario para acceder y permanecer. Así los desempeños matemáticos iniciales traen como consecuencia la individualización del sujeto de nivelación y su conducción al espacio de nivelación, en donde la matemática se *enacta* como ámbito de intervención.

La matemática como tecnología: hacer de la vulnerabilidad algo medible

Por medio de las metáforas de brecha y desnivel se construyen simbólicamente diferencias problemáticas de niveles. Pero hacerlas medibles requiere de una *enactación* tecnológica de la matemática: esto es un uso estratégico que permite la construcción de instrumentos y procedimientos que permiten medir niveles y establecer diferencias objetivadas en puntajes. Brecha y desnivel son primero, metáforas, y luego, lógicas de medición.

Simbólicamente, las brechas involucran diferencias de diversos tipos: educacionales, culturales, de acceso, de contenido y niveles de exigencia. Lo que hace medible el nivel y con ello las brechas, es su objetivación en puntajes, *enactación* que requiere procesos evaluativos:

> "… teniendo presente el contexto de vulnerabilidad académica (medida a través de una prueba diagnóstico) y social (caracterización) estudiantil realizado por la Dirección de Planificación y Desarrollo (p. 1328).

En este esquema, la brecha involucra una lógica de medición que define un cierto nivel esperado de aprendizaje, y luego constituye un estándar requerido de desempeño inicial:

> siendo por lo tanto el puntaje máximo posible 24 puntos y habiéndose establecido como nivel de logro el 50%, por lo que se evidencia una adecuada producción de textos con un mínimo de 12 puntos (p. 1924).

En cambio, la metáfora de desnivel involucra un parámetro de comparación relativo a la población, distinto de puntajes bajo un estándar requerido. Es más bien la lógica de "los puntajes más bajos", que supone una comparación con una característica de la población como la media o un percentil. Como en un programa de nivelación de verano se define: "se invita a participar de la nivelación a estudiantes con logro menor al 50%. Alumnos con logro mayor pueden solicitar cupo." (p. 1372).

En suma, la matemática se *enacta* como un saber especializado que permite medir la vulnerabilidad académica desde la construcción de instrumentos y procedimientos evaluativos. Tanto el problema

como la solución son objetivadas gracias al despliegue de saberes que permiten medir el déficit por nivelar, hacer visible al sujeto de nivelación y posteriormente conducirlo a un espacio de intervención.

CONCLUSIONES: TRES ENACTACIONES DE LA MATEMÁTICA

En este trabajo se indagó sobre la construcción discursiva de las nivelaciones matemáticas en la ES, desde reportes en las que sus principales gestores las presentan como buenas prácticas para reducir el abandono. Esta ha sido, entonces, una aproximación a su interpretación del problema de nivelación.

Las tres *enactaciones* reportadas remiten a prácticas, actores, discursos y espacios institucionales diferentes. En el caso de la *enactación* como asignatura crítica, involucra a actores y discursos propios de la Educación Matemática, en espacios curriculares formales (como asignaturas) y suplementarios como ayudantías y tutorías pares. La *enactación* como factor de retención remite al campo de los estudios de retención y con ello, a metodologías fuertemente influenciadas por los discursos del déficit estudiantil, en un cruce entre la investigación y gestión institucional. Mientras que la *enactación* como tecnología remite a procesos de gestión del abandono y el aseguramiento de la calidad, quehacer típicamente desarrollado desde los niveles centrales de las universidades y guiados por discursos de calidad, eficiencia y gestión de procesos.

En suma, docentes, investigadoras/es y gestoras/es emergen como grupos profesionales que *enactan* la matemática para construir discursiva y materialmente la Universidad, asunto que hace relevante indagar sobre la manera en que estos actores despliegan sus saberes matemáticos en la construcción del déficit estudiantil que con las nivelaciones se buscan solucionar.

REFERENCIAS

Ball, S. J., Maguire, M., y Braun, A. (2012). *How Schools Do Policy: Policy enactment in secondary schools*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203153185

Braun, V., y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis y psycology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Fenwick, T., y Edwards, R. (2010). *Actor – Network Theory in Education*. Routledge.

Iverson, S. V. (2012). Constructing outsiders: The discursive framing of access in university diversity policies. *Review of Higher Education*, *35*(2), 149–177. https://doi.org/10.1353/rhe.2012.0013

Le Roux, K. (2017). Moving up or down the ladder: University mathematics students talk about progress. En A. Chronaki (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Mathematics Education and Society Conference* (Vol. 2, pp. 665–675). University of Thessaly Press.

Mcculloch, G. (2004). *Documentary Research: In Education, History and the Social Sciences* (1st ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203464588

Miranda-Molina, R. (2021). Problematizando las nivelaciones matemáticas en la educación superior y sus discursos del déficit estudiantil. *XXIV Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 217-222). *Santiago, Chile*.

Miranda-Molina, R. (2022). Brechas y desniveles: El problema representado en las iniciativas de "nivelación" en la Educación Superior Latinoamericana. *Revista de Estudios y Experiencias en Educación*, *21*(46), 292-311. https://doi.org/10.21703/0718-5162.v21.n46.2022.016

O'Shea, S., Lysaght, P., Roberts, J., y Harwood, V. (2016). Shifting the blame in higher education – social inclusion and deficit discourses. *Higher Education Research y Development*, *35*(2), 322–336. https://doi.org/10.1080/07294360.2015.1087388

Ozga, J. (2019). Problematising policy: The development of (critical) policy sociology. *Critical Studies in Education*, *62*(3), 290-305. https://doi.org/10.1080/17508487.2019.1697718

Popkewitz, T., y Lindblad, S. (2000). Educational governance and social inclusion and exclusion: Some conceptual difficulties and problematics in policy and research. *Discourse*, *21*(1), 5–44. https://doi.org/10.1080/01596300050005484

Sabzalieva, E., Gallegos, D., Yerovi, C., Chacón, E., Mutize, T., Morales, D., y Cuadros, J. A. (2022). *El derecho a la educación superior: Una perspectiva de justicia social*. UNESCO.

Universidad Tecnológica de Panamá. (2019). *Conferencia Latinoamericana Sobre el Abandono en la Educación Superior. Ponencias de Congresos CLABES*. https://revistas.utp.ac.pa/index.php/clabes

Valero, P. (2012). Perspectivas sociopolíticas en la educación matemática. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica: Una visión socio- política del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas* (pp. 195–216). Ediciones Uniandes.

Yasukawa, K. (1998). Looking at mathematics as technology: Implications for numeracy. In *Mathematics Education and Society. Proceedings of the First International Mathematics Education and Society* (pp. 351-359).

DESARROLLO DE LA PRÁCTICA VARIACIONAL DE SERIACIÓN EN EL ESTUDIO DE LA VARIACIÓN CONSTANTE PARA UN GRUPO DIVERSO

Haided Lised Arciniegas Rueda, Edith Johanna Mendoza Higuera

Universidad Industrial de Santander

haided2218073@correo.uis.edu.co, edith.mendoza@correo.uis.edu.co

Este reporte muestra los resultados sobre el desarrollo de la práctica de seriación en el estudio de la variación constante en un grupo diverso de estudiantes de noveno grado de una institución pública de Colombia. El objetivo es describir y analizar cómo emerge la seriación cuando los estudiantes resuelven un problema sobre el consumo de datos. La situación de aprendizaje articula la caracterización del grupo, las prácticas variacionales que propone Caballero (2018) y las características de un aula inclusiva de matemáticas. Los resultados revelan argumentos variacionales, basados en la seriación, que surgen al comparar estados consecutivos del comportamiento lineal.

Seriación, Educación inclusiva, Grupo diverso, Prácticas Variacionales, Variación constante.

INTRODUCCIÓN

A partir de los Estándares Básicos de Competencia se resalta la importancia de una formación para "ser ciudadanos matemáticamente competentes" para la sociedad, lo que en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa [TSME] coincide con ser un "ciudadano funcional" en la medida en que el estudiante es capaz de usar y dar significado a la matemática para resolver distintas situaciones cotidianas; no obstante, muchas de esas situaciones se ligan a la matemática desde la modelación de situaciones de variación y cambio que surgen desde la misma realidad y práctica del hombre (Cordero et al., 2015). Parece entonces que promover el estudio de la variación y el cambio conviene para todos los estudiantes sin excepción alguna.

Así, al plantear situaciones que involucran al estudiante y el concepto matemático, los resultados de aprendizaje se derivan de la práctica de enseñanza que fomenta la significación del conocimiento (Méndez, 2015) entonces, la atención se centra en el desarrollo del pensamiento variacional a través de una Situación de Aprendizaje [SA] y práctica de instrucción que reconoce al estudiante como protagonista en la Construcción de Conocimiento Matemático [CCM] en una aula inclusiva de matemáticas que tiene como principios, la equidad, justicia e igualdad, al reconocer y valorar las diferencias sociales, culturales, de capacidad y de intereses. De tal modo que, se plantea como problemática de estudio el desarrollo del pensamiento variacional y la práctica de instrucción para un grupo diverso de noveno grado; en ese caso, el objetivo de la investigación global fue describir una estrategia metodológica para el desarrollo de Prácticas Variacionales [PV] en un grupo diverso de estudiantes de noveno grado y en particular, en este avance de investigación se hace énfasis en la práctica variacional de seriación.

ASPECTOS TEÓRICOS

Este trabajo de investigación se enmarca en la TSME que dirige la mirada hacia la significación de la matemática desde el uso culturalmente situado al reconocer al estudiante como un ciudadano que disfruta y participa en la cultura matemática con sentido desde su propia realidad (Cantoral, 2014). Por tanto, la práctica social es considerada generadora de conocimiento en la medida en que se conjuga la matemática conceptual y vivencial para concretar una matemática funcional que se resignifica constantemente (Cordero, 2006).

Así, el conocimiento matemático se problematiza desde la epistemología del cotidiano y la matemática escolar que deberían coincidir en las prácticas de enseñanza, por lo tal, teniendo en cuenta que las nociones de variación y cambio se encuentran inmersas en diversos ámbitos cotidianos se plantea el estudio de la variación constante a través de una SA que se sustenta en las dimensiones del saber; en particular, en elementos epistemológicos de la CCM desde las PV (comparación, seriación, predicción y estimación) que plantea Caballero (2018) y, la problematización del saber y la persona que inventa, usa y significa la matemática.

Las PV se orientan al desarrollo de acciones para operar el cambio y la variación con fines predictivos, por consiguiente, en el estudio del carácter estable del cambio se sitúa la práctica de comparación y seriación, esta última se basa en el análisis de estados consecutivos de un fenómeno con el objetivo de encontrar una relación o propiedad que describa el comportamiento variacional en el conjunto total o parcial de los estados.

En ese sentido, al entender que el aprendizaje se sitúa en contextos específicos, se hace importante el estudio de elementos cognitivos, didácticos, epistemológicos y sociales relacionados a la CCM (Cordero et al., 2015) por ello, es de reconocer que la realidad del estudiante se caracteriza por factores físicos, cognitivos, sociales y culturales que reflejan la diversidad en un grupo. Entonces, en un grupo diverso se encuentran estudiantes con Necesidad Educativa Especial (NEE), trastornos de aprendizaje, exclusiones disciplinarias relacionadas con trastornos de conducta, en riesgo de exclusión y estudiantes sin ninguna de estas condiciones, subgrupos que se enmarcan en el contexto de una institución pública de Colombia y que se relacionan con tres de las concepciones de inclusión según Ainscow y Miles (2008). Luego, la práctica de enseñanza se acoge la promoción de características de un aula inclusiva de matemáticas como: las adaptaciones al currículo y la instrucción coherente, valorar y respetar la diferencia, aprender en comunidad, aprender para la vida, la no "normalidad" y la cultura inclusiva.

METODOLOGÍA

Esta investigación se refiere a una estrategia de diseño con principios fenomenológicos. La población de estudio fue un grupo de 38 estudiantes de noveno grado de una institución pública de Bucaramanga, Colombia. Las fases metodológicas fueron: (1) caracterización del grupo diverso, (2) diseño de la SA, (3) implementación y finalmente, (4) análisis de resultados.

Caracterización del grupo diverso

Esta etapa constituye un acercamiento a la población de estudio con el propósito de conocer a la persona que aprende, inventa y usa el conocimiento matemático. Los instrumentos de recolección de datos fueron las observaciones participativas, cuestionarios, entrevistas y revisión de documentos.

Así, la descripción de factores relacionados con dimensiones como: contexto y vida familiar, habilidades intelectuales, conducta adaptativa y desarrollo personal, participación e inclusión social y adaptaciones a las metas de aprendizaje; permitieron identificar factores del entorno personal, relacionados con condiciones particulares, comportamientos, reacciones, motivaciones, intereses, situaciones traumáticas, dinámica familiar, entorno cultural y socioeconómico, habilidades en procesos neurocognitivos y matemáticos, así como situaciones características relacionadas con la participación en el aula de matemáticas, ritmos de aprendizaje y elementos a tener en cuenta para la elaboración de adaptaciones curriculares para casos específicos.

En tanto, Arciniegas y Mendoza (2022) concluyen la caracterización puntualizando un grupo diverso de 38 estudiantes, donde se identificaron dos estudiantes diagnosticados con NEE (autismo y discapacidad intelectual), un estudiante con trastorno de aprendizaje (dislexia y alexia), estudiantes en riesgo de exclusión a razón de situaciones como: el desplazamiento forzado, afectados por el conflicto armado, migración, condiciones de pobreza y consumo de sustancias alucinógenas; y estudiantes típicos sin ninguna de las características nombradas de los subgrupos anteriores.

Diseño de la situación de aprendizaje

Esta etapa refiere al diseño de la SA alrededor de la variación constante, considerando la caracterización del grupo diverso y las dimensiones del saber. Así, para concluir con el diseño final se precisó el paso por las siguientes 3 fases que orientan la problematización del saber matemático y de quien aprende.

1) Un bosquejo inicial basado en la construcción de tareas variacionales que promovieron el desarrollo de las PV en cada una de las etapas de la SA. Por ende, a partir de Caballero y Moreno (2017) se establecen 4 momentos para el estudio de la variación constante: 1) reconocimiento de la función lineal como variación constante, 2) confrontar comportamientos lineales para significar la expresión $\boldsymbol{f(x) = mx + b}$, 3) uso del parámetro $\boldsymbol{m}$ para hacer predicciones de comportamiento lineales y 4) confrontar entre lo lineal y no lineal. Así, la SA que incluía actividades en la hoja del trabajo del estudiante y con la interacción de GeoGebra, se orientó a la conexión de contextos significativos, la significación de la matemática funcional y la articulación de los elementos de la caracterización del grupo diverso como punto de partida.

2) Luego, con el propósito de reconocer el aprendizaje y las diversas formas en la que se reflejan las PV, se establecen metas de aprendizaje para el ritmo de aprendizaje lento, moderado y rápido en cada uno de los momentos de la SA y los objetivos para la interpretación y desarrollo de las PV.

3) A través de los principios y pautas del Diseño Universal para el Aprendizaje [DUA] se posibilitó la universalización del aprendizaje con el fin de dar respuesta a las diferencias y habilidades individuales de los estudiantes del grupo diverso. Además, se establecieron adaptaciones curriculares específicas según el Plan Individual de Ajuste Razonable [PIAR] para los estudiantes diagnosticados con NEE y el estudiante con trastorno de aprendizaje.

Así, la SA final se concretó alrededor del consumo de datos de aplicaciones móviles, donde se movilizó la matemática en la identificación del comportamiento lineal del consumo de datos de

WhatsApp y Facebook, la predicción de estados para cada aplicación, el reconocimiento de la variación constante en las diferentes representaciones del objeto matemático y el estudio del comportamiento no lineal del consumo de datos de Netflix.

Implementación

La implementación de la situación de aprendizaje se llevó a cabo en 2 sesiones de 110 min cada una. En tanto, los estudiantes fueron organizados en binas convenientemente según las habilidades, necesidades y ritmos de aprendizaje.

Análisis de datos

Este momento constituyó la búsqueda de descriptores alrededor de las PV y las características del aula inclusiva de matemáticas. De tal modo que, el objetivo fue evidenciar los argumentos variacionales que construyeron los estudiantes alrededor de la variación constante en la medida en que el grupo diverso trastocaba el conocimiento matemático en la solución de la situación de aprendizaje.

Los instrumentos de recolección de datos en esta etapa fueron la transcripción de grabaciones, sistematización de respuestas de los estudiantes y la organización según descriptores y patrones identificados en los argumentos variacionales para evidenciar la CCM en las metas de aprendizaje para los tres ritmos de aprendizaje establecidos.

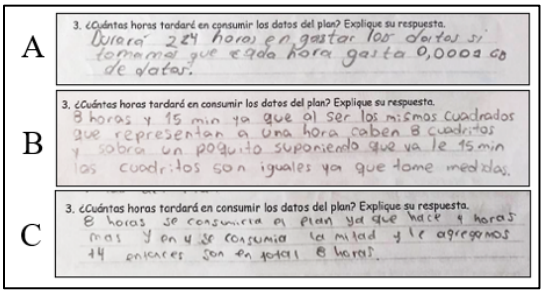
RESULTADOS

Las contribuciones precisan la seriación como la sucesión de comparaciones de estados consecutivos en una representación del objeto matemático para caracterizar cualitativa y/o cuantitativamente la regularidad de la variación en un conjunto de estados del comportamiento lineal. En tanto, los estudiantes evidenciaron la construcción de argumentos variacionales que reflejaban respuesta a ¿cómo cambia?, ¿con respecto de qué cambia? y ¿por qué cambia de esa manera?

En particular, al indagar sobre las horas que empleará WhatsApp para consumir los datos del plan, algunos de los argumentos variacionales construidos por los estudiantes llevan a la forzada relación numérica con los datos de la situación (Figura 1A), la aproximación usando instrumentos de medida (Figura 1B) o, en el mejor de los casos la identificación de relaciones con consumos ya conocidos (Figura 1C). Por ende, la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo lento, moderado y rápido respectivamente para los argumentos que se muestran en la Figura 1. Luego, los estudiantes desde su ritmo de aprendizaje logran establecer relaciones entre los estados del comportamiento lineal al distinguir el cambio constante a través de una caracterización cuantitativa.

Figura 1.

Seriación a través de caracterización cuantitativa.

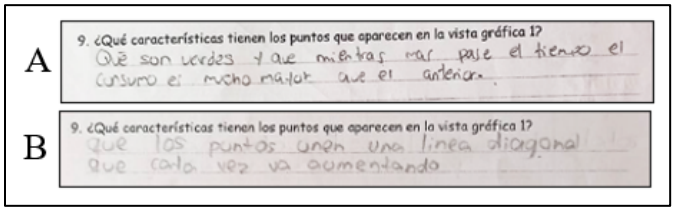


Fuente: Respuestas de las hojas de trabajo de los estudiantes.

Ahora, Caballero (2018) menciona que la seriación a través de la organización de comparaciones cualitativas se refleja cuando el estudiante encuentra regularidades relacionadas con la forma, el crecimiento, la posición, entre otras cosas. P.ej., en la Figura 2 se muestran dos argumentos, A y B, donde la CCM alude a meta de aprendizaje de ritmo lento y moderado, respectivamente. En el primer caso, cuando el estudiante afirma que el consumo es mayor que el anterior, se identifica la comparación entre estados y, en el argumento B, la idea de línea diagonal se relaciona con la tendencia al lugar geométrico de una recta similar a $f(x) = x$; en tanto, los dos argumentos refieren al comportamiento creciente característico de la variación constante en la SA.

Figura 2.

Seriación a través de caracterización cualitativa.



Fuente: Respuestas de las hojas de trabajo de los estudiantes.

CONCLUSIONES

La práctica de seriación concebida como la comparación entre estados numéricos o gráficos posibilitaron la interpretación del carácter estable del cambio con fines predictivos en el estudio de la variación constante. De tal modo que, la SA llevó a que la CCM adquiera valor de uso propio desde la realidad y experiencias del estudiante. Por ende, a través del desarrollo de las PV se promovió la construcción de argumentos que validan un mismo objetivo de aprendizaje desde diferentes ritmos, lo que refleja la diversidad e inclusión en el aprendizaje.

REFERENCIAS

Ainscow, M., y Miles, S. (2008). Por una educación para todos que sea inclusiva: ¿Hacia dónde vamos ahora? *Perspectivas Revista Trimestral de Educación Comparada*, *38*(1). 17-45.

Arciniegas, H., y Mendoza, E. (2022). Inclusión en clase de matemáticas. La caracterización del grupo diverso. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 36. En prensa.

Caballero, M. (2018). Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. [Tesis de doctorado, Centro de Investigación y de Estudio Avanzados del IPN, México]. Archivo digital https://www.researchgate.net/publication/331563013

Caballero, M., y Moreno, G. (2017). Diseño de una situación de aprendizaje para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. En Serna, Luis Arturo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1066-1074).

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Gedisa.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamentoapprendimento del la matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, *20*(1), 59-79.

Méndez, C. (2015). *Comunidad de conocimiento matemático de sordos. Lo matemático y la escuela*. [Tesis de doctorado, Centro de Investigación y de Estudio Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México].

APRENDER MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE TEMAS SOCIALES: LA EXPERIENCIA DE LA ENSEÑANZA DEL METRO CUADRADO EN CLASES VIRTUALES

Noemí Pizarro[1], Alicia Zamorano-Vargas[2]

[1]Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, [2]Universidad de Chile

noemi.pizarro@umce.cl, alicia.zamorano@uchile.cl

La formación ciudadana también puede desarrollarse durante las clases de matemáticas. En esta investigación se realiza una propuesta de enseñanza para la ciudadanía que utiliza el metro cuadrado para propiciar la discusión e inclusión de temas sociales relevantes en la clase de matemáticas, en particular se trabaja la problemática de la vivienda en Chile. La propuesta se implementó en conjunto con docentes de Educación Básica en enseñanza para el eje de Medición. Los resultados muestran que la incorporación de temas sociales en matemáticas puede aportar a la formación ciudadana de los estudiantes.

Formación Ciudadana, Temas sociales, Enseñanza metro cuadrado, Trabajo universidad-escuela.

INTRODUCCIÓN

La ley 20.911 en un artículo único instaura que los establecimientos educacionales reconocidos por el Estado de Chile deben propender, en todos sus niveles, la formación de ciudadanos con valores y conocimientos para el fomento del desarrollo del país. Se espera además que las escuelas promuevan la comprensión del concepto de ciudadanía junto a derechos y valores, con el fin que valoren la diversidad social y cultural, los derechos humanos y la participación pública, entre otros temas.

Es interesante preguntarse cómo se espera que las escuelas promuevan el concepto de ciudadanía cuando es un concepto polisémico, o, en otras palabras, en disputa. Se puede entender como una idea de civilidad; una conducta respetuosa de las reglas de la vida común; o educación cívica, y también como un estudio razonado y crítico de los problemas sociales a partir de los conocimientos disciplinares de las ciencias sociales (Heimberg, 2010). Por otra parte, Giroux (2020) considera que:

> el concepto de ciudadanía se lo debe entender también parcialmente, en términos pedagógicos, como un proceso de regulación moral y de reproducción cultural, dentro del cual se estructuran subjetividades particulares en torno a lo que significa el hecho de ser miembro de un Estado nacional" (p. 23).

Fierro (2007) indica que un buen ciudadano es una persona consciente de sus derechos y sus responsabilidades, lo que implica participar activamente en la configuración futura de la sociedad y el bien común. Considerando las ideas anteriormente expuestas, nos apoyaremos en el último concepto de ciudadanía de Heimberg para el diseño de actividades en la enseñanza de la matemática.

Generalmente, cuando se trabaja con formación ciudadana en clases de matemáticas se utiliza estadística, dado que es un área que fácilmente se vincula al contexto y cotidianidades que permitan el desarrollo del pensamiento crítico (Álvarez et al., 2016). Por ello, es que esta investigación busca situaciones menos comunes, como la enseñanza del metro cuadrado en Enseñanza Básica, teniendo

como objetivo fomentar la formación ciudadana por medio de un estudio bidireccional entre escuela y universidad.

MATEMÁTICA PARA LA FORMACIÓN CIUDADANA

Es ingenuo considerar que las matemáticas y su enseñanza son neutrales y apolíticas. No se pueden separar de la sociedad, sus valores e intereses (Martin, 1997), su enseñanza, como todo acto educativo, es un acto político (Freire, 1990). Para Osandón (2019) las características epistémicas de la matemática permiten trabajar diversas situaciones que involucran la vida diaria de las personas, lo que propicia abrir reflexiones políticas que atienden las necesidades de la población. De este modo, docentes y estudiantes, pueden trabajar matemática con su realidad para develarla, conocerla críticamente y recrear el conocimiento, realizando así una liberación por sobre una pseudo participación social (Freire, 1971). Para Skovsmose y Valero (2012) son los docentes quienes pueden potenciar sus propias prácticas al servicio de la democracia, transparentando su intencionalidad política.

Gutstein (2006) considera que el contexto de la enseñanza de las matemáticas forma nuestra conciencia política y sociológica, reconociendo la variabilidad y las inconsistencias sociales sobre clase, raza, cultura y comunidad. La matemática y su aprendizaje permiten que los estudiantes comprendan el mundo que viven, por ello cuando los profesores mostramos las consecuencias éticas de la toma de decisiones, ellos son conscientes de la sociedad y comprenden la justicia social (Mukhopadhuyay y Greer, 2007).

Se han realizado trabajos que relacionan matemática con comunidad, identidad cultural y conciencia crítica para trabajar las injusticias sociales. En todos ellos se destaca la motivación que promueve el contexto en los estudiantes de nivel medio. Además, en mayor o menor medida, se pudo apreciar una profundización en los contenidos matemáticos a raíz de dicha motivación (Molfino y Ochoviet, 2019).

ENSEÑANZA DEL ÁREA

La enseñanza de la medida es parte de todos los planes de estudio del mundo, dado que es una actividad en todas las culturas. Al medir podemos comparar, ordenar, estimar o calcular (Bishop, 1999). Sin embargo, es común que en las escuelas se aritmetice la medida, minimizando el cálculo del área a la multiplicación del largo por el alto (Chamorro, 2003) y no considerando la percepción de la magnitud, que es fundamental para apropiarla y a la vez crear referentes para su estimación (Pizarro et al., 2017).

METODOLOGÍA

Esta investigación es de corte cualitativo e interpretativo. Formadoras de profesores (de aquí en adelante, formadoras) y docentes comprenden el desarrollo de su quehacer, el reflejo de sus culturas, por medio de su propia observación conjunta (Pérez Serrano, 2014). El equipo investigador trabaja conjuntamente, con el fin de potenciar el desarrollo profesional de ambos grupos y entiende la práctica de la enseñanza como un ciclo continuo de planificación, instrucción y reflexión (Baumfield y Butterworth, 2007).

En esta comunicación se informará del trabajo piloto que se realizó con dos docentes (dos grupos diferentes de estudiantes) para el trabajo global. Para ello, cada docente se reunió con una de las

formadoras durante una hora aproximadamente. Se les presentó una posible secuencia de actividades para trabajar, se hicieron adaptaciones y énfasis de distintas índoles de acuerdo a su contexto de trabajo, teniendo como guía el Objetivo de Aprendizaje 22 de Quinto Básico:

> Calcular áreas de triángulos, de paralelogramos y de trapecios, y estimar áreas de figuras irregulares aplicando las siguientes estrategias: conteo de cuadrícula comparación con el área de un rectángulo, completar figuras por traslación (MINEDUC, 2012, p. 249).

A continuación, se caracteriza cada grupo de trabajo:

Grupo A: Dos Octavos Básicos, que se juntan para la clase on-line, con 67 estudiantes en total, parte de un colegio emblemático de Santiago. La profesora se acercó a la universidad para solicitar trabajo conjunto con el Teorema de Pitágoras, en la demostración del mismo se observa que los estudiantes no comprenden la idea de área, a partir de ello, se le invita a trabajar en el proyecto que sustenta este manuscrito. Se realiza una clase on-line vía ZOOM en co-docencia.

Grupo B: Séptimo básico con 22 estudiantes, parte de una escuela pública de la ciudad de Antofagasta. La escuela trabaja constantemente con una de las formadoras. Se comentó con el profesor sobre el proyecto y de inmediato accedió a trabajar, considerando que sus estudiantes no tenían comprensión del cálculo del área de superficie, según sus evaluaciones diagnósticas. Se realiza una clase on-line vía Meet en co-docencia. Estas son las actividades trabajadas con cada grupo y sus características:

- Construcción de un metro cuadrado: por medio de diarios, revistas y cintas adhesivas. El Grupo A construyó el metro cuadrado en clases. Al Grupo B se le pidió como tarea.

- Revisión de noticiario: Video de Canal 13 sobre departamentos que tienen un área de superficie de 17, 5 metros cuadrados

- Diseño del departamento del video: ¿Y si yo fuera arquitecto o arquitecta? A partir de las actividades anteriores, los y las estudiantes distribuyen los espacios del departamento del video anterior

- Discusión de los diseños: Se realiza una reflexión conjunta sobre cómo viven las personas.

- Reflexión sobre las viviendas chilenas: Noticias del estallido social, reportajes sobre comunidades de viviendas

El grupo A tuvo dos clases sincrónicas y el grupo B tuvo una clase sincrónica con material previamente desarrollado por ellos con indicaciones de parte del profesor. De estas clases se mantiene registro audiovisual, (las clases son grabadas por políticas de cada colegio), y así las investigadoras tienen acceso a revisar las grabaciones en profundidad para observar situaciones y/o eventos puntuales que dirigen la reflexión del grupo docente (Erickson, 2006; Roschelle, 2000).

RESULTADOS

En este apartado se mencionan las situaciones más relevantes que surgieron en el desarrollo de las clases de ambos grupos:

- Trabajo con el metro cuadrado: Si bien los y las estudiantes de ambos grupos no son proclives a encender la cámara, cuando se les pidió comparar el metro cuadrado construido con espacios de sus casas, muchos querían mostrar las áreas de superficie de los objetos o sitios de su entorno. Cuando se

quiso comparar situaciones mayores a un metro cuadrado, emergió espontáneamente la fórmula del cálculo del área de superficie, por medio del conteo como un arreglo bidimensional.

- Observación de la noticia: Muy pocos estudiantes manifestaron impresiones por el departamento de 17,5 metros cuadrados que mostraba el periodista.

- Diseño del departamento: En un comienzo, les fue bastante fácil diseñar un departamento con 17,5 metros cuadrados. La problemática surge cuando se les pregunta por cómo sería la vida de las personas que vivirían allí.

- Discusiones generales: Muchos estudiantes veían la situación como un cálculo y un diseño cotidiano. Al problematizar la vida de quien vive en un espacio tan reducido, comenzaron una serie de afirmaciones que al ser comentadas por los docentes, los estudiantes dudaban, cambiaban de opinión u observaban desconocimiento, p.ej., indicaba "Allí podría vivir un universitario" y se le respondía ¿cómo pagaría ese universitario el alquiler o el dividendo? , después indicaba "podría vivir alguien soltero/a", los docentes mostraban los promedios y medianas de los sueldos en Chile y los estudiantes se complicaba aún más, emergiendo fuertemente la desigualdad salarial de las mujeres y el alto costo de la vida. Se comentó sobre las protestas que realizaron estudiantes de la Facultad de Arquitectura de la U. de Chile durante el estallido social y se preguntó por sus opiniones al respecto. También hubo comentarios sobre lo que es vivir en la pandemia COVID cuando se vive en aislamiento.

CONCLUSIONES

Se observa que las clases online favorecen la apropiación de referentes personales de las unidades de área de superficie en los y las estudiantes, dado que realizan comparaciones de las mismas en su entorno inmediato y personal (Pizarro., et al, 2017). Hubo mayor participación y contribución a la discusión, mucho más que en otras clases regulares, al igual que en los trabajos de Molfino y Ochoviet (2019).

No hubo una mayor crítica al tamaño de las viviendas cuando no se contextualiza en la vida de las personas, por ello el papel del docente es fundamental para que, a partir de la acción matemática, los y las estudiantes comprendan el contexto (Skovsmose y Valero 2012).

Es interesante observar que, al indagar en un tema para la formación ciudadana, como p.ej., el derecho a la vivienda, emergen otros temas controversiales como el salario mínimo, la desigualdad salarial de las mujeres, la distribución geográfica de las clases sociales, etc.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido posible gracias al proyecto DIUMCE PGI 06 2020.

REFERENCIAS

Álvarez, I., Andrade, L., y Fernández, F. (2016). La investigación en Educación Estadística en el DMA-UPN: una mirada para transformar. Proyecto de Investigación DMA-428-16

Baumfield, V., y Butterworth, M. (2007). Creating and translating knowledge about teaching and learning in collaborative school–university research partnerships: An analysis of what is exchanged across the partnerships, by whom and how. *Teachers and Teaching: Theory and practice, 13*(4), 411-427.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós.

Chamorro, M. C. (2003). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En M. C. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las matemáticas* (pp.221-244). Pearson.

Fierro, J. (2017). *La ciudadanía y sus límites*. Editorial Universitaria.

Freire (1990). *La naturaleza política de la educación*. *Cultura, poder y liberación*. Paidós.

Freire, P. (1971). *Conciencia, crítica y liberación: Pedagogía del oprimido*. Ediciones Camilo.

Erickson, F. (2006) Definition and analysis of data from videotape: some research procedures and their rationales. En J. Green, G. Camili y P. Elmore (Eds.). *Handbook of complementary methods in education research* (pp. 177-191). American Educational Research Association

Giroux, H. (2020). *La escuela y la lucha por la ciudadanía*. Siglo Veintinuno.

Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics: Toward a pedagogy for social justice*. Routledge.

Heimberg, C. (2010). ¿Cómo puede orientarse la educación para la ciudadanía hacia la libertad, la responsabilidad y la capacidad de discernimiento de las nuevas generaciones? *Iber: Didáctica de las ciencias sociales, geografía e historia*, (64), 48-57.

Martin, B. (1997). Mathematics and social interests. En A. Powell y M. Frankenstein (Eds.). *Ethnomathematics*. *Challenging eurocentrism in mathematics education* (pp. 155-171). Suny Press.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2012). *Bases curriculares. 1° a 7° básico*. Autor.

Molfino, V., y Ochoviet, C. (2019). Enseñanza de la matemática para la justicia social en cursos de postgraduación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 22*(2), 139-162.

Mukhopadhuyay, S., y Greer, B. (2007). How many deaths? Education for statistical empathy. *The Montana Mathematics Enthusiast* (Monograph 1), 119-135.

Osandón, (2019). "Politizar" las asignaturas escolares: ampliando horizontes para la formación ciudadana. En A. Ramis y M. Peña (Eds.), *Educar para la ciudadanía: Fundamentos, metodologías y desarrollo profesional docente*. Universidad de Chile.

Pérez Serrano, G. (2014). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes. I Método*. La Muralla.

Pizarro, N., Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2018). Measurement estimation activities: The interpretation of Primary School teachers. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32*(62), 1177-1197.

Roschelle, J. (2000). Choosing and using video equipment for data collection. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 709-729). Lawrence Erlbaum.

Skovsmose, O., y Valero, P. (2012). Rompimiento de la neutralidad política: el compromiso crítico de la Educación Matemática con la democracia. En *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 1–24). Ediciones Uniandes.

LAS PRÁCTICAS DE REFERENCIA DE UN GRUPO DE DOCENTES DE EDUCACIÓN BÁSICA DE CHILE EN LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES: UN ESTUDIO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR DESDE LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Manuel Ampuero, Marcos Barra

Universidad Alberto Hurtado

manuel.ampuero.montes@gmail.com, mbarra@uahurtado.cl

En esta investigación se describieron y analizaron las prácticas de referencia de tres profesores durante la enseñanza de las fracciones en sexto año básico de la educación chilena, confrontando dichas prácticas con las características de los fenómenos de exclusión, opacidad y adherencia del discurso Matemático Escolar (dME) desde la Teoría Socioepistemológica. Para ello, se utilizó una metodología cualitativa de carácter exploratorio, lo que permitió diagnosticar el problema de investigación, basado en la caracterización de prácticas institucionalizadas. Así, se logró identificar que los fenómenos se manifiestan de manera articulada en la enseñanza de las fracciones.

Prácticas de referencia, Fracciones, Fenómenos del discurso matemático escolar.

ANTECEDENTES

En nuestro sistema educativo, cuando se abordan las fracciones, se puede observar que, a pesar de que éstas se introducen en la enseñanza de la aritmética a nivel de educación básica, los estudiantes tienen dificultades en su manejo (Farfán, 2012). En este proceso de abordaje, por lo general, las prácticas de referencia[1] de los docentes se caracterizan por el rol activo del profesor y por enmarcarse en una secuencia que comienza entregando una definición de fracciones, seguida de ejemplos de operaciones para culminar con una actividad en la cual los estudiantes deben resolver ejercicios, aplicando el método dado por el o la docente. Esta secuencia, tan común en la enseñanza de las fracciones, sería una de las causantes de la rigidez de las prácticas de referencia que se materializa en actividades que, por lo general, resultan ser situaciones forzadas, repetitivas, reglamentadas, mecanizadas y que, además, se encuentran alejadas de los significados propios del cotidiano de los/as estudiantes. Dichas prácticas, dejan de manifiesto la omnipresencia de un invariante discurso Matemático Escolar (dME) donde el profesor posee muy poco margen para generar modificaciones en sus prácticas (Cantoral, 2013). Es decir, los docentes tenderían a mantener (involuntariamente) una forma de enseñanza que se basa principalmente en un profesor protagonista del proceso educativo y donde el estudiante se limita a aceptar pasivamente lo propuesto (Farfán, 2012).

Problemática

El discurso Matemático Escolar se afianzaría a las prácticas de referencia de los docentes a través de una serie de regulaciones y recomendaciones institucionales como por ejemplo los Programas de Estudio, textos escolares, pruebas estandarizadas, entre otras recomendaciones donde se circundan las matemáticas escolares, es decir, las prácticas de referencia implicadas en la enseñanza de las

[1] Se entenderá por prácticas de referencia al conjunto de actividades organizadas por el docente con la finalidad de lograr la construcción del aprendizaje en los estudiantes.

fracciones se estandarizan con lo cual se limitan a una secuencia y con ello, se promovería una estructura inflexible que estaría normada y aprobada por la mayoría de los actores del proceso educativo. Según lo anterior, las prácticas de referencia de los profesores estarían atadas a un dME instituido e invariante, lo que provocaría dificultades en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones. Según estos planteamientos, en esta investigación, centramos la problemática en las prácticas de referencia que se mostrarían rutinarias y alejadas de la cotidianeidad de los estudiantes. Por ello, se busca caracterizar estas prácticas de referencia a través de los fenómenos de exclusión, opacidad y adherencia, lo que nos lleva a plantearnos la siguiente pregunta de investigación: ¿qué características tienen, a la luz de los fenómenos de exclusión, adherencia y opacidad del dME, las prácticas de referencia de los docentes en la enseñanza de las fracciones en sexto año básico?

OBJETIVOS

Para abordar nuestra pregunta de investigación, hemos formulado el siguiente objetivo general: Caracterizar las prácticas de referencia de los docentes en la enseñanza de las fracciones en sexto año básico, a la luz de los fenómenos de exclusión, opacidad y adherencia del dME.

Para lograr tal objetivo, se formularon los siguientes objetivos específicos:

- Identificar las sugerencias de enseñanza de las fracciones propuestas en el Programa de Estudio de Matemática vigentes para el sexto año básico.
- Diseñar una estructura metodológica para identificar y caracterizar las prácticas de referencia de los docentes en la enseñanza de las fracciones en sexto año básico a luz de los fenómenos de exclusión, opacidad y adherencia del dME.
- Describir las prácticas de referencia de los docentes al enseñar fracciones, en sexto año básico, en relación con los fenómenos de exclusión, opacidad y adherencia del dME a través de la observación de clases grabadas y entrevistas semiestructuradas.

MARCO TEÓRICO

Desde la Teoría Socioepistemológica (TS) se plantea la existencia de un discurso Matemático Escolar del cual surgen tres fenómenos: exclusión, opacidad y adherencia. Tomando los planteamientos de Cordero et al. (2015), el primero de los fenómenos se manifiesta en las prácticas de referencia de los docentes cuando dan prioridad a los saberes institucionalizados, como por ejemplo la utilización de métodos, donde el conocimiento se presenta invariable, inmodificable y orientados principalmente al cálculo, excluyendo las vivencias, la cultura o las ideas del profesor y de los estudiantes. El segundo fenómeno se identifica, por ejemplo, en aquellas prácticas donde profesores y estudiantes aceptan y replican un único método para sumar fracciones u obstruyen cualquier intento de aportar con nuevas visiones para generar la construcción del aprendizaje, es decir, opacando la pluralidad epistemológica. Finalmente, cuando el profesor y el estudiante se hacen parte y validan el dME imperante sin objeciones, se genera la adherencia.

METODOLOGÍA

El enfoque usado en esta investigación fue de carácter cualitativo con un alcance exploratorio y descriptivo. El diseño de este trabajo estuvo vinculado con los primeros dos ciclos de la investigación-acción, que para Hernández-Sampieri y Mendoza (2018) son: detectar el problema de investigación,

clarificarlo y diagnosticarlo, junto con sentar las bases para la formulación de un plan o programa para resolver la problemática implicada. En relación con la muestra, esta estuvo integrada por tres profesores (P1, P2 y P3) que imparten clases en sexto año básico en establecimientos educacionales de dependencia municipal y particular subvencionada. Los primeros pasos de la metodología se establecieron al determinar las principales características generales de los tres fenómenos del dME tomando como base los planteamientos de Cordero et al. (2015). Con este insumo, frente a cada característica general, se estableció una posible práctica de referencia del profesor que se podrían dar al enseñar las fracciones. Es decir, estas posibles prácticas de referencia funcionan como un indicador de la presencia o ausencia de algún fenómeno del dME cuando el profesor enseña las fracciones. Como resultado surgen las Tablas de Prácticas de Referencia [TPR] (ver Figura 1).

Figura 1.

Tabla de Prácticas de Referencia (TPR).

	Características Generales	Posibles prácticas de referencia del profesor al enseñar fracciones:
Exclusión	Existe una imposición de argumentos, significados y procedimientos que son arbitrarios y legitimados socialmente.	Establece o impone un método para resolver alguna actividad.
	Los actores educativos son víctimas involuntarias de la violencia simbólica.	Replica los procesos de enseñanza-aprendizaje institucionalizados sin cuestionamiento.
	No se considera la pluralidad epistemológica.	Centra su enseñanza en el objeto matemático, en conceptos y/o definiciones del mismo.
	No se considera la diversidad de la población.	Solo permite a los estudiantes replicar lo enseñado.
	El conocimiento está intacto, sin posibilidad de modificarse.	Enseña desde lo establecido o lo institucionalizado.
	El individuo solo aprende o conoce, más no construye.	Enseña desde una única forma.
Opacidad	Existe una invisibilidad de lo matemático en el dME.	No acepta lo matemático como del proceso de enseñanza-aprendizaje.
	La matemática se concibe solo desde los argumentos conceptuales donde prevalece la búsqueda de lo mecánico y del orden.	Las actividades se conciben desde métodos mecánicos o de paso a paso.
	Se opaca la pluralidad epistemológica.	No acepta respuestas logradas desde los usos del conocimiento matemático de la comunidad.
	Hay una falta de visibilidad de los argumentos del conocimiento.	Las explicaciones se argumentan solo desde la matemática.
	No hay relación entre el cotidiano y la matemática escolar.	Propone una actividad que se aleja del cotidiano del estudiante.
	La matemática del cotidiano no se considera conocimiento matemático.	Las respuestas a las actividades solo se aceptan desde la matemática.
Adherencia	Los actores adhieren al dME institucionalizado.	Se espera respuestas únicas en la actividad.
	Los actores no se atreven a trastocar el dME.	Se enseña desde una forma utilitaria.
	Los actores se hacen parte de la negación de la pluralidad epistemológica.	Se emplea un lenguaje desde la matemática.
	Los actores legitiman el dME.	Se acepta y replica un método de enseñanza institucionalizado.
	Los actores no aceptan otros marcos de referencia.	Hay dificultades en aceptar formas distintas de obtener las soluciones a las actividades propuestas.

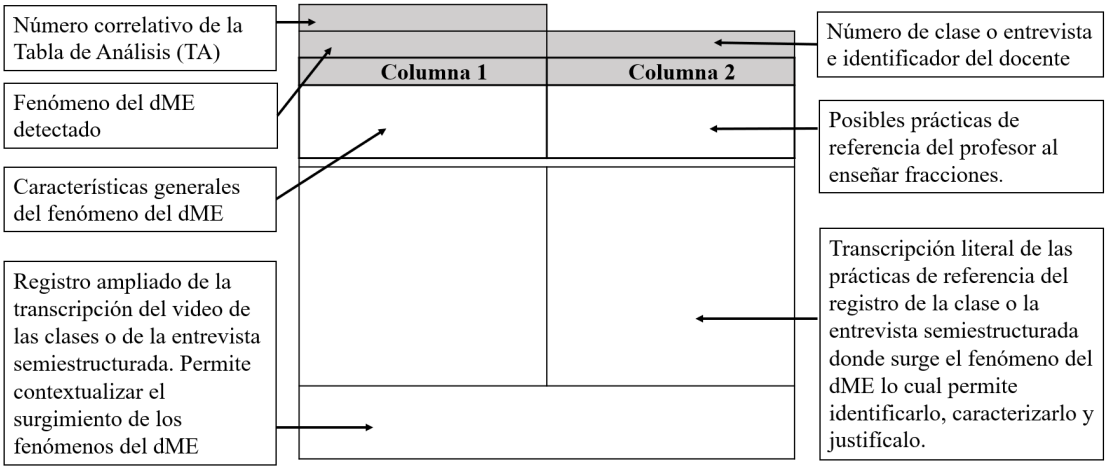
Fuente: Elaborado con base en Cordero et al. (2015).

En una segunda etapa, con las TPR ya elaboradas, se realizaron las observaciones de las videograbaciones de clases que aportaron los profesores para luego realizar la transcripción de estas. Además, con la finalidad de profundizar en las opiniones o ideas que tenían sobre sus prácticas de referencia o de los demás actores educativos que estén involucrados en el proceso de construcción del aprendizaje de las fracciones, se construyeron tres entrevistas semiestructuradas (una para cada docente). Estas preguntas se elaboraron tomando como insumo las características generales de los fenómenos del dME, es decir, frente a cada característica se generó una o más preguntas relacionadas con las prácticas de referencia observada en las videograbaciones. Una vez realizada la entrevista semiestructurada se procedió a transcribirla. Luego de identificar los fenómenos del dME en las prácticas de referencia o en las entrevistas semiestructuradas de los profesores, se procedió a utilizar una Tabla de Análisis (TA, ver Figura 2) por cada fenómeno del dME encontrado. Al implementar las TA se pudo caracterizar, tanto la presencia del fenómeno del dME, como su implicancia en las prácticas de referencia de los profesores al enseñar fracciones. Cabe consignar que las TA se basan

en las Tablas de Prácticas de Referencia y las transcripciones de las prácticas de referencia de los profesores y las entrevistas semiestructuradas.

Figura 2.

Descripción de la Tabla de Análisis (TA).



Fuente: Elaboración propia.

ANÁLISIS

Al utilizar las TA se pudo determinar la presencia de los fenómenos del dME en las prácticas de referencia de los docentes y en los comentarios de ellos originados en las entrevistas semiestructuradas. Una vez realizado el análisis y de contrastar la evidencia encontrada en las clases y las entrevistas de los docentes, se pudo identificar y caracterizar treinta evidencias de los fenómenos del dME en las prácticas de referencia de los profesores o en las entrevistas semiestructuradas. En los casos de P1 y P3, estos tienen mayor presencia del fenómeno de exclusión en sus prácticas de referencia. En el docente P2, sus prácticas de referencia tienen mayor presencia de opacidad. A pesar de los resultados anteriormente expuestos, se pudieron identificar, caracterizar y describir tanto en las prácticas de referencia como en las entrevistas semiestructuradas la presencia de los tres fenómenos del dME en los tres profesores participantes en esta investigación.

CONCLUSIONES

Como resultado de esta investigación se pudo constatar que los fenómenos de exclusión, opacidad y adherencia no se presentan en forma aislada en las prácticas de referencia de los profesores. Es decir, todos los docentes participantes evidenciaron la presencia, en menor o mayor medida, de los tres fenómenos del dME en sus prácticas de referencia o en sus comentarios en la entrevista semiestructurada. Lo anterior demuestra que los fenómenos del discurso Matemático Escolar no se muestran en forma aislada, es decir, se manifiestan en conjunto, como un sistema, donde uno de ellos resaltará más en las prácticas de referencia, dejando relegados, pero no ausentes a los otros. La exclusión marca su presencia en las prácticas de referencia de la enseñanza de las fracciones con una clara imposición de procedimientos.

Un ejemplo de lo anterior se encuentra cuando el docente P1 plantea lo siguiente a sus estudiantes: *"Recuerden que para calcular el mínimo común nosotros usábamos la tablita, cierto, entonces, empezábamos a dividir"*. Es decir, el profesor establece un método único para la obtención del Mínimo Común Múltiplo con lo cual impone un método de resolución. Entonces, la enseñanza se limita a una única forma de resolución, es decir, los estudiantes tienen como prioridad aprender y aplicar los procedimientos de resolución que el docente impondría. Además, estos procedimientos estarían alejados de las realidades de los estudiantes, con ello, la exclusión también funciona como una barrera entre las vivencias que tienen los estudiantes fuera de la escuela y las vivencias de la escuela. La presencia de la opacidad en el dME permite mantener una estructura hegemónica en la construcción de los aprendizajes. Una evidencia de lo anterior se encuentra cuando P2 propone la siguiente actividad alejada del cotidiano a sus estudiantes: *"El viernes se vendieron 9/18 del total de entradas, el sábado 4/18 y el domingo 5/18"*. Este ejemplo deja en claro que las prácticas de referencia se alejan de la matemática del cotidiano, es decir, este fenómeno se manifiesta opacando las otras formas de presentación de las actividades de aprendizaje. Con lo anterior, la matemática que está presente en el cotidiano se mantiene alejada de la matemática escolar.

En el caso de la adherencia, se pudo establecer que las prácticas de referencia del profesor adhieren sin objeciones al dME institucionalizado. Esta institucionalización se ve avalada por la omnipresencia de los lineamientos en general y en específico de lo que se debe enseñar y como se debe enseñar que entregan las instituciones educativas. P.ej., en la entrevista a P2, manifiesta la aceptación y replicación de un método de enseñanza institucionalizado cuando dice: *"Tendríamos que pasar igual por los procesos, o sea, la idea es que siempre se usa el COPISI*[2] *con lo concreto, lo pictórico y lo simbólico."* Entonces, la adherencia funciona como una barrera casi infranqueable que potencia una matemática escolar llena de mecanismos que se explican solo desde la misma matemática.

Durante esta investigación se diseñó una estructura metodológica que permitió identificar y describir la influencia que tienen los fenómenos del dME en las prácticas de referencia de los profesores al enseñar las fracciones. Estos fenómenos marcan su presencia con una serie de barreras que impiden que la matemática del cotidiano sea parte de la matemática escolar. A modo general, entre las barreras detectadas están las siguientes: a) La exposición de los profesores a las prácticas de referencia que fueron sometidos durante su periodo de formación académica (desde la escuela hasta la universidad). b) La rigidez de las instituciones escolares que se estructuran en torno a las recomendaciones entregadas en los Programas de Estudio, textos escolares, pruebas estandarizadas, etc. c) La divulgación involuntaria, por parte de los profesores, de un dME invariable al utilizar y recomendar métodos únicos y estructurados a sus estudiantes. d) La planificación de la enseñanza de las fracciones se realiza sin asumir la casi ausencia de estas en el cotidiano de los estudiantes.

REFERENCIAS

Cantoral. R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Gedisa.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Gedisa.

Farfán, R. (2012). *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente*. Gedisa.

[2] El modelo COPISI es entregado como recomendación en los Programas de Estudio de Matemática en Chile. Permite que los estudiantes transiten desde el material concreto a las representaciones simbólicas.

Hernández-Sampieri, R. y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la investigación: Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw-Hill Interamericana Editores.

FIGURACIONES QUE COMUNICAN ELEMENTOS PRECURSORES DE DIPOLOS MODELICOS ELECTRO/CORAZÓN

Maximiliano Núñez, Leonora Díaz

Universidad Católica Silva Henríquez

maximilianonunez.30@gmail.com, leonoradiazmoreno@gmail.com

En este trabajo se reportan desarrollos estudiantiles de enseñanza media provenientes de la introducción a un diseño de modelación, cuyo propósito es dar cuenta del comportamiento del corazón. El diseño orienta a la modelación figural como una alternativa para acercar la matemática de la escuela y las matemáticas situadas en prácticas de cardiólogos. Se suscribe una perspectiva socioepistemológica de modelación para establecer elementos precursores de dipolos modélicos electro/corazón, mediante la articulación de dos entidades desde la operatividad de una de ellas, para intervenir en la otra. Se analizan elaboraciones estudiantiles desde una perspectiva metodológica de diseño en un marco de investigación-acción.

Figuración, Modelación, Dipolo modélico.

INTRODUCCIÓN

Esta investigación se inscribe en la problemática que emerge desde prácticas de modelación que procuran el desplazamiento de prácticas situadas no escolares a las prácticas escolares. En el ámbito de la educación matemática, en particular para la visión socioepistemológica de Arrieta y Díaz (2016) modelar articula dos entidades, desde la operatividad de una de ellas para intervenir en la otra. Se instala la problemática de que la figura no es objeto de estudio del aula de matemáticas. En consecuencia, interesa abordar el problema atendiendo al uso de las figuras en aula de clases desde comunidades de prácticas de cardiólogos. En el marco mayor de la desvinculación entre las matemáticas de la escuela y las del entorno, se observa que la modelación matemática del aula suele remitirse a trabajar con ejercicios de funciones, en tanto que, las comunidades de prácticas recurren a herramientas matemáticas situadas. En este reporte se presentan los desarrollos de estudiantes de cuarto año medio de enseñanza media en ambiente figural, parte de una investigación acción guiada por la pregunta orientadora ¿Qué elementos precursores de dipolos modélicos electro/corazón presentan elaboraciones estudiantiles?

MARCO TEÓRICO

Figuración

Al decir de Carrasco et al. (2014) las prácticas de figuración centran la mirada en el acto de figurar, es decir, de construir la figura o de interpretarla. Conciben por figura al conjunto de líneas que dibuja, en dos dimensiones, aspectos ostensibles y no ostensibles de un fenómeno; y, por figuración de dicho fenómeno cuando sus elementos sean significados como aspectos de este. El estado del arte ilustra el uso de figuraciones no cartesianas por estudiantes y profesorado, a menudo “en lugar de” la gráfica cartesiana esperada por el diseño de enseñanza (Carrasco et al., 2014). Comprender estas prácticas socio escolares de figuración de fenómenos con que se comunican los estudiantes, emerge como una tarea necesaria en educación matemática.

Al decir de Cordero et al. (2010) en Carrasco et al. (2014), la graficación cartesiana es una práctica en el seno de diversas instituciones, entre ellas la escuela, en la que permanece y se desarrolla desde el discurso matemático escolar. En este reporte no se estudia la gráfica cartesiana desde su operatividad matemática, sino que se busca que ella aparezca en el ejercicio de prácticas (Cantoral et al., 2006). Configurando una epistemología de figuras y prácticas que den base de significación a la matemática escolar (op. cit., 2014). Cuando los estudiantes figuran se enactan aquellos conjuntos de ideas y de acciones con base en la historia ininterrumpida de coordinaciones con los entornos, con los otros, con los que ha vivido, así como con los otros que concurren en el aula, modificándolos y modificándose en la medida en que actúan (op. cit., 2014).

Modelación

Al decir de Arrieta y Díaz (2015)

> Concebimos a la modelación como una práctica que articula dos entidades, con la intención de intervenir en una de ellas, llamada lo modelado, a partir de la otra llamada el modelo. La diversidad, tanto de las entidades que intervienen en la articulación como la naturaleza de la intervención, hacen posible identificar a la modelación como una práctica recurrente en diferentes comunidades (op. cit., 2015).

Interesa que los estudiantes establezcan dipolos modélicos mediante la articulación de dos entidades para, desde la operatividad de una de ellas, intervenir en la otra. Lo anterior se ejemplifica al articular una tabla de datos, o una figura, o una gráfica o una expresión algebraica con un fenómeno. Al decir de Arrieta y Díaz (2015).

> La articulación de los entes iniciales da lugar a un nuevo ente, al modelo (mo) que resulta adherido a lo modelado (ma). Tal articulación constituye una nueva entidad para la vivencia de quien modela y que podemos denotar (ma, mo) y que nominamos dipolo modélico (DM) (2015, p. 35).

METODOLOGÍA

La investigación de naturaleza cualitativa está guiada por una pregunta orientadora que se corresponde con el paradigma metodológico de investigación de diseño en un marco de investigación-acción (Molina, 2006). Se pone en escena un diseño de modelación que induce la inmersión de los estudiantes en facetas de una práctica de cardiólogos.

Se realiza la actividad con estudiantes de segundo ciclo de enseñanza media, de un establecimiento educacional público de la V región. El reporte considera un primer diseño en el marco de un trabajo de grado, por lo que se considera la actividad que propicia la modelación con la participación de tres grupos de cuatro estudiantes.

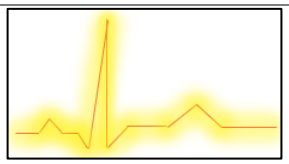
Se presentan elementos que propicien la inmersión de los estudiantes en los conceptos de cardiología y su relación con la figura del electrocardiograma. Se les solicita replicar figuras de electrocardiogramas con la intención de que comuniquen elementos precursores de dipolos modélicos electro/corazón. El modo de análisis de los resultados considera el marco de comunidades de práctica propuesta por Arrieta y Díaz (2015) las dimensiones de herramientas, argumentos e intenciones. Por su parte de Carrasco et al. (2014) se añade la dimensión de metáforas de base.

Desarrollo de la actividad

Se les solicita a los estudiantes replicar figuras de electrocardiogramas. Para eso figuran a partir de la narración del fenómeno y una imagen de un electrocardiograma. Se presentan elementos que propician la inmersión de los estudiantes en los conceptos de cardiología y su relación con la figura del electro. A continuación, se analizan las figuras realizadas por los estudiantes.

Tabla 1.

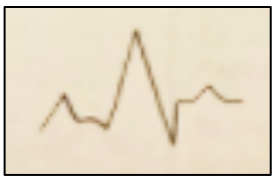
Análisis figura grupo 1.

Figura	Dimensión	Análisis
	Metáforas de base	Una banda amarilla como superficie que realza a la curva. Segmento horizontal como la normalidad del comportamiento del corazón.
	Herramientas	Líneas rectas horizontales y oblicuas de color rojo. Segmentos con cierto ángulo de elevación. Destacador amarillo que sigue la silueta de la figura.
	Argumentos	La línea oblicua de mayor longitud refleja la manera exponencial con que se llega al punto máximo apogeo. La línea horizontal refleja que vuelve a la normalidad el comportamiento del corazón.
	Intenciones	Se figura para dar cuenta del comportamiento del corazón.

Nota. Elaboración propia.

Tabla 2.

Análisis figura grupo 2.

Figura	Dimensión	Análisis
	Metáforas de base	Curva configurada por segmentos horizontales rectos como ondas. Una banda negra como superficie que da forma a la curva.
	Herramientas	Líneas rectas horizontales y oblicuas de color negro. Segmentos con cierto ángulo de elevación.
	Argumentos	La línea oblicua de mayor longitud porque es desproporcional a las demás curvas. La contracción del ventrículo se

		encuentra de manera distinta a la figura testigo por lo que el complejo QRS es más ancho que la muestra testigo.
	Intenciones	El segmento QRS está comunicando una mayor longitud. La curva T se encuentra de forma irregular comunicando una anomalía en la dilatación de los ventrículos.

Nota. Elaboración propia.

Tabla 3.

Análisis figura grupo 3.

Figura	Dimensión	Análisis
	Metáforas de base	Curvas como montes o valles. Segmento horizontal como lapso del electrocardiograma entre curvas. La figura como un ciclo del electrocardiograma.
	Herramientas	Líneas rectas horizontales y curvas oblícuas. Segmentos con cierto ángulo de elevación.
	Argumentos	La línea oblicua de mayor longitud refleja un mayor impulso eléctrico.
	Intenciones	La intención de los estudiantes es de informar al paciente que el corazón está funcionando con normalidad.

Fuente. Elaboración propia.

Con respecto a las metáforas de base se puede concluir que el grupo uno figura una curva de segmentos rectos como trayectoria de mínima intensidad a su punto máximo de apogeo del comportamiento del corazón. Las figuras del grupo dos y tres, figuran una banda negra como superficie que realza a la curva que configuran segmentos horizontales rectos como ondas. Estas son marcos para la figuración del comportamiento del corazón. Respecto a los argumentos en la figura del grupo uno se concibe la línea horizontal por la normalidad del comportamiento del corazón o una estabilidad del pulso eléctrico. En la Tabla 2 se evidencia que la contracción del complejo QRS es más ancho que la muestra testigo, ya que, los ventrículos se encuentran de manera distinta a la figura testigo. En la figura tres la línea oblicua de mayor longitud refleja un mayor impulso eléctrico. En herramientas los estudiantes aluden a conceptos matemáticos en la figura, el grupo uno presentó un cierto ángulo de elevación y un destacador amarillo que sigue la silueta de la figura. Tanto en la figura del grupo dos y tres se presentan líneas rectas horizontales y curvas oblicuas con segmentos de color

negro. En las intenciones se puede concluir que en la figura del grupo uno surge la importancia de la vida en el comportamiento del corazón y sus momentos álgidos. En las dos figuras restantes se comunica con claridad el complejo QRS, relevando su importancia como una parte crucial de la figura y el funcionamiento del corazón. Configuran el dipolo modélico figural "funcionamiento del corazón/figura del electrocardiograma del paciente".

A MODO DE CONCLUSIÓN

Los análisis de los desarrollos estudiantiles y de cardiólogos ponen en evidencia las potencialidades de la actividad de modelación figural: Las actividades y su secuencia conducen a que los estudiantes vivencien un ambiente con altos grados de inmersión, verosimilitud e interacción con el fenómeno y su figura. Las figuras de los estudiantes corresponden a imágenes icónicas fijas. Exhiben curvas de segmentos rectos que dan cuenta de las contracciones y dilataciones del corazón y muestran el momento inicial y final de un ciclo. Más ampliamente, se constituye una deconstrucción de una práctica situada de cardiólogos en el aula de matemáticas, configurando el dipolo modélico electro/corazón de los cardiólogos; sus producciones presentan elementos precursores de esta práctica de modelación. Los resultados evidencian que el estudiante al momento de figurar, en paralelo describe el comportamiento del corazón de una persona. De esta forma emerge el dipolo modélico figural del estudiante, funcionamiento del corazón articulado con el electrocardiograma del paciente. Se levanta sobre esta base la propuesta de incorporar la modelación figural a la enseñanza de la modelación en aulas de matemáticas.

REFERENCIAS

Arrieta, J., y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa. 18*(1), 19-48.

Carrasco, E., Díaz, L., y Buendía, G. (2014). Figuración de lo que varía. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 32*(3), 365 – 384.

Díaz, L. (2007). Coherencias cognitivas vs matemáticas en el estudio del cambio. En Crespo, Cecilia Rita (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 394-399). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada, España].

Suárez, L., y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 3*(1), 51–58.

CONCEPCIONES SOBRE EVALUACIÓN DE LOS FORMADORES DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA

Beatriz Aros[1], Helena Montenegro[2]

[1]Pontificia Universidad Católica de Chile, [2]Universidad de Chile

bsaros@uc.cl, helena.montenegro@uchile.cl

Este estudio busca comprender las concepciones sobre enseñanza de los formadores de pedagogía en matemática. Para ello, se realizaron entrevistas semiestructuradas a siete formadores de matemática de carreras de pedagogía de universidades acreditadas por el estado. Por medio de un análisis fenomenográfico, se identificaron cuatro categorías de descripción: la evaluación como medio para la certificación; la evaluación como medio para la mejora de la enseñanza; la evaluación como medio para el aprendizaje; y la evaluación como un proceso intrínseco en la enseñanza y aprendizaje. Finalmente, se discute el rol de clave de los formadores en este aprendizaje.

Educación matemática, Formador, Evaluación, Fenomenografía, Concepciones.

INTRODUCCIÓN

La formación docente inicial cumple un rol clave en el aprendizaje y desarrollo de las prácticas de evaluación de los futuros profesores (Brookhart, 2017; Patterson et al., 2020). Se espera que los profesores desarrollen la capacidad de observar el progreso de los estudiantes y, además, sean capaces de evaluar a los alumnos utilizando métodos y enfoques variados para caracterizar y comunicar con precisión los resultados del aprendizaje hasta ese momento con sus alumnos. Para el caso de la educación matemática, además de contenidos matemáticos y pedagógicos, los estudiantes en formación necesitan aprender prácticas de evaluación formativa y sumativa (DeLuca et al., 2013).

Sin embargo, diversos estudios han evidenciado que en la formación universitaria la evaluación suele considerarse separada de la enseñanza, y los profesores universitarios se preocupan más por el contenido del curso y las estrategias de enseñanza que por la evaluación (Postareff et al., 2012). En consecuencia, no es difícil imaginar las contradicciones y discrepancias en la experiencia del aprendizaje a la evaluación dentro de la formación del profesorado.

Diversos estudios han subrayado este ámbito como una carencia general del profesorado. La mayoría de los instrumentos que se enseñan son sumativos, y los académicos tienden a ser inconsistentes en el diseño de evaluaciones que permitan evidenciar el aprendizaje de los estudiantes (Brown, 2022). Estas dificultades también han sido investigadas en profesores principiantes, encontrándose bajos niveles de confianza en la evaluación de los resultados del aprendizaje, y dificultad para encontrar el equilibrio en la aplicación de evaluaciones formativas y sumativas (DeLuca et al., 2013). Otro aspecto interesante de consignar es que dichos profesores señalan que durante su formación inicial no fueron preparados adecuadamente para evaluar a los estudiantes (Volante y Fazio, 2007).

Una forma de poder avanzar en el aprendizaje de la práctica de evaluar es profundizar en el rol clave de los formadores como modelos de enseñanza de los estudiantes en formación (Lunenberg et al., 2007). Si las prácticas de enseñanza que adoptan influyen en la comprensión de los procesos de aprendizaje y enseñanza de los futuros profesores, los formadores también modelan formas de

comprender la evaluación al adoptar algunas estrategias evaluativas por sobre otras. Brookhart (2017) plantea que el repertorio de prácticas de enseñanza efectivas de los estudiantes en formación está relacionado con las creencias sobre el aprendizaje y el enfoque de la evaluación adoptado por los formadores de profesores que lo instruyen. Por lo tanto, cualquier esfuerzo para mejorar las prácticas de evaluación de los formadores de profesores de matemáticas tendrá un impacto positivo en las experiencias de aprendizaje de sus estudiantes.

Como una forma de aportar a este debate, el presente estudio comparte los resultados de un estudio orientado a identificar las concepciones de la evaluación que tienen los formadores de matemáticas desde un enfoque fenomenográfico (González-Ugalde, 2014). Este tipo de enfoque se orienta a comprender un fenómeno desde un grupo de sujetos, identificando y describiendo las variaciones cualitativas de las experiencias, significados, percepciones, y/o comprensiones que puede tener las personas frente al fenómeno en estudio. Por medio de este enfoque se espera caracterizar las concepciones de evaluaciones que poseen los formadores, de modo tal de avanzar hacia aquellas más complejas y sofisticadas.

La relevancia de esta propuesta radica en levantar evidencias empíricas sobre un tema escasamente investigado, aportando con una mejor comprensión de la forma en que formadores de profesores de matemáticas articulan y enseñan la práctica de evaluar a sus alumnos. Además, los resultados de este estudio pueden contribuir con avanzar hacia modelos más complejos para evaluar los resultados de aprendizaje de los estudiantes.

METODOLOGÍA

Esta investigación se enmarca en un paradigma cualitativo de investigación, adoptando un enfoque fenomenográfico (González-Ugalde, 2014). Para identificar las concepciones sobre evaluación de los formadores de matemática en carreras de pedagogía en matemática, se entrevistó a siete formadores de carreras de pedagogía en matemática de universidades acreditadas por el estado que realizan cursos disciplinares y/o didácticos. La muestra quedó conformada por 4 hombres y 3 mujeres. Con relación a su formación inicial el 71% era profesores y el 29% eran matemáticos; el 28.6% tenían grado académico de Magíster y el 71.4% de Doctor. El promedio de años de experiencia profesional como formadores era de 11.6 años con un mínimo de 6 y un máximo de 18 años. Todos los formadores participaron de manera voluntaria y firmaron un consentimiento informado de acuerdo con los estándares nacionales.

Para la recolección de información, se realizaron entrevistas fenomenográficas que corresponden a entrevistas semiestructuras que tienen como propósito describir las maneras cualitativamente diferentes que tienen los participantes de experimentar un fenómeno específico, buscando que los participantes reflexiones y se hagan conscientes de dicha experiencia (González-Ugalde, 2014). En estas entrevistas se exploraron temas relacionados con la conceptualización de la evaluación, prácticas evaluativas, uso de instrumentos, propósitos de la evaluación, entre otros.

Respecto a la estrategia de análisis de las entrevistas, el conjunto inicial de significados se construyó mediante la categorización de los datos en base a las ideas compartidas expresadas por todos los participantes. Mediante este proceso, se definieron diferentes categorías de descripción y se organizaron jerárquicamente para crear un espacio de resultados (Åkerlind, 2005). Además, se

exploraron diversas dimensiones de variación para enriquecer la relación lógica entre las categorías de descripción.

RESULTADOS

En esta sección se describirán los resultados encontrados al realizar el análisis. En una primera instancia se describirán brevemente las categorías de descripción, y en una segunda instancia se mostrarán las dimensiones de variación encontradas.

Respecto a las categorías de descripción, se encontraron cuatro que corresponden a: la evaluación como medio para la certificación; la evaluación como medio para la mejora de la enseñanza; la evaluación como medio para el aprendizaje; y la evaluación como un proceso intrínseco en la enseñanza y aprendizaje. Cada una de ellas se describirán a continuación.

Categoría A: Evaluación como medio para la certificación

En esta categoría, los formadores conciben la evaluación como una asignación de valores numéricos, es decir, calificar a sus estudiantes al término de los procesos de enseñanza. En esta categoría de descripción el foco se encuentra en el docente y en la enseñanza, y además existe una tendencia al uso de un solo instrumento de evaluación, que es comúnmente la prueba tradicional. Esto se aprecia en la siguiente cita:

> Yo creo que se ajusta bastante a la definición que te di digamos. Es asignarles valores a respuestas en una determinada prueba, o instrumentos de evaluación**, asignando valores que son en cierta forma determinados por lo que al profesor le interese evaluar.** Ya sea conocimiento de una teoría, destreza adquirida al resolver algunos determinados problemas matemáticos, hasta un poco de cultura matemática también puedes evaluar (Formador 6).

Categoría B: Evaluación como medio para la mejora de la enseñanza

En esta categoría de descripción, los formadores aún conciben la evaluación como certificación y está centrada en la enseñanza. Sin embargo, se diferencia de la categoría anterior en que los formadores utilizan la evaluación como información para realizar ajustes a sus prácticas de enseñanza. Es decir, la evaluación cumple dos aspectos claves: por un lado, acredita el conocimiento de los estudiantes, y por otro, entrega evidencias sobre la enseñanza impartida por el formador. Esto se visualiza en la siguiente cita:

> (…) la idea de evaluar es lograr **acreditar un cierto conocimiento del curso que se está desempeñando el estudiante o estoy yo impartiendo**. Entonces la evaluación primero que nada registra eso, es una especie… **yo diría un proceso estadístico que permita medir el resultado de conocimiento y de… yo lo veo un poco del dominio de lo que se imparte en el curso de parte del estudiante**. Para el profesor, ese proceso de evaluación como te decía es una parte de estadística, **pero también es una parte de responsabilidad del profesor de ver el avance curricular del estudiante en el proceso** (Formadora 5).

Categoría C: Evaluación como medio para el aprendizaje

A diferencia de las categorías de descripción anteriores, en esta categoría se observa un cambio en el foco de evaluación, la cual está orientada hacia el aprendizaje de los estudiantes. Es decir, los formadores se focalizan en evaluar los aprendizajes de sus estudiantes, y conciben la evaluación como

un medio para observar o reconocer los aprendizajes que han desarrollado. Esto se aprecia en la siguiente cita:

> En el fondo para mí evaluar es **medir de alguna forma**… el aprendizaje de los estudiantes. (…) para mí es eso, ir **viendo, observando, midiendo de alguna forma el aprendizaje de los estudiantes** (Formadora 1).

Categoría D: Evaluación como un proceso intrínseco en la enseñanza y aprendizaje

En esta categoría de descripción, al igual que la categoría de descripción anterior, los formadores conciben que la evaluación se encuentra focalizada en los estudiantes y en el aprendizaje que ellos desarrollan. Sin embargo, se observa además que los formadores conciben que la enseñanza y la evaluación son procesos interconectados y relacionados entre sí, y que la evaluación se focaliza en buscar evidencias de aprendizajes. Esto se evidencia en la siguiente cita:

> (…) **evaluar para mí es obtener evidencias de aprendizaje, o sea en el fondo… y qué hacer con ellas**. Evaluar no lo tengo conceptualizado como el instrumento de evaluación o como la prueba o como la nota, sino que como un proceso. **Para mí la evaluación es parte de la enseñanza-aprendizaje, no es otro proceso distinto de la enseñanza-aprendizaje** (Formador 2).

Dimensiones de variación

Se encontraron tres dimensiones de variación en estas categorías de descripción, que corresponden al cómo se evalúa, para qué se evalúa y la preparación de la evaluación. En la primera dimensión de variación relacionada a *cómo se evalúa,* se aprecia que los formadores adoptan distintas estrategias de evaluación, las cuales oscilan desde el uso de sólo un instrumento de evaluación (la prueba), hasta el uso de diversas estrategias evaluativas aplicadas a un contexto profesional. Con relación a la segunda dimensión de evaluación, relacionada con *para qué se evalúa,* se observa que los formadores describen el propósito a la base de la evaluación, transitando desde un propósito focalizado en certificar al estudiante hasta uno orientado a ajustar los procesos de enseñanza y de aprendizaje que imparte. Finalmente, respecto de la última dimensión de variación relacionada con *la preparación de la evaluación*, se identificó que los formadores tienen distintos métodos para preparar sus evaluaciones, los cuales varían desde la preparación de una prueba por ensayo y error y en base a la dificultad del ítem, hacia una preparación de un instrumento de evaluación de manera colaborativa en donde se integran los procesos de enseñanza con los procesos de evaluación.

CONCLUSIONES

El presente estudio profundizó en las concepciones sobre evaluación que tienen los formadores de matemáticas. Se identificaron cuatro categorías de descripción, las cuales transitan desde concebir la evaluación una perspectiva simple y tradicional centrada en las calificaciones y certificación, hasta la evaluación como un proceso intrínseco en la enseñanza y el aprendizaje. En esta última concepción, la evaluación se concibe desde una perspectiva más compleja, centrándose en los estudiantes como futuros profesores, y valorando su desempeño profesional. Estos hallazgos, a pesar de estar en línea con los reportados en estudios similares (DeLuca et al., 2013; Postareff et al., 2012; Volante y Fazio, 2007), proporcionan una perspectiva más completa del fenómeno al revelar que estas concepciones varían en términos de cómo se explica la complejidad enseñanza y aprendizaje. En la categoría A y B la evaluación se considera separada del proceso de enseñanza y aprendizaje, y se centra en la medición del contenido aprendido. En cambio, en la categoría C los formadores son conscientes del

aprendizaje de sus estudiantes, y en la categoría D la evaluación se considera parte integrante del proceso de enseñanza, buscando evidencias de aprendizaje.

Estos resultados son significativos por varias razones. En primer lugar, en todos los programas de formación los estudiantes están expuestos a diversas prácticas de evaluación aplicadas por sus formadores (Lunenberg et al., 2007). Por lo tanto, dependiendo de las prácticas de evaluación que los formadores adopten, los estudiantes en formación pueden integrar diversas perspectivas y posicionamientos dependiendo de la forma en que el formador conceptualiza dicha práctica. En segundo lugar, si los estudiantes en formación están expuestos a un número limitado de enfoques de evaluación, invariablemente utilizarán estos enfoques en el sistema escolar. En otras palabras, los formadores de profesores de matemáticas no sólo desempeñan un papel clave en la forma en que los estudiantes de magisterio aprenden a evaluar, sino que también tienen la oportunidad de influir en las prácticas de evaluación en el sistema escolar.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación es posible gracias al proyecto FONDECYT REGULAR 1212067, y apoyada por el Centro de Modelamiento Matemático (CMM), ACE210010 y FB210005 fondos BASAL, financiados por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile (ANID). Además, forma parte de las iniciativas de la Cátedra Unesco: *Formación de docentes para enseñar matemática en el siglo XXI.*

REFERENCIAS

Akerlind, G. (2005). Variation and commonality in phenomenographic research methods. *Higher Education Research and Development*, *31*, 321–334.

Brookhart, S. M. (2017). Functions of formative assessment in teacher education. En J. Clandinin y J. Husu (Eds.), *International Handbook of Research on Teacher Education* (pp. 927–943). Sage.

Brown, G. (2022). Student conceptions of assessment: Regulatory Responses to our practices. *ECNU Review of Education*, *5*(1), 116–139

DeLuca, C., Chavez, T., Bellara, A., y Cao, C. (2013). Pedagogies for preservice assessment education: Supporting teacher candidates' assessment literacy development. *Teacher Educator*, *48*(2), 128–142.

González-Ugalde, C. (2014). Investigación fenomenográfica. *Magis, Revista Internacional De Investigación En Educación*, *7*(14), 141–158. https://doi.org/10.11144/Javeriana.M7-14.INFE

Lunenberg, M., Korthagen, F., y Swennen, A. (2007). The teacher educator as a role model. *Teaching and Teacher Education*, *23*(5), 586–601.

Patterson, C. L., Parrott, A., y Belnap, J. (2020). Strategies for assessing mathematical knowledge for teaching in mathematics content courses. *Mathematics Enthusiast*, *17*(2–3), 807–842.

Postareff, L., Virtanen, V., Katajavuori, N., y Lindblom-Ylänne, S. (2012). Academics' conceptions of assessment and their assessment practices. *Studies in Educational Evaluation*, *38*(3–4), 84–92

Volante, L., y Fazio, X. (2007). Exploring teacher candidates' assessment literacy: Implications for teacher education reform and professional development. *Canadian Journal of Education, 30*(3), 749–770.

ATENCIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICA

Celeste Patitucci, Patricia Sureda, Verónica Parra

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

celestepatitucci@hotmail.com.ar, psureda@exa.unicen.edu.ar, vparra@exa.unicen.edu.ar

Este trabajo presenta resultados preliminares de un estudio sobre el problema de atención en clases de matemáticas de la escuela secundaria argentina. Para ello se describen y analizan dos clases de matemáticas con contratos didácticos distintos. Los resultados muestran que el contrato didáctico de tipo magistral obtuvo peores resultados que en el de tipo no tradicional (por resolución de problemas) frente a distractores de atención similares.

Atención, Escuela Secundaria, Enseñanza, Matemática.

INTRODUCCIÓN

Cada día, más profesores reportan que sus estudiantes se desconcentran con facilidad y tienen dificultades para mantener la atención en el aula. Los mecanismos atencionales y los de la memoria son las principales funciones neuropsicológicas que sostienen los procesos de aprendizaje. Pues el aprendizaje sólo es posible si se mantiene un proceso de atención sostenida sobre el saber. Sin embargo, aunque las investigaciones sobre el proceso atencional llevan bastante tiempo (Santalla de Banderali y Cañoto Rodríguez, 2006), el trabajo de investigación sobre la atención en el aula es escaso. Entre los trabajos pioneros sobre la atención en el aula se encuentran los de: Johnstone y Percival (1976), Hartley y Cameron (1967), Maddox y Hoole (1975). Todos ellos intentan establecer una relación entre atención y aprendizaje en clases magistrales. Mientras que trabajos más recientes como el de Figueiredo y Perticarrari (2022) lo hace para clases no magistrales, que requieren que los estudiantes formulen hipótesis, discutan, y aprendan de sus errores. En el aula de matemática solo hemos encontrado el trabajo de Gunesch (2015), quién analiza clases de enseñanza magistrales en la formación de profesores, en Austria. En todos los casos afirman que quienes mantienen la atención durante el proceso de enseñanza, obtienen mejores resultados.

En este trabajo describimos los distractores de atención presente en el aula de matemáticas analizada, los indicadores de atención que hemos podido identificar, y las acciones del profesor que ayudaron a potenciarla. Para ello, implementamos y analizamos dos clases con contratos didácticos diferentes: una, en la cual se implementó un método de enseñanza tradicional (explicación del profesor en el pizarrón), y otra clase en la que el saber se enseñó a partir de una tarea/situación que requería la participación activa de los estudiantes.

MARCO TEÓRICO

La atención implica percepción selectiva y dirigida; interés por una fuente particular de estimulación y esfuerzo; o concentración sobre una tarea (Van Zomeren y Brouwer, 1994). Posner y colaboradores han propuesto una teoría (Posner y Petersen, 1990; Posner y Rothbart, 1991; Posner y Dehaene, 1994) en la cual la variedad de manifestaciones atencionales está producida por sistemas atencionales separados, aunque relacionados entre sí:

- **El alerta**, indica cuándo prestar atención y adapta nuestro nivel de vigilancia.

- **La orientación de la atención**, que muestra a qué prestar atención y amplifica cada objeto de interés.
- **El control ejecutivo**, que decide cómo procesar la información a la que atendemos: selecciona los procesos que son apropiados para determinada tarea y controla su ejecución.

Cada uno de estos sistemas modula masivamente la actividad cerebral y puede facilitar el aprendizaje, pero también orientarlo en la dirección equivocada. Así, la atención es fundamental, pues si los estudiantes están distraídos o no comprenden a qué deben prestar atención, permanecen por completo ajenos al mensaje de su maestro; simplemente no lo perciben; y lo que no se percibe no puede aprenderse (Leong et al., 2017).

METODOLOGÍA

Teniendo en cuenta las investigaciones mencionadas previamente, diseñamos e implementamos dos tipos de clases (CLASE 1 y CLASE 2), con diferentes contratos didácticos. El propósito de esta investigación cualitativa es, por una parte, analizar los tipos de distractores e indicadores de atención; y por otra parte, analizar si el tipo de enseñanza modificó o no el funcionamiento de los distractores e indicadores de atención.

En la CLASE 1, se enseñó la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, mediante una clase que mantenía un contrato didáctico del tipo tradicional. Los estudiantes estaban ubicados con dirección hacia el pizarrón, en forma individual. El profesor es quién explicaba en el pizarrón mientras las iba resolviendo y los estudiantes las copiaban. Los estudiantes tenían la oportunidad de preguntar sobre la resolución. En este tipo de clase, según Johnstone y Percival (1976), y Gunesch (2015); el grupo de estudiantes que parece más atentos mientras se les explica el tema, obtienen buenos resultados en el examen.

En la CLASE 2, se propuso la enseñanza de los números irracionales mediante una clase que mantenía un contrato didáctico del tipo no tradicional. El profesor les propuso la enseñanza de números irracionales mediante una tarea denominada *desafío*; ubicó a los estudiantes en dos grupos y les dio diez minutos para que, con lo que sabían, resolvieran la tarea. Esto es, no hubo explicaciones previas. Este tipo de clase, según Dehaene (2019) tiene el potencial para proporcionar el compromiso activo del estudiante, desencadenando mecanismos de atención y feedback basados en el error, lo cual sería importante para el aprendizaje.

El curso

Se analizan dos clases de matemáticas de cuarto año de una escuela secundaria rural, con orientación en ciencias naturales. El grupo está formado por once estudiantes (15-17 años). En el grupo hay dos estudiantes que presentan trastornos de aprendizaje: a) Trastorno del Espectro Autista y b) Discapacidad Intelectual. Esto implica que en el aula se encuentra además de la profesora del curso, un acompañante terapéutico que colabora con el aspecto social y conductual de uno de los estudiantes; y una docente inclusora que es quien adapta el saber de la clase, para ellos dos. Los demás estudiantes tienen características acordes a su edad. Los alumnos desayunan y almuerzan dentro del horario de clase.

La triangulación de los datos se realiza mediante las notas de clases del profesor, las producciones de los estudiantes, y el audio de las clases; de las cuales luego se realizaron las transcripciones de ellas.

ANÁLISIS DE DATOS

CLASE 1: La clase comenzó con el profesor en el pizarrón resolviendo ecuaciones lineales con una incógnita como la siguiente: $\frac{1}{3} . \left(2x + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}x - 1$; mientras les iba explicando el procedimiento y haciéndoles preguntas. Durante el trascurso de las dos horas de clase se identificaron los siguientes distractores: **(a)** Cinco veces los estudiantes hablan con el profesor sobre situaciones ajenas al estudio de matemática (se clasifica como Distractor Interno 1 - DI1). En todos los casos los estudiantes dejan de estudiar matemática (se clasifica como No Estudian Matemática 1 - N.E.M1). **(b)** Dos veces los estudiantes realizan acciones peligrosas en clase, como amacarse en su silla (se clasifica como distractor interno 3 – DI3). En los dos casos los estudiantes dejan de estudiar matemática (se clasifica como No Estudian Matemática 1 - N.E.M1). El profesor les indica que no lo hagan y en los dos casos el estudiante retoma la actividad matemática (se clasifica como retoma la actividad matemática - E.M2). **(c)** Varias veces algunos estudiantes revisan sus teléfonos móviles durante el transcurso de la clase (se clasifica como Distractor Interno 4 – DI4), con lo cual dejan de estudiar matemática (N.E.M1). **(d)** Cinco veces entran personas ajenas a la clase (se clasifica como Distractor Externo 1 - DE1). En todos los casos los estudiantes dejan de estudiar matemática (N.E.M1).

Entra un gato, al final de las dos horas de clases el grupo resuelve únicamente cuatro ecuaciones de primer grado con una incógnita.

CLASE 2: El profesor comienza la clase proponiendo un "desafío" que los estudiantes deberán resolver con lo que saben, es decir sin mediar ninguna explicación. También se les indica que deben formar grupos para resolver la tarea, y que está prohibido hablar de un tema en clase, que no sea de matemáticas. *Desafío: Determinar exactamente la diagonal de un cuadrado de lado 1.* Rápidamente los estudiantes forman dos grupos, y comienzan a tratar de encontrar la solución. El profesor camina por la clase y ve que la mayoría mide la diagonal con regla. Una vez que terminan el profesor les va pidiendo que le dicten sus resultados y los anota en el pizarrón. Los resultados son: 1,4; 1,2; 1,3; 1,4 etc. Cuando el profesor les cuestiona sobre la diferencia de valores, y les pide que encuentren la forma de conseguir un único valor; una estudiante recuerda el teorema de Pitágoras y lo expone en el pizarrón con la ayuda del profesor. A partir de allí los estudiantes trabajan en grupos hasta que encuentran el valor de la ¿raíz cuadrada de uno? y la exponen en el pizarrón. El timbre del fin de la clase suena cuando están discutiendo cuál es la cantidad de decimales que tiene el número. Pues están los estudiantes que afirman que es el valor que está en el visor de la calculadora, los que preguntan si ese decimal de la calculadora se repite, y los que dicen que el número sigue pero no entra en la calculadora. El profesor se retira mientras los estudiantes lo siguen hasta la puerta con las preguntas sobre el número. Durante el transcurso de la hora de clase se identificaron los siguientes distractores: **(a)** Un estudiante le pregunta al profesor sobre una situación ajena al estudio de matemática (DI1). El estudiante deja de estudiar matemática (N.E.M1) El profesor les indica que solo se puede hablar de matemática, y el estudiante retoma la actividad matemática (E.M2). **(b)** Algunos estudiantes usan sus teléfonos móviles durante el transcurso de la clase (DI4). Pero como era para 0 calcular la raíz cuadrada, el profesor se los permite (como los estudiantes continúan con el estudio del desafío se clasifica como E.M1). (c) Entran personas ajenas a la clase (DE1). Pero todos los estudiantes

continúan estudiando matemática (E.M1). (e) Un estudiante se asoma con un gato a la clase (DE4). Los estudiantes siguen estudiando matemática (E.M1).

RESUTADOS

La descripción y análisis de los dos tipos de clases permitió identificar distractores de atención Internos y Externos, según las siguientes categorías:

Distractores internos al grupo: Hace referencia a acciones que se generan por individuos integrantes del grupo de clase: **DI1:** Uno o más integrantes de la clase hablan sobre un tema ajeno al saber en estudio. **DI2:** Uno o más integrantes de la clase ingieren alimentos. **DI3:** Uno o más integrantes de la clase realizan una acción impropia dentro del aula. **DI4:** Uno o más integrantes de la clase utilizan el teléfono móvil dentro del aula.

Distractores externos al grupo: Hace referencia a acciones que se generan por individuos externos al grupo de clase. **DE1:** Una persona ajena al curso ingresa al aula. **DE2:** Ingresa la mascota de la escuela. **DE3:** Un alumno de otro curso busca relacionarse con los estudiantes, desde afuera.

Se consideraron como distractores a aquellos elementos u acciones, que pretendían quitar la atención del estudio de la matemática y colocarla en otra cosa. Esto es posible porque en ambas clases los estudiantes tenían una tarea que realizar. Pues mientras en la CLASE 1 tenían que copiar, y tratar de entender lo que el profesor iba explicando; en la CLASE 2 tenían que resolver una tarea matemática con sus compañeros. Así, es posible identificar qué distractores hacían que los estudiantes dejaran de hacer matemáticas, para hacer otra cosa.

También se clasificaron los indicadores de atención de ambas clases según las acciones vinculadas al Estudio de la Matemática (E.M): Los estudiantes continúan realizando la actividad matemática (**E.M1)**; El estudiante retoma la actividad matemática (**E.M2)**; y acciones que No están vinculadas con el Estudio de la Matemática (N.E.M): Conversan sobre un tema que no es matemática (**N.E.M1**); Realiza una acción en la que no está involucrada la actividad matemática (**N.E.M2**); según si los distractores lograban quitar la atención del estudio de la matemática o no.

CONCLUSIONES

Con estos elementos, es posible concluir que la atención de los estudiantes en clase está muy relacionada a la forma en que el profesor enseña. Así, el tipo de clase que parece colaborar más con los indicadores de atención en una clase de matemática del nivel secundario, es la de tipo no tradicional (CLASE 2), en el cual los estudiantes tienen que implicarse en resolver la tarea con sus compañeros. El trabajo muestra que aun cuando en la clase de tipo tradicional, algunos elementos funcionaron como distractores (ej. DI4; DE2); cuando los estudiantes manifestaron un compromiso activo con la tarea, generando hipótesis de cálculo, poniéndolas a prueba y discutiendo; estos distractores no lograron quitar la atención sostenida que los estudiantes tenían enfocada en la tarea.

Los resultados de este trabajo, aunque modestos, brindan elementos que podrían utilizarse para realizar análisis más amplios y/o profundos.

REFERENCIAS

Dehaene S. (2019). *¿Cómo aprendemos? Los cuatro pilares con los que la educación puede potenciar los talentos de nuestro cerebro.* XXI Siglo Veintiuno Editores Argentina S.A.

Figueiredo, A. O., y Perticarrari, A. (2022). El aprendizaje basado en modelos mantiene a los alumnos activos y con atención sostenida. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, *19*(3), 1-20. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=92070576015

Gunesch (2015). Attention of students during mathematics lectures. En F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten y C. Streit (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (pp.331-335). WTM-Verlag.

Hartley, J., y Cameron, A. (1967). Some observations on the efficiency of lecturing. *Educ. Rev*., 20, 30-37.

Johnstone, A. H., y Percival, F. (1976). Attention breaks in lectures. *Educ. Chem*., 13, 49-50.

Leong, Y. C., Radulescu, A., Daniel, R., DeWoskin, V., y Niv, Y. (2017). Dynamic interaction between reinforcement learning and attention in multidimensional environments. *Neuron*, *93*(2), 451-463.

Maddox, H., y Hoole, E. (1975). Performance decrement in the lecture. *Educ. Rev.*, *28*(1), 17-30.

Posner, M. I., y Dehaene, S. (1994). Attentional networks. *Trends in Neuroscience*, *17*(2), 75-79.

Posner, M. I., y Petersen, S.E. (1990). The attention system of the humanbrain. *Annual Review of Neuroscience*, 13, 25-42.

Posner, M. I., y Rothbart, M.K. (1991). Attentional mechanisms and conscious experience. En A.D. Milner y M.D. Rugg (Eds.), *The neuropsychology of consciousness* (pp. 91-112). Academic Press.

Santalla de Banderali, Z., y Cañoto Rodríguez, Y. (2006). El mecanismo atencional. En G. Peña-Torbay, Y. Cañoto-Rodríguez, y Z. Santalla de Banderali (Eds.). *Una introducción a la Psicología* (pp.119-160). Publicaciones UCAB.

Van Zomeren, A. H., y Brouwer, W. H. (1994). *Clinical Neuropsychology of Attention*. Oxford University Press.

ORQUESTACIÓN ARGUMENTATIVA DE LA MODELACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Horacio Solar[1], Andrés Ortiz[2], Victoria Arriagada[1],

[1]Pontificia Universidad Católica de Chile, [2]Universidad Católica de la Santísima Concepción

hsolar@uc.cl, aortiz@ucsc.cl, vparriagada@uc.cl

Si bien existe una amplia literatura de estrategias docentes para promover la modelación en el aula de matemática, estas estrategias no consideran la gestión de la argumentación. Presentamos un estudio que tuvo como propósito caracterizar lo que hemos denominado la orquestación de la argumentación en el ciclo de modelación matemática. Se analizaron 10 episodios de clases de dos profesoras en que convergía una promoción de la argumentación y el desarrollo de modelación de los estudiantes. Se aprecia que la orquestación argumentativa da cuenta de distintos tipos de transversalidad, y está presente con distinta graduación, en las etapas del ciclo de modelación matemática.

Ciclo de modelación matemática, Procesos de modelación, Orquestación argumentativa, Argumentación colectiva, Estudio de casos.

ESTRATEGIAS DOCENTES PARA PROMOVER LA MODELACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

La literatura es amplia en mostrar estrategias del docente para promover los procesos de modelación en el aula de matemáticas, tales como crear una comunidad de aprendizaje colaborativo (Mueller et al., 2014), estrategias docentes para promover los procesos de modelación en los estudiantes (Schukajlow et al., 2015), o bien estrategias metacognitivas (Volhöñter, 2019), mostrando que este tipo de actividad es propia de los procesos de modelación en el aula. En las estrategias docentes descritas no se considera un aspecto que puede ser muy relevante, como es el rol que tiene la discusión entre los estudiantes en los procesos de modelación en el aula de matemáticas. Un marco propicio para incentivar la discusión es la argumentación en el aula de matemáticas, la cual tiene como propósito convencer, tanto a sí mismo como a otros, de la validez de un razonamiento (Krummheuer, 1995). Si bien existe una nutrida literatura sobre modelación, hemos encontrado estudios puntuales que relacionan los procesos de argumentación con el ciclo de modelado matemático, que dan cuenta de cómo los procesos de argumentación favorecen los ciclos de modelación matemática en el aula (Tekin-Dede, 2019). Dada la importancia que puede tener la argumentación para favorecer que los estudiantes transiten por los procesos de modelación, en esta comunicación daremos cuenta de un estudio sobre la orquestación argumentativa en el ciclo de modelación matemática en el aula.

Orquestación argumentativa

La argumentación requiere del apoyo docente, puesto que con determinadas acciones puede potenciar diferentes pasos del proceso argumentativo que desarrollan las y los estudiantes (Yackel, 2002). Estos apoyos pueden darse mediante acciones o preguntas de los docentes (Conner et al., 2014), o bien un apoyo del docente especializado para promover la argumentación como lo es la *orquestación argumentativa* (Solar et al., 2021). Este apoyo docente para la argumentación colectiva propone tres estrategias docentes: en primer lugar, tareas matemáticas abiertas a la discusión, cuyo desarrollo

requiere de distintas estrategias de resolución o que admitan distintas posturas para promover el debate entre las y los estudiantes; en segundo lugar, estrategias comunicativas como el fomento de la participación, la gestión del error y las preguntas deliberadas (Solar y Deulofeu, 2016); finalmente estrategias de reconocimiento del pensamiento del estudiantado, como es la suscitación y reconocimiento, por parte del docente, de patrones de pensamiento de sus estudiantes (Ball et al., 2009).

Estas tres estrategias docentes: tareas abiertas a la discusión, estrategias comunicativas y estrategias para reconocer el pensamiento de los estudiantes, son parte de los recursos que tiene el docente para apoyar la argumentación. Por tanto, estudiaremos de qué manera estas estrategias pueden generar un escenario propicio para desarrollar procesos de modelación en el aula de matemáticas.

METODOLOGÍA

La investigación se enmarca en un proyecto mayor cuyo objetivo ha sido caracterizar los aprendizajes de los estudiantes al promover de manera articulada las competencias de modelación y argumentación en el aula matemática. El estudio que aquí presentamos se desarrolla bajo un enfoque cualitativo, de alcance exploratorio y diseño de estudio de casos múltiples.

Debido a que es poco frecuente presenciar clases donde se pueda observar argumentación en tareas de modelación, se realizó un programa de desarrollo profesional con profesoras de matemática para apoyarlas a promover las competencias de argumentación y modelación en el aula. Este programa se implementó en dos ciudades de Chile (Santiago y Concepción) y participaron 22 profesoras de enseñanza básica (todas mujeres), 13 de la Región Metropolitana y 9 de la Región del Biobío.

Una vez terminado el proceso formativo, se seleccionaron 10 profesoras de ambas regiones como casos de estudio para hacer un seguimiento de sus clases durante el 2019, año en que debieron diseñar una tarea de 3-4 clases para promover la modelación y la argumentación en los estudiantes. Cada una de las 10 docentes implementó de 3-4 clases de 45-70 minutos, las que fueron filmadas con 3 cámaras. Se seleccionó a 5 de las 10 docentes debido a que lograron implementar una secuencia de clases en que se observó el ciclo de modelado matemático y promoción de la argumentación. En esta comunicación, se presentan los resultados de 2 de estos 5 casos, los que fueron escogidos porque los estudiantes logran llegar hasta la última etapa del ciclo de modelado matemático, la validación (Maaß, 2006). Se seleccionaron 10 episodios de los 2 casos estudiados, en que la profesora promoviera la argumentación y que a su vez los estudiantes transitaran por el ciclo de modelación matemática. En estos episodios se analizó la orquestación argumentativa del docente: Estrategias comunicativas-oportunidades de participación, gestión del error y preguntas deliberadas- y Reconocer pensamiento de los estudiantes - Elicitar el pensamiento y reconocer patrones de pensamiento (Solar et al., 2021).

RESULTADOS

Soledad, profesora de 3º básico, implementó una actividad donde los estudiantes debían construir con cubos encajables la maqueta de una pasarela de una autopista, teniendo como apoyo un auto y un bus de juguete. Mientras que Ángeles, profesora d 8º básico, implementó una actividad en que una familia tiene que decidir si ser miembro de un cine con base a los datos de una tabla, en que algunos de los datos se han borrado.

En la Tabla 1 se muestra una síntesis de los apoyos docentes de Soledad (Sol) y Ángeles (Án) presentes en cada una de las etapas del ciclo de modelación matemática (Maaß, 2006). La Tabla 1, permite visualizar dos hallazgos importantes: la orquestación argumentativa está presente en el ciclo de modelado matemático y es transversal al proceso de modelación, aunque con distinta graduación e intensidad en cada una de las etapas. A continuación, se desarrollan estos dos hallazgos.

Tabla 1.

Apoyos docentes presentes en el ciclo de modelado matemático de los casos.

Orquestación argumentativa	Estrategias docentes orquestación argumentativa	Simplificación		Matematización		Trabajo Matemático		Interpretación		Validación	
		Sol.	Án.	Sol.	Án.	Sol.	Án.	Sol.	Án.	Sol.	Án.
Estrategias comunicativas	Oportunidades de participación	5	6				3	2	0	1	2
	Gestión del error	2	2				0	3	0	3	2
	Preguntas deliberadas	5	5				3	2	2	2	2
Reconocimiento Razonamientos estudiantes	Elicitación de ideas de estudiantes	2	3				2	0	1	2	0
	Identificación de patrones de pensamiento	0	0				0	0	1	0	0

Nota. Elaborado por autores

Nota. ■ apoyo docente en 5-6 episodios; ▪ apoyo docente en 2-3 episodios; ▫ acción docente presente en 1 episodio; □ no se observa apoyo docente; ▨ no se codificaron apoyos docentes en una etapa de ciclo de modelado.

Transversalidad de los apoyos docentes en las etapas de modelación

Detectamos tres tipos de transversalidad en los apoyos docentes: total, parcial y puntual. Transversalidad total hace referencia a cuando una estrategia docente de la orquestación argumentativa está presente en todas las etapas de ciclo de modelación matemática que han sido reportadas. Transversalidad parcial hace referencia cuando una estrategia docente está presente en algunas de las etapas del ciclo de modelado matemático. Finalmente, transversalidad puntual se observa cuando una estrategia docente está presente solo en una etapa del ciclo de modelado matemático. En el caso de Soledad, los apoyos docentes de las estrategias comunicativas -oportunidades de participación, gestión del error y preguntas deliberadas- presentan una transversalidad total al manifestarse en todas las etapas de modelación reportadas con episodios. En la estrategia docente reconocer el pensamiento, los apoyos docentes de elicitar el pensamiento presentan una transversalidad total. En cuanto a los apoyos docentes de reconocer patrones de pensamiento, no se reportaron episodios en este caso. En el caso de Ángeles, en las estrategias

comunicativas, los apoyos docentes de oportunidades de participación y preguntas deliberadas presentan una transversalidad total, mientras que gestión del error, presenta una transversalidad parcial al presentarse solo en las etapas de simplificación y validación. En la estrategia docente de reconocer el pensamiento, los apoyos docentes de elicitar el pensamiento presentan una transversalidad parcial ya que, no se observa en la etapa de validación. Reconocer el pensamiento presenta una transversalidad puntual al observarse solo en la etapa de interpretación

Recurrencia de los apoyos docentes en las etapas de modelación

Los apoyos docentes están presentes con distinta recurrencia en las etapas de modelación. La mayor recurrencia de los apoyos docentes, agrupados en 5-6 episodios, se encuentra en ambos casos en la etapa de simplificación, con apoyos docentes fuertemente presentes de oportunidades de participación y preguntas deliberadas. En un nivel menor de recurrencia, se agruparon los apoyos docentes en 2 o 3 episodios, que se encuentran en las etapas de simplificación, interpretación y validación. Además, Ángeles también presenta apoyos en la etapa de trabajo con las matemáticas que no se presentan en Soledad. En estos episodios, se observan oportunidades de participación, gestión del error, preguntas deliberadas, Elicitación del pensamiento y reconocer patrones de pensamiento. Con un menor nivel de recurrencia se clasificaron acciones en un solo episodio, que se encuentran en las etapas de interpretación y validación: En el caso de Soledad en la etapa de validación se observa oportunidades de participación, mientras que en el caso de Ángeles en la etapa de interpretación se encuentran apoyos docentes de elicitar el pensamiento y reconocer patrones de pensamiento. Finalmente, en las etapas de matematizando y trabajando con las matemáticas para Soledad, y matematizando para Ángeles no se encontraron episodios que incluyeron apoyos docentes debido a la falta de intervención de la docente en ese momento. Por tanto, se aprecia que las docentes para favorecer los procesos de modelación en los estudiantes despliegan una variedad de apoyos docentes de orquestación argumentativa, siendo las más presentes las que son parte de las estrategias comunicativas (Solar y Deulofeu, 2016). Mientras que con menor frecuencia se despliegan apoyos docentes que son parte de reconocimiento de patrones de pensamiento -elicitación del pensamiento y reconocer patrones de pensamiento-, esta última acción, se presenta únicamente en el caso de Ángeles.

CONCLUSIONES

En los dos casos estudiados, encontramos que la orquestación argumentativa exhibió diferentes tipos de transversalidad y recurrencia a lo largo del ciclo de modelación matemática, en que las estrategias comunicativas son más transversales y son más recurrentes en comparación a las estrategias de reconocimiento de patrones en el ciclo de modelación matemática. La gran transversalidad de las estrategias comunicativas es coherente con la naturaleza de estas acciones, ya que el profesor las activa desde el inicio de la clase. En cambio, la presencia limitada de las estrategias de reconocimiento del pensamiento de los estudiantes puede explicarse considerando que tiende a ser poco frecuente en la práctica de los docentes y puede ser difícil de incorporar en las tareas de modelado, como lo muestran los dos casos estudiados. Estos resultados deben interpretarse con las limitaciones del estudio: registro de solo dos grupos de estudiantes por docente y que de los hallazgos son de 2 de los 10 docentes que se siguieron. Por tanto, en un próximo estudio se puede analizar en más casos, el tipo de transversalidad y el grado de recurrencia de la orquestación argumentativa en las distintas etapas del ciclo de modelado matemático.

Los resultados de este estudio tienen importantes implicaciones didácticas para los docentes. Los profesores actualmente disponen de recursos y orientaciones para diseñar tareas de modelación para el aula de matemáticas, pero existen muchos menos orientaciones para la gestión de dichas tareas, por tanto, promover una orquestación argumentativa para la gestión de la modelación es un aporte al aula de matemáticas.

REFERENCIAS

Ball, D., Sleep, L., Boerst, T., y Bass, H. (2009). Combining the Development of Practice and the Practice of Development in Teacher Education. *Elementary School Journal*, *109*(5), 458–474.

Conner, A. M., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., y Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 401–429.

Krummheuer. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–269). Hills-dale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM, 38*(2), 113-142.

Mueller, M., Yankelewitz, D., y Maher, C. (2014). Teachers promoting student mathematical reasoning. *Investigations in Mathematics Learning, 7*(2), 1–20.

Solar, H., y Deulofeu, J (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemática. *Bolema*, 30(56), 1092–1112. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13

Solar, H., Ortiz, A., Deulofeu, J., y Ulloa, J. (2021). Teacher support for argumentation and the incorporation of contingencies in mathematics classrooms. I*nternational Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *52*(7), 977-1005. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1733686

Schukajlow, S., Kolter, J., y Blum, W. (2015). Scaffolding mathematical modelling with a solution plan. *ZDM, 47*(7), 1241–1254.

Tekin-Dede, A. (2019). Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. Internation-al *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(2), 292-314. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1501825

Vorhölter, K. (2019). Enhancing metacognitive group strategies for modelling. *ZDM*, *51*(4), 703-716. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01055-7

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(4), 423–440.

NIVELES DE LECTURA DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA

Jonathan Inostroza, Gustavo Sandoval, Javiera San Martin, Anahí Huencho

Universidad Católica de Temuco

jinostroza2018@alu.uct.cl, gsandoval2019@alu.uct.cl, jsanmartin2019@alu.uct.cl, ahuencho@uct.cl

Los gráficos estadísticos son herramientas inmersas en la cotidianidad del ser humano, por ende, comprenderlos es de suma importancia para la toma y fundamentación de decisiones. Por ello, es de nuestro interés determinar el nivel de lectura de gráficos estadísticos en estudiantes de 2° año medio de Temuco. Así, desde un enfoque cualitativo descriptivo, por medio de un cuestionario centrado en la lectura e interpretación de gráficos, se concluye que un 22% de los estudiantes solo alcanza un nivel 1 de lectura, mientras que el 78% restante solo llega a un nivel 2 de lectura.

Educación estadística, Comprensión de gráficos, Niveles de lectura de gráficos.

INTRODUCCIÓN

La estadística se destaca como un actor fundamental en el desarrollo del ser humano, ya que en la actualidad es un precedente auxiliar de diversas áreas científicas y actividades humanas, en donde la comprensión de gráficos estadísticos es necesaria para fomentar una ciudadanía informada y participativa. (Ruiz, 2015). La comprensión de gráficos estadísticos, por lo general, permanecen en un nivel de abstracción relacionado a la comparación de datos con un grado mínimo de postulación de inferencias e hipótesis a partir de ellos (Arteaga et al., 2012; Ben-Zvi, 2022; Mendez y Ortiz, 2012).

Un análisis de los objetivos de aprendizaje en este ámbito, desde la educación básica a la educación media refleja que el proceso de aprehensión de aprendizaje asociado a la construcción, lectura e interpretación de gráficos estadísticos culmina, en cuestión de contenidos y conocimientos, en el nivel de segundo año de enseñanza media. Mientras tanto, para los niveles superiores correspondientes a tercer y cuarto año medio, los objetivos de aprendizaje plantean la toma, argumentación y fundamentación de decisiones asociadas al análisis de gráficos estadísticos, lo que plantea que los estudiantes en segundo año de enseñanza media ya poseen los conocimientos y habilidades fundamentales para desarrollar estas competencias (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2015, 2019).

Por lo que nuestro objetivo de investigación se centra en determinar los niveles de lectura de gráficos estadísticos en estudiantes de segundo año de enseñanza media en Temuco. En la necesidad de esclarecer qué ocurre realmente en este nivel debido a la escasez de investigaciones que traten específicamente el análisis a estudiantes de segundo año de enseñanza media, más aún; en Chile, que a supuestas, el MINEDUC plantea que ya existe dominio del análisis de gráficos estadísticos.

ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA

La enseñanza de la estadística plantea que los estudiantes deben ser capaces de realizar análisis, identificar y obtener inferencias a partir de datos estadísticos, entregándoles las herramientas,

actitudes y habilidades en el marco de formar estudiantes críticos e integrales, para validar sus conocimientos y opiniones de acuerdo a la toma de decisiones (Del Pino y Estrella, 2012; MINEDUC, 2015). Pero, la estadística junto con la probabilidad son las ramas menos enseñadas de la matemática, pues no se emplean las horas ideales para su correcta implementación, dejando su contenido para tratar hasta el final del último semestre (Estrella, 2017; Vázquez, 2021).

Por otro lado, la formación de docentes de matemática no contempla en profundidad la enseñanza de esta área, pues tener conocimientos comunes de la estadística no es suficiente para enseñarlo, lo que conlleva a tener docentes pocos preparados en la materia, lo que recae en el estudiante a quien le resultará complejo comprender, cumplir y lograr lo propuesto por el programa de estudio (Estrella, 2017).

NIVELES DE LECTURA DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS.

En cuanto a la lectura de gráficos estadísticos autores como Bertin (1967), Gerber et al. (1995), Friel et al. (2001), determinaron diferentes niveles de lectura para la interpretación de gráficos, cada uno de estos diseñó diferentes modelos (Camargo y Espinosa, 2021). Por ejemplo, Bertin (1967), planteó tres niveles, que se comprenden en extracción de datos, extracción de tendencias y análisis de estructura de los datos; más tarde Gerber et al. (1995) determinaron siete niveles de comprensión y tres niveles superiores más, estos son, nivel racional/literal, nivel crítico y nivel hipotético; y Friel et al. (2001) quienes determinan que existen cuatro niveles de lectura de gráficos que se comprenden:

- Leer los datos: Corresponde a la lectura literal de la información representada en el gráfico estadístico.
- Leer dentro de los datos: Se refiere a la lectura de algo que no está explícitamente en el gráfico, implicando la aplicación de procedimientos matemáticos (comparaciones, adiciones, etc.).
- Leer más allá de los datos: Se refiere a obtener una información que no está representada en el gráfico y que no se puede deducir con operaciones o comparaciones.
- Leer detrás de los datos: refiere a la valoración crítica de las conclusiones, la recogida y organización de datos.

Estudios realizados por Díaz-Levicoy (2018), centrados en el método de lectura de gráficos de Friel, Curcio y Bright (2001), nos dice que una gran porcentaje de la población de estudio solo alcanza notoriamente el nivel 1 y 2 de lectura de gráficos, y solo una pequeña muestra evidencia resultados significativos respecto los niveles 3 y 4. Resultados similares ocurrieron en estudios con respecto a la lectura de gráficos de textos chilenos de la Educación Primaria (Educación Básica) de Díaz-Levicoy et al. (2015).

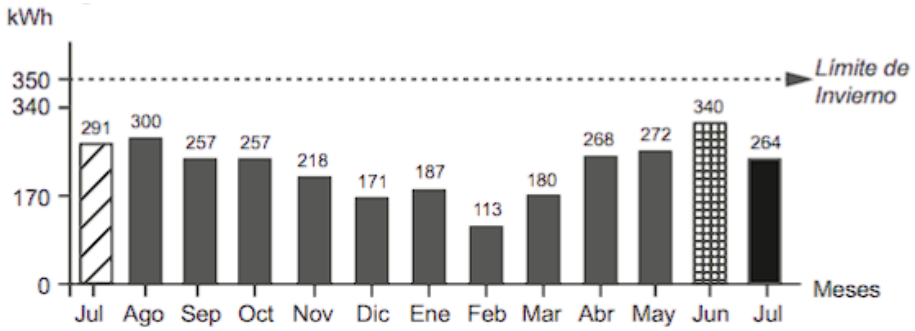
METODOLOGÍA

La presente investigación plantea sus bases mediante un paradigma cualitativo con un enfoque descriptivo, en donde se buscan fenómenos observables por medio de un instrumento (Hernández et al., 2014). El estudio se aplicó a 40 estudiantes de enseñanza media de la ciudad de Temuco, Región de la Araucanía, Chile. Los participantes recibieron una carta de información y un consentimiento que firmaron donde se establece anonimato y confidencialidad.

El instrumento corresponde a un cuestionario de 4 preguntas enfocado en la lectura de un gráfico estadístico que muestra el detalle de consumo eléctrico familiar en los últimos 13 meses.

Figura 1.

Consumo eléctrico familiar.



Nota: CMMEdu (2020). *Gráfico 1: Consumo eléctrico de una familia chilena.*

El presente gráfico muestra el consumo energético en Kwh de una vivienda en el sector urbano de Temuco. La cual considera los últimos 13 meses, es decir, desde Julio 2021 a Julio 2022. Si se sabe que en la vivienda hay 5 personas y que el promedio de Kwh consumido en Temuco es de 170 Kwh/mes, responda las siguientes preguntas:

Las preguntas asociadas a la Figura 1 corresponden a: 1) ¿Cuál fue el consumo durante febrero? 2) ¿Cuál fue la diferencia de consumo entre febrero y junio? 3) ¿Qué se espera que ocurra en el presente mes respecto al consumo? y 4) ¿Por qué se observa una diferencia tan grande en el consumo de los meses de febrero y junio? Es posible notar que cada pregunta representa un escaño superior en los niveles de lectura de Friel et al. (2001). Para el análisis de estos resultados se realizó una codificación de cada respuesta, levantando categorías para clasificar las respuestas de los estudiantes según los niveles de lecturas y sus descripciones. Cada una de las respuestas, fue transcrita y analizada con apoyo del programa ATLAS.ti.

RESULTADOS PRELIMINARES

Los resultados preliminares de la investigación muestran que el 100% de la población de estudio logra una lectura literal de los datos, identificando datos explícitos en el gráfico mediante la resolución correcta de la pregunta 1) con respuestas del tipo “113 Kwh” o “74 menos que enero”. Sin embargo, un 22% no logra niveles de lectura superiores a este nivel, ya que realizan un análisis erróneo en preguntas de nivel 2 al argumentar “291 de diferencia” o “231 kw de diferencia de mes o mes” cuando la respuesta correcta hace referencia a “227 kwh”.

Mientras tanto, para un nivel 2 lectura de gráficos estadísticos asociados a la resolución de la pregunta 2) del cuestionario, un 78% de los estudiantes logra evidenciar una lectura implícita de gráficos estadísticos, comparando datos y extrayendo conclusiones mediante operaciones entre ellos, con respuestas del tipo “La diferencia de consumo fue 227 kwh” no obstante; este mismo 78% de los estudiantes no logra superar este nivel de cognición. Debido a que declaran, para la pregunta número 3) asociada a un nivel 3 de lectura, respecto al consumo del presente mes, “Que se mantenga el

consumo" o "Que aumente un poco más y después aumente el consumo total". Consideraciones erróneas o no justificadas respecto al contexto del problema.

Mientras tanto, para el nivel 4 de lectura, asociado a la pregunta 4) que hace referencia a la diferencia tan grande en el consumo de los meses de febrero y junio, algunas respuestas plantean que: "Porque hace frío porque es invierno y uno está más en casa no hay luz solar y se utiliza energía para iluminar, para utilizar estufas eléctricas, calentar comidas, etc" así como también "Porque en junio se acerca el invierno y tendrán la calefacción o estufas eléctricas".

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este estudio concluye, a similitud de Arteaga et al. (2017), Díaz-Levicoy (2018), Encarnación (2019) e Inzunsa (2015), centrados en una línea de trabajo análoga a la nuestra, que un gran porcentaje de la población de estudio solo alcanza notoriamente el nivel 1 y 2 de lectura de gráficos estadísticos, sin embargo, para nuestra población de estudio estos resultados son más extremos, debido a que los estudiantes no son capaces de generar lecturas por sobre el nivel 2 de gráficos estadísticos.

Mientras tanto, para el análisis de los resultados asociados al nivel de lectura 3 de datos, los estudiantes presentan respuestas del tipo "Se espera que haya menos consumo de energía", "Que se mantenga entre 250kwh y 300kwh", si bien estas afirmaciones pueden ser correctas, la falta de argumentación de sus decisiones resulta crucial para descartarlas del nivel.

Aun cuando existen ciertos vestigios de lectura asociados a leer detrás de los datos, como, por ejemplo, "Porque hace frío porque es invierno y uno está más en casa no hay luz solar y se utiliza energía para iluminar, para utilizar estufas eléctricas, calentar comidas, etc" no presentan una argumentación válida y con los elementos esperados en relación al contexto del problema. La complicación existe dado que en un gráfico estadístico se debe considerar todos los datos que lo engloban, en este caso; el periodo de toma de datos 2021 y 2022, junto a la cantidad de personas que residen en la vivienda.

Las conclusiones anteriores preocupan en gran medida, ya que según la progresión de aprendizaje planteada en MINEDUC (2019), los estudiantes para los niveles superiores; es decir 3° y 4°, deben tomar, fundamentar y argumentar decisiones a partir del análisis de gráficos estadísticos. Mientras tanto, MINEDUC (2015) en su progresión de aprendizaje, plantea que los objetivos de aprendizaje asociados al trabajo con gráficos estadísticos culminan en 1° Medio, es decir, los estudiantes ya deberían tener los conocimientos y habilidades óptimas para la toma de decisiones en 2° Medio, lo cual difiere considerablemente con los resultados obtenidos en esta investigación.

En definitiva, esta investigación presenta un breve diagnóstico para los estudiantes en su futuro tercer y cuarto año de enseñanza media, referente a los procesos relacionados con la toma, argumentación y fundamentación de decisiones informadas que plantea el MINEDUC para estos niveles. En este sentido, una de las preocupaciones en el área tiene relación directa con este individuo que debe tomar decisiones informadas mediante el análisis de datos, así también con las herramientas que se les entregan a los estudiantes para desenvolverse de manera eficiente en la sociedad.

REFERENCIAS

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M., y Cañadas, G. R. (2012). Understanding statistical graphs: a research survey. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa, 28*(3), 261-277.

Arteaga, P., Vigo, J.M., y Batanero, C. (2017). Niveles de lectura de gráficos estadísticos en estudiantes de Formación Profesional. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 129-136). SEIEM

Ben-Zvi, D. (2002). *Seventh grade students' sense making of data and data representations*.Weizmann Institute of Science and University of Haifa Israel.

Bertin, J.(1967). *Semiologie graphique*. Gauthier-Villars.

Del Pino, G., y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo, Revista De Investigación Latinoamericana (PEL), 49*(1), 53–64.

Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P., y Batanero, C. (2015). Gráficos estadísticos y niveles de lectura propuestos en textos chilenos de Educación Primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 229-238). SEIEM.

Díaz-Levicoy, D. (2018). *Comprensión de gráficos estadísticos por alumnos chilenos de educación primaria* [Tesis de Doctorado, Universidad de Granada, España].

Encarnación, E. (2019). *Niveles de lecturas de gráficos estadísticos de estudiantes de primer grado de secundaria* [Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Guerrero, México].

Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En A. Salcedo (Ed.), *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI* (pp. 173–194). Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.

Friel, S., Curcio, F.y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158.

Gerber, R., Boulton-Lewis, G., y Bruce, C. (1995). Children's understanding of graphic representations of quantitative data. *Learning and Instruction, 5*(1), 77–100. https://doi.org/10.1016/0959-4752(95)00001-J

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill.

Inzunsa, S. (2015). Niveles de interpretación que muestran estudiantes sobre gráficas para comunicar información de contextos económicos y sociodemográficos. *Revista mexicana de investigación educativa, 20*(65), 529-555.

Méndez, M., y Ortiz, M. (2012). *Construcción y lectura de gráficos y tablas estadísticas en tesis de la licenciatura de psicología educativa de la Universidad Pedagógica Nacional*. [Tesis de Pregado, Universidad Pedagógica Nacional, México].

Ministerio de Educación [MINEDUC] (2015). *Bases Curriculares de 7° básico a 2° medio*. Autor.

Ministerio de Educación [MINEDUC] (2019). *Bases Curriculares 3° y 4° medio*. Autor.

Ruiz, N. (2015). La enseñanza de la Estadística en la Educación Primaria en América Latina. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 13*(1),103-121.

Vásquez, C. (2021). La Educación Estadística en el aula escolar chilena. *Revista Chilena De Educación Matemática, 13*(4), 116–118.

ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA DE LAS EDUCADORAS DE PÁRVULOS EN CHILE

Ana Mujica-Stach

Universidad de Los Lagos

ana.mujica@ulagos.cl

Este estudio analiza las características esenciales de las categorías Desarrollo del Pensamiento Matemático y Estrategias Didácticas, identificando e interpretando las estrategias didácticas que emplean las educadoras para desarrollar el pensamiento matemático en niños de 2 a 4 años, en Chile. La muestra estuvo conformada por 7 informantes claves. Se utilizó un método cualitativo con un enfoque interpretativo. Las conclusiones resaltan la importancia de diseñar estrategias didácticas que favorezcan el desarrollo del pensamiento matemático en la niñez, el cual se cimienta en la experimentación e interacción de actividades colectivas y lúdicas que van acopladas con un soporte pedagógico.

Pensamiento matemático, Estrategias de didáctica, Educación inicial, Cotidianidad, Educadoras de párvulos.

INTRODUCCIÓN

En el contexto educacional, en las experiencias de aprendizaje, se ve reiteradamente el uso de metodologías de la enseñanza de la matemática centradas en darle al niño una fórmula en la resolución de problemas apegada a estándares de imitación, produciendo en ocasiones restricciones en el uso de nuevas estrategias que promuevan el desarrollo de procesos matemáticos. El planteamiento de la construcción de pensamientos matemáticos está ligado al desarrollo cognoscitivo, por cuanto los niños conocen, aprenden y piensan, lo que permite deducir que se está en presencia de un enfoque interaccionista del aprendizaje. Este se diferencia del conductista cuando plantea que no solo se aprende de experiencias externas, sino que el conocimiento surge de una indisociable interacción entre la experiencia real y la razón.

En efecto, las etapas de desarrollo cognitivo propuestas por Piaget (1979) se ven afectadas por dos situaciones: la primera tiene que ver con la interacción entre el niño y el objeto, donde la interpretación de la realidad es producto de su esquema mental ya estructurado; y la segunda tiene que ver con acciones donde los objetos y situaciones influyen sobre los esquemas del niño, modificándolos.

Por consiguiente, desde la didáctica se consigue la unificación de los nuevos conocimientos con los ya existentes, a través de múltiples situaciones de aprendizaje, tiempo y oportunidades para que los niños experimenten ciertas acciones: comparar, establecer relaciones, transformar, analizar, entender los resultados, el proceso a seguir, ensayar una posible solución, y justificar los resultados. Es inevitable proponer, a las niñas y niños, situaciones didácticas contextualizadas en lo social, como punto de partida para planificar nuevos problemas a plantear.

Cabe resaltar que, para una educadora de párvulos, es relevante desarrollar en los niños procesos simples y lógicos que le permitirán desenvolverse dentro de los diferentes contextos. El más

importante de estos es el educativo, pues es allí donde se sentarán sus bases sociales para un futuro exitoso, la educadora debe situar estrategias acordes a la edad del niño.

METODOLOGÍA

La presente investigación se enmarcó en el paradigma pospositivista con enfoque cualitativo, ya que desde la fenomenología empírica se pretendió comprender las experiencias habituales relacionadas con el Desarrollo del Pensamiento Matemático y Estrategias Didácticas de educadoras de párvulos en las distintas regiones educativas chilenas. La muestra estuvo conformada por 7 educadoras de párvulos de jardines infantiles, seleccionadas por conveniencia, quienes fueron tomadas como representante de algunas regiones de Chile, a quienes se le aplicó una entrevista en profundidad dividida en 2 categorías: Desarrollo del Pensamiento Matemático y Estrategias Didácticas. Se decidió asumir como herramienta tecnológica para el análisis el uso del ATLAS.ti 7, tal procedimiento implicó que emergieran las categorías necesarias para la construcción de una aproximación teórica.

RESULTADOS

A partir de las inquietudes y afirmaciones de las respuestas de las entrevistas, surgieron las sub categorías: acciones concretas, actividades cotidianas y base juegos.

Tal hallazgo lo podemos evidenciar en las respuestas otorgadas por las educadoras en cuanto a: describa las estrategias implementadas para desarrollar el pensamiento lógico-matemático de niñas y niños entre 2 y 4 años de edad:

Sub categorías: acciones concretas

> *P 5: Trabajar con materiales concretos, usando el cuerpo y su entorno material concreto para clasificar, agrupar (5:6). Funciones y uso del número como el conteo, la marginalidad, resolución de problemas -clasificar- relaciones lógicas-patrones- secuencias-rutinas de pensamiento-creatividad a través del uso de elementos- el espacio como elemento transformador- estadística- entre otras (22:22).*

Subcategorías: actividades cotidianas

> *P 1**:** Actividades cotidianas del hogar (pares de calcetines, ordenar por color, contar los puestos de la mesa, ordenar los cubiertos en la mesa (derecha/izquierda), ir a la feria (ver números en carteles, colores, contar elementos) (9:9).*

Sub categorías: juego base

> *P 3: El juego, la exploración y descubrimiento a través de experiencias lúdicas y didácticas por medio de objetos cotidianos y de familiarización de los párvulos (17:17).*

Cabe destacar que, de los resultados obtenidos en el análisis de la información, resalta el fomento del desarrollo del pensamiento matemático en los niños de Educación Parvularia estimula y da prioridad al razonamiento vislumbrado por los procesos cognitivos como comprensión, análisis, comparación, estimación, imaginación espacial, vistos a su vez como el eje esencial para el propio desarrollo de las competencias matemáticas.

CONCLUSIONES

Los hallazgos permitieron develar que, aparte de reconocer la necesidad de utilizar estrategias didácticas en matemáticas como fundamento de su especificidad didáctica, es posible lograr un pensamiento matemático amplio y consolidado hacia el desarrollo continuo.

Además, se identifica la necesidad de utilizar estrategias didácticas en matemáticas, para obtener un pensamiento matemático amplio y afianzado hacia el desarrollo continuo. Cabe destacar que hay autores que expresan que la mayor dificultad en la enseñanza de las matemáticas en la primera infancia, tiene que ver con las estrategias aplicadas por los docentes (Celi et al., 2021).

Por otra parte, se evidencia la importancia de considerar que las actividades cotidianas en los jardines infantiles, se encuentran definidas por una serie de rutinas con los niños se encuentran familiarizados y son propios de su entorno social y cultural.

REFERENCIAS

Celi, S., Sánchez, V., Quilca, M., y Paladines, M. (2021). Estrategias didácticas para el desarrollo del pensamiento lógico matemático en niños de educación inicial. *Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, *5*(19), 826-842.

Piaget, J. (1979). El mecanismo del desarrollo mental. Editora Nacional.

UN MARCO PARA ESTUDIAR LA CAPACIDAD DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN PROFESORES DE PREESCOLAR

Raimundo Olfos[1], Andrea Vergara[2], Soledad Estrella[1], Tatiana Goldrine[2]

[1]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, [2]Universidad Católica del Maule

raimundo.olfos@pucv.cl, avergarag@ucm.cl, soledad.estrella@pucv.cl, tatiana.goldrine@ucm.cl

Se estudia la capacidad de enseñanza de la matemática en futuros profesores de preescolar, que concibe una dimensión teórica (saber) y una dimensión práctica (saber hacer), abarcando desde una perspectiva analítica y dinámica, tanto el conocimiento matemático del contenido (MCK) como el conocimiento pedagógico del contenido matemático (MPCK). Además, se estructura el MPCK en dos componentes, a saber: MPCK para la Enseñanza (MPCK-T) y MPCK referido al pensamiento matemático infantil (MPCK-CMT). A partir de un estudio exploratorio, se identifican aspectos longitudinales críticos en cada una de las componentes.

Capacidad de Enseñanza, Conocimiento docente, Matemática preescolar, Formación de profesores.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo temprano de habilidades matemáticas es importante, puesto que puede ser predictivo respecto del rendimiento matemático escolar posterior (Anders y Rossbach, 2015; Hannula-Sormunen et al., 2015). En este escenario, el rol del profesor de preescolar es fundamental; su capacidad para generar oportunidades de aprendizaje en matemáticas puede hacer la diferencia. A pesar de aquello, la investigación sobre los procesos de formación inicial docente para la enseñanza de la matemática en educación infantil, ha reportado debilidades e inconsistencias (Parks y Wager, 2015). Esto ha llevado a distintas investigaciones a estudiar la efectividad de la preparación inicial docente para el desarrollo de la capacidad de enseñanza de las matemáticas en profesores de preescolar (Cohrssen y Tayler, 2016; Torbeyns et al., 2020).

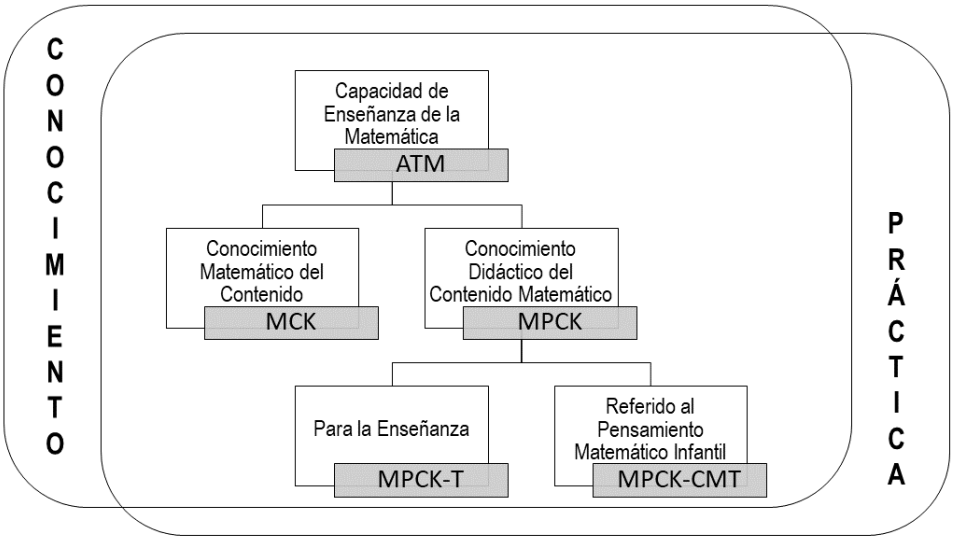
En Chile, el Marco para la Buena Enseñanza de Educación Parvularia establece, entre otras orientaciones, que el profesor de preescolar debe dominar los conocimientos disciplinares y pedagógicos, vinculados al currículum vigente del Ministerio de Educación (MINEDUC, 2019). El currículum vigente para este nivel educativo propone tres ámbitos de experiencias para el aprendizaje: Desarrollo Personal y Social, Comunicación Integral e Interacción y Comprensión del Entorno (MINEDUC, 2018). Este último contempla el núcleo Pensamiento Matemático, que refiere a los diferentes procesos a través de los cuales los párvulos pueden explicar su entorno, tales como, la ubicación en el espacio-tiempo, relaciones de orden, comparación, clasificación, seriación, identificación de patrones, construcción de la noción de número y comprensión del ámbito numérico en general. De esta manera, se establece un núcleo especializado de conocimientos y habilidades a desarrollar en la formación inicial docente del profesor de preescolar en Chile. Esta investigación asume las demandas y características del contexto chileno, para estructurar, con base en la literatura, un modelo que permite estudiar la capacidad de enseñanza de la matemática (ATM, por sus siglas en inglés, *Ability to Teach Mathematics*) del profesor de preescolar en formación, considerando la caracterización de componentes especializadas que conectan transversalmente el conocimiento teórico con el conocimiento práctico.

MARCO TEÓRICO

ATM está conformado por dos componentes principales de conocimiento docente, que se expresan en dos dimensiones: una teórica y otra práctica. Una componente corresponde al conocimiento del contenido matemático (MCK) y la otra, al conocimiento pedagógico del contenido matemático (MPCK), la que a su vez se divide en dos subcomponentes: Conocimiento Pedagógico del Contenido para la Enseñanza (MPCK-T) y Conocimiento Pedagógico del Contenido referido al pensamiento matemático infantil (MPCK-CMT) (Olfos et al., 2022). Estos componentes y dimensiones del ATM relacionan dialécticamente el conocimiento docente (saber) con la práctica docente para la generación de oportunidades de aprendizaje (saber hacer) (ver Figura 1).

Figura 1.

Modelo ATM y relación entre las dimensiones y componentes.



Fuente: Elaboración de autores.

La componente MCK, en la dimensión teórica, considera al menos cuatro subdominios (número y operaciones; medida, cantidad y relación; geometría; datos y azar) y cinco procesos matemáticos (resolución de problemas, modelación, comunicación, representación, razonamiento y estructuración) (Dunekacke et al., 2015). En la dimensión práctica, aborda el conocimiento que le permite al profesor de preescolar promover el desarrollo del razonamiento matemático para resolver problemas y comunicar soluciones. Esto incluye el conocimiento y uso de representaciones y modelos propios de la matemática temprana.

La componente MPCK se relaciona con el conocimiento que le permite al profesor de preescolar "notar situaciones matemáticas en las actividades o juegos cotidianos de los niños; interpretar tales situaciones matemáticas basadas en contenido matemático preescolar; y mejorar el pensamiento matemático profundo de los niños" (Lee, 2017, p. 233-234). En la dimensión teórica, el subcomponente MPCK-T refiere al conocimiento sobre distintos enfoques de enseñanza para las matemáticas tempranas, incluyendo el conocimiento que se requiere para elaborar secuencias de

tareas matemáticas y materiales de instrucción acordes a las edades y experiencias previas de los niños. En esta misma dimensión, el subcomponente MPCK-CMT refiere al conocimiento docente sobre posibles trayectorias de aprendizaje asociadas a las nociones matemáticas que se proponen en el currículum de educación preescolar, incluyendo el conocimiento de potenciales obstáculos o facilitadores que ofrecen estas nociones al aprendizaje de los párvulos. En la dimensión práctica, la MPCK-T se relaciona con el conocimiento que le permite al profesor de preescolar organizar sus procesos de enseñanza, preparar y gestionar experiencias de aprendizaje a través del juego, y seleccionar críticamente los materiales para la manipulación y representación matemática. En esta misma dimensión, la MPCK-CMT aborda el conocimiento docente para mediar frente a las acciones, estrategias, preguntas y posibles dificultades de los párvulos. Este subcomponente también incluye el conocimiento que se manifiesta cuando el profesor de preescolar es capaz de implementar acciones específicas para ayudar a los párvulos a consolidar cierta habilidad o a fomentar el desarrollo del pensamiento matemático significativo en los niños.

METODOLOGÍA

La investigación implementa un estudio exploratorio consistente en una intervención que se lleva a cabo en dos etapas: en la primera etapa 78 futuras docentes de educación preescolar, provenientes de 4 programas universitarios de Educación Parvularia de la V Región de Valparaíso, participan de un módulo teórico de enseñanza que dura 1 semestre; en la segunda etapa, 20 de estas estudiantes participan de un taller práctico, que también dura 1 semestre. Tanto el módulo teórico como el taller práctico fueron estructurados e implementados de acuerdo con el constructo teórico ATM. En la primera etapa se recogen datos respecto del desarrollo del conocimiento teórico de las estudiantes, según las componentes MCK y MPCK, a través de un pre y post test, usando la prueba "Conocimientos y capacidades para promover el desarrollo del pensamiento matemático en el niño" (Goldrine et al., 2015). Asimismo, en la segunda etapa se recogen evidencias sobre los avances/retrocesos del conocimiento práctico en 10 de las participantes del taller, según las componentes MCK y MPCK, a través de una pre y post observación de desempeño en aula, usando la "Pauta para evaluar la dimensión práctica de la capacidad de enseñanza matemática de la educadora en formación" (Olfos et al., 2022). Se utilizan técnicas de análisis exploratorio de datos para mostrar los resultados.

RESULTADOS

Para obtener evidencia de los efectos del módulo teórico en el desarrollo del conocimiento teórico, según las componentes MCK y MPCK, se compararon los resultados del pre y post test, considerando si el desempeño en la prueba aumentó, se mantuvo igual o descendió después del proceso formativo (Tabla 1). En términos globales, el 64% de las participantes manifestaron una mejora en su conocimiento teórico. El subcomponente que manifestó una mayor resistencia a un cambio positivo fue MPCK-T, mientras que el subcomponente con un mayor nivel de progreso fue MPCK-CMT.

Tabla 1.

Porcentaje de participantes según el tipo de diferencia obtenida en la prueba de conocimientos teóricos antes y después del módulo teórico.

	MCK	MPCK-T	MPCK-CMT	GLOBAL

Diferencia positiva (avance)	49%	40%	58%	64%
Sin diferencia	36%	26%	24%	13%
Diferencia negativa (retroceso)	15%	35%	18%	23%

Fuente: Elaboración de autores.

Cada una de las 10 participantes seleccionadas planificó e implementó una experiencia de aprendizaje durante su proceso de práctica profesional. Dicha experiencia fue grabada para su posterior evaluación mediante el uso de la pauta para evaluar la dimensión práctica, por parte de 5 expertos, lo que permitió calibrar la aplicación de los indicadores. Para definir el puntaje final, se consideró el puntaje promedio. Se compararon así los puntajes obtenidos antes y después del taller, considerando si el desempeño en el quehacer práctico aumentó, se mantuvo igual o descendió después del proceso formativo (Tabla 2). Si bien la cantidad de participantes en esta etapa del estudio influye en la variabilidad de los resultados, fue posible identificar una mayor dificultad para el logro de avances en la dimensión práctica. En términos globales, la mayoría de las estudiantes no logró mejorar su desempeño práctico, siendo la componente MCK la que resultó más resistente a cambios positivos. En la dimensión práctica, los subcomponentes MPCK-T y MPCK-CMT presentaron igual cantidad de participantes con avances y retrocesos.

Tabla 2.

Proporción de participantes según el tipo de diferencia obtenida en la pauta de observación práctica antes y después del taller práctico.

	MCK	**MPCK-T**	**MPCK-CMT**	**GLOBAL**
Diferencia positiva (avance)	4/10	5/10	5/10	4/10
Sin diferencia	3/10	0/10	0/10	0/10
Diferencia negativa (retroceso)	3/10	5/10	5/10	6/10

Fuente: Elaboración de autores.

Considerando a las 10 participantes que realizaron tanto el módulo práctico como el taller teórico, se puede analizar la relación entre el conocimiento docente (saber) y la práctica docente para la generación de oportunidades de aprendizaje (saber hacer), a través de una tabla de contingencia (Tabla 3). De acuerdo con lo observado, el riesgo de no lograr avances en la dimensión práctica es 1,5 veces el de no lograr avances en la dimensión teórica, lo que evidencia la complejidad de esta dimensión y su evaluación en los procesos de formación del ATM del profesor de preescolar.

Tabla 3.

Número de participantes según el tipo de desempeño por componentes.

Desempeño	**Teórico**	**Práctico**
Avanza	6	4
No avanza	4	6

Fuente: Elaboración de autores.

DISCUSIONES Y CONCLUSIÓN

Este estudio investiga el MCK y el MPCK de los profesores de preescolar en proceso de formación, conectando una perspectiva cognitiva con una situada, al utilizar tanto una prueba de conocimientos como una pauta de observación en aula. Esta conexión es especialmente sugerida para la evaluación del conocimiento profesional docente (Depaepe et al., 2020). A diferencia de otros estudios, se propone un modelo, en el que los constructos MCK y MPCK atraviesan tanto el desempeño teórico como el desempeño práctico y, además, el componente MPCK se divide en dos ámbitos de especialización. Los resultados evidencian que la dimensión práctica es resistente a cambios positivos, aún con procesos intencionados de intervención. Respecto de las componentes y subcomponentes, se evidenció una mayor propensión a cambios positivos en el MCK teórico, el MPCK-CMT teórico y el MPCK-T práctico. Por otra parte, el MCK, si bien no presenta el mayor porcentaje de avance en la dimensión práctica, es el que presenta el menor porcentaje de retroceso en esta dimensión, lo cual ofrece indicios de la importancia de incorporar el desarrollo explícito del conocimiento matemático especializado en los procesos de formación del profesor de preescolar. Dicho esto, aún se requiere mayor investigación para comprender cómo articular teoría y práctica en el logro de avances significativos y sostenidos en el tiempo, del ATM del profesor de preescolar.

REFERENCIAS

Anders, Y., y Rossbach, H. G. (2015). Preschool teachers' sensitivity to mathematics in children's play: The influence of math-related school experiences, emotional attitudes, and pedagogical beliefs. *Journal of Research in Childhood Education, 29*(3), 305-322.

Cohrssen, C., y Tayler, C. (2016). Early childhood mathematics: A pilot study in preservice teacher education. *Journal of Early Childhood Teacher Education, 37*(1), 25–40.

Depaepe, F., Verschaffel, L., y Star, J. (2020). Expertise in developing students' expertise in mathematics: Bridging teachers' professional knowledge and instructional quality. *ZDM-Mathematics Education, 52*(2), 179–192.

Dunekacke, S., Jenßen, L., y Blömeke, S. (2015). Effects of mathematics content knowledge on pre-school teachers' performance: A video-based assessment of perception and planning abilities in informal learning situations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(2), 267-286.

Goldrine, T., Estrella, S., Olfos, R., y Serrano, P. A. C. (2015). Prueba de conocimientos para la enseñanza del número en futuras maestras de educación infantil. *Educação em Revista, 31*(2), 83–100.

Hannula-Sormunen, M. M., Lehtinen, E., y Räsänen, P. (2015). Preschool children's spontaneous focusing on numerosity, subitizing, and counting skills as predictors of their mathematical performance seven years later at school. *Mathematical Thinking and Learning, 17*(2-3), 155-177.

Lee, J. (2017). Preschool teachers' pedagogical content knowledge in mathematics. *International Journal of Early Childhood, 49*(2), 229–243.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2018). *Bases Curriculares de Educación Parvularia*. Autor.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2019). *Marco para la Buena Enseñanza de Educación Parvularia.* Autor.

Olfos, R., Goldrine, T., Morales, S., Estrella, S., Morales, G., Pinto, A., y Reyes, P. (2022). Pauta para evaluar la dimensión práctica de la capacidad de enseñanza de la matemática en maestras de infantil en formación. *PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 16*(4), 343–364.

Parks, A. N., y Wager, A. A. (2015). What Knowledge is Shaping Teacher Preparation in Early Childhood Mathematics? *Journal of Early Childhood Teacher Education, 36*(2), 124–141.

Torbeyns, J., Verbruggen, S., y Depaepe, F. (2020). Pedagogical content knowledge in preservice preschool teachers and its association with opportunities to learn during teacher training. *ZDM Mathematics Education 52*(2), 269–280.

ANDAMIAJE EN LA ACCIÓN A EDUCADORAS: PENSAMIENTO MATEMÁTICO Y DESARROLLO PERSONAL SOCIAL DEL PÁRVULO

Raimundo Olfos[1], Tatiana Goldrine[1], Soledad Estrella[1], Andrea Vergara[2]

[1]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, [2]Universidad Católica del Maule

raimundo.olfos@pucv.cl, tatiana.goldrine@pucv.cl, soledad.estrella@pucv.cl, andrea.vergara@ucm.cl

Dado que los programas de formación inicial de las Educadoras de Párvulos no logran ahondar en las estrategias para el desarrollo del pensamiento matemático de los párvulos en armonía con su desarrollo social y emocional, se ideó un sistema de andamiaje que opera mientras las educadoras realizan su tarea cotidiana de preparar e implementar experiencias de aprendizaje para los párvulos. Este reporte de investigación muestra las componentes del sistema y los resultados en el desempeño didáctico matemático a partir de un estudio cuasi experimental con 60 educadoras de párvulos en seis comunas de las Regiones de Valparaíso y O'Higgins.

Formación continua, Curso basado en WEB, Educación Parvularia, Didáctica de la Matemática.

INTRODUCCIÓN

La investigación abordó el problema de la débil preparación de las educadoras de párvulos en Chile para promover con idoneidad el desarrollo del pensamiento matemático infantil en armonía con las habilidades socioemocionales, en los niveles NT1 (pre-kínder) y NT2 (kínder). El estudio se implementa teniendo en cuenta la oportunidad de financiamiento que ofrece la incorporación de las Educadoras de Párvulos en servicio a la Carrera Docente el año 2020 y la precisión del significado del desarrollo del pensamiento matemático en las bases curriculares.

La solución es la provisión de un sistema de andamiaje con tecnología para el desarrollo de las capacidades de las educadoras de párvulos que impacta en las oportunidades para desarrollar el pensamiento matemático y habilidades sociales y emocionales en los párvulos, que opera mientras la educadora realiza su trabajo, incrementando la probabilidad de efectividad e impacto en el desarrollo infantil.

La literatura muestra que el Conocimiento del Contenido (CC) y Pedagógico del Contenido (CPC) de la educadora se asocia a la calidad de la enseñanza en matemática. La investigación en formación continua muestra la efectividad del Entrenamiento Basado en la Práctica (EBP) (Snyder et al., 2015) y del andamiaje docente utilizando tecnología (Raes et al., 2012) en contextos de Comunidades de Reflexión sobre la Práctica (CRP), dando oportunidades al escalamiento; p.ej. JumpMath (Mighton, 2004).

Bajo los modelos de "Lesson Study" y "Open Approach", los investigadores de este proyecto habían aportado al desarrollo de la formación inicial de educadoras de párvulo en matemáticas (Isoda y Olfos, 2009; Goldrine et al., 2015; Olfos et al., 2019) evidenciando el potencial de las CRP. La intervención en el programa de Pedagogía en Educación Parvularia de la PUCV, con dos proyectos FONDECYT,

entre el 2012 y 2019, lo que se vio reflejado en la obtención de los mejores resultados en Didáctica en Educación Parvularia a nivel nacional3.

La pregunta de investigación abordada en este reporte plantea si la implementación del Sistema de Andamiaje en el aula para Educadoras de Párvulos favorece a las educadoras el avance en sus conocimientos disciplinarios y didácticos (CC+CPC) para desarrollar el pensamiento matemático en los párvulos en NT1 y NT2. Así se planteó el objetivo de "Desarrollar y validar un Sistema de Andamiaje en el aula que provee conocimientos y experiencias prácticas a Educadoras de Párvulos para que gestionen con efectividad la enseñanza de las matemáticas, favoreciendo en el párvulo el desarrollo del pensamiento matemático".

MÉTODO

La presente investigación considera un diseño experimental con aleatorización, grupo control y evaluaciones pre y post andamiaje. Los sujetos del estudio comprenden 60 educadoras que se desempeñan en escuelas municipalizadas en su mayoría y que atienden párvulos de NT1 y NT2 de las Regiones de Valparaíso y O'Higgins, de familias en las que predomina una mediana y alta vulnerabilidad. Se consideró a las educadoras sin atender a la experiencia previa y se sustituyeron las educadoras que rehusaron participar, dejando constancia de ello. Por localidad - estrato-, se distribuyen aleatoriamente las escuelas en grupos de control y experimental.

Para preparar el andamiaje se generaron 4 comunidades de estudio de clases, compuestas por 2 o 3 investigadores y 2 o 3 educadoras, quienes dedicaron un año a preparar los modelos de experiencias, el material para la plataforma y los prototipos de materiales concretos a distribuir durante el andamiaje experimental para el año dos. El andamiaje operó durante el segundo año de la investigación en la cotidianeidad y ofreciendo a las educadoras del grupo experimental la oportunidad de entrar en una comunidad de pares, con apoyo de un monitor y una plataforma en línea asociada a materiales para proveer experiencias para el aprendizaje.

La implementación completa del andamiaje en el aula operó entre los meses de abril y octubre, y consistió en proveer material para que las educadoras implementaran 36 experiencias de aprendizaje para los párvulos, mientras ellas atienden las exigencias cotidianas de enseñar y favorecer el desarrollo de sus párvulos, por lo que gran parte del esfuerzo por aprender, es parte del que emplea en su trabajo lectivo y de preparación. Las educadoras tuvieron la oportunidad de implementar las 12 unidades temáticas usando los materiales provistos, una unidad cada 2 semanas, llevándolas a apropiarse de la enseñanza bajo el enfoque abierto de resolución de problemas, uno de los objetivos estratégicos del andamiaje. El andamiaje se enfocó en los procesos de planeamiento, implementación y reflexión sobre la práctica y actuó de manera integrada en (a) la interacción de la educadora con la plataforma, acompañada por el monitor, (b) el trabajo semanal entre pares en Comunidades de Reflexión sobre la Práctica, (CRP), y (c) el Entrenamiento en Base a las Prácticas (EBP) que proveyó el monitoreo. El grupo control sólo fue evaluado entre marzo y abril, pretest, y octubre a noviembre, postest. Como forma de compensación ética se le ofreció la posibilidad de tomar el curso de andamiaje al año siguiente.

[3] Informe Resultados Institucionales Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2018. CPEIP (MINEDUC, 2019).

El avance de la educadora en sus conocimientos se mide en su componente teórica a través de la aplicación de una prueba en línea de 12 preguntas y en su componente práctica con la aplicación de una pauta de observación con 23 ítems sobre la capacidad de enseñanza de la matemática durante su práctica en el aula, pre y pos-andamiaje; con instrumentos validados. La investigación cuantifica el efecto del andamiaje en las educadoras, con proyección de una significación sobre 0,4 (de Cohen).

RESULTADOS

Tanto antes como después de la implementación del andamiaje se aplicó los instrumentos de evaluación a las educadoras. La implementación del andamiaje fue disímil, puesto que algunas educadoras tuvieron dificultades en el uso de la tecnología o bien no respondieron a todas las tareas o bien no implementaron todas las experiencias que conforman el andamiaje que tendían a incidir en la mejora de sus conocimientos matemáticos y didácticos.

El contenido de la plataforma considera una secuencias de enseñanza para NT1 y otra para NT2, con 3 experiencias para favorecer la comprensión de las educadoras de las habilidades matemáticas a desarrollar en los párvulos en cada uno de los 12 temas siguientes: 1 espacio-tiempo, 2 relaciones de orden, 3 comparación, 4 clasificación, 5 seriación, 6 patrones, 7 numerales (al 3, 6, 10, 15 y 20), 8 ordinales (al 3 y 5), 9 cantidades, 10 composición (al 3 y 5), 11 medida (al 5 y 10) y 12 agregar (y quitar al 10). La referencia a números indica, por ejemplo, en el caso de los numerales (al 3, 6,10, 15 y 20) que en una sesión se ahondará sólo en los símbolos 1, 2 y 3, y en otra a 4, 5 y 6, según el nivel del párvulo, sus conocimientos previos y evolución en la sesión de diagnóstico, respetando la diversidad.

Las 3 sesiones ofrecieron experiencias para el aprendizaje distintas, conforme a la siguiente estructura: La sesión uno explora, a modo de diagnóstico, los “conocimientos previos”, es decir, los contenidos matemáticos que los párvulos conocen y ponen en juego en la sesión dos, identificando diferencias de conocimiento entre los párvulos al interior de su grupo (curso). La sesión dos fue el núcleo de la secuencia, en ella el párvulo es desafiado en un pasaje lúdico para explorar un nuevo conocimiento, en el contexto de la diversidad del aula. Para ello, la plataforma proveyó un plan sucinto, aunque detallado sobre la experiencia para el aprendizaje, una presentación en power point fue de apoyo para la educadora, materiales y dos cápsulas de videos para su uso por la educadora con sus párvulos directamente en el aula. Algunas actividades dan espacio a variaciones que las enriquecen y acercan a los contextos, a partir de la reflexión en la práctica en colaboración con su comunidad (CRP). La mayor parte de los materiales fueron impresos como imágenes de objetos concretos de uso común, como bloques, lápices y otros específicos que proveyó el proyecto, como palitos, naipes, tarjetas, entre otros. La sesión tres proveyó una experiencia para el aprendizaje que aplicó los contenidos en contextos, juegos, y otros ambientes lúdicos con relevancia socioemocional para el párvulo, favoreciendo el desarrollo del pensamiento matemático en concordancia con criterios de transversalidad que establece el currículo.

El contraste de las evaluaciones pre y pos andamiaje permitió dar evidencias de la efectividad de la implementación del Sistema de Andamiaje en el aula para Educadoras de Párvulos. En efecto, el andamiaje pudo proveer a las educadoras un avance en sus conocimientos en matemática y didáctica, como en las formas de enseñar en el aula para desarrollar en los párvulos el pensamiento matemático

junto a los objetivos transversales en los niveles de transición, NT1 y NT2, conforme a las Bases Curriculares.

CONCLUSIONES

Este Sistema de Andamiaje provee un modelo para el desarrollo docente en la enseñanza de la matemática in situ, por medio de una plataforma WEB, un sistema de monitoreo y una comunidad de prácticas, que actúan como puente entre las educadoras de Párvulos y los propósitos establecidos por las bases curriculares. Este proceso permitió la capacitación profesional desde la realidad en el aula, afectando el conocimiento y las prácticas de las educadoras.

REFERENCIAS

Fox, L., Hemmeter, M. L., y Snyder, P. A. (2008). *Teaching pyramid observation tool* Research edition. Baltimore, MD: Brookes.

Goldrine, T., Estrella, S. Olfos, R., y Cáceres, P. (2015). Prueba de conocimientos para la enseñanza del número en futuras maestras de educación infantil. *Educação em Revista, 31*(2), 83-100.

Hartley, B. (2019). Developmentally appropriate practice: An evolving framework for teaching young children In Kostelnik, M., Soderman, A., Whiren, A., y Rupiper, M. *Developmentally appropriate curriculum: Best Practices in Early Childhood Education*. Pearson.

Isoda, M., y Olfos, R. (2009). *Enseñanza de la multiplicación: Desde el estudio de clases japonés a las propuestas iberoamericanas.* Ediciones Universitarias de Valparaíso, PUCV.

Olfos, R., Goldrine, T., y Morales, S. (2019). Diseño y valoración de una secuencia de sesiones para desarrollar la capacidad de enseñanza sobre la cuantificación en la Formación Inicial de Educadoras de Párvulos. En R. Olfos, E. Ramos y D. Zakaryan (Eds.), *Formación de profesores: Aportes a la práctica docente desde la Didáctica de la Matemática* (pp. 6-45). Graó.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (2018). The International Early Learning and Child Well-being Study. http://www.oecd.org/education/school/theinternational-early-learning-and-child-well-being-study-publications.htm

Raes, A., Schellens, T., De Wever, B., y Vanderhoven, E. (2012). Scaffolding information problem solving in web-based collaborative inquiry learning. *Computers & Education*, *59*(1), 82-94.

Snyder, P. A., Hemmeter, M. L., y Fox, L. (2015). Supporting implementation of evidence-based practices through practice-based coaching. To*pics in Early Childhood Special Education*, *35*(3), 133-143.

EVALUACIÓN NACIONAL DIAGNÓSTICA (END FID) SOBRE CONOCIMIENTOS DIDÁCTICOS DISCIPLINARES DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN CHILE 2017 A 2019

Jorge Gaona, David Miranda

Universidad de Playa Ancha

jorge.gaona@upla.cl, david.miranda@upla.cl

En esta contribución se muestran los resultados de la prueba Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente que rindieron 1691 estudiantes entre el 2017 y 2019. Esta evaluación midió, entre otros tópicos, 5 temas didáctico disciplinares: sistemas numéricos y álgebra, cálculo, estructuras algebraicas, geometría, y datos y azar. Se hizo un análisis de distribución de los resultados cruzando variables temporales: año en que se rindió y territoriales (región donde se formó el futuro profesor). Los resultados muestran que, según esta evaluación, independiente de la variable que se analice, una proporción importante de quienes serán profesores cuentan con conocimientos didácticos disciplinares descendidos.

Formación inicial docente, Políticas públicas, Reformas, Conocimientos pedagógicos y didáctico disciplinarios, Accountability.

INTRODUCCIÓN

Durante la dictadura militar, la Formación Inicial Docente (FID) sufrió una serie de transformaciones que debilitó su institucionalidad y la mercantilizó, lo que produjo, entre otras consecuencias, una reducción de su valoración social (Zurita, 2021). En una panorámica temporal, Ávalos (2014) da cuenta cómo las reformas, en un primer periodo fueron políticas de acompañamiento para fortalecer el atractivo de las FID, luego pasaron por un período de crecimiento desregulado de la oferta durante un proceso de mercantilización de la educación superior, y posteriormente se pasó a políticas de *accountability* o rendición de cuentas, que, mediante medidas de presión y control, el financiamiento se ha condicionado al logro de resultados. Desde el 2016 se encuentra vigente la ley 20.903 Sistema de Desarrollo Profesional Docente que regula la FID y la carrera docente.

Dentro de las medidas de control que se han impuesto para las Universidades que imparten carreras de pedagogía, a partir de la ley 20.903, la Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente (END FID), que primero se denominó prueba INICIA. La ley estableció que los futuros profesores deben rendirla obligatoriamente 12 meses antes que anteceden al último año de la carrera. Hasta el momento no es habilitante, pero los estudiantes deben evaluarse con este mecanismo para poder titularse.

En la formación de profesores de matemática se han realizado algunas investigaciones relacionadas con el Sistema de Desarrollo Profesional Docente. Una investigación que se destaca es el trabajo de Rodríguez-Alveal et al. (2019), una de las pocas investigaciones donde se hace un análisis cuantitativo de los resultados de la END FID en la carrera de Pedagogía en Matemáticas durante el 2017. Los autores concluyen que las universidades del Consejo de Rectores de Universidades Chilenas (CRUCH) tienen un mejor desempeño en los conocimientos didáctico disciplinares que aquellas universidades fuera del este consejo. Por contrapartida, en los conocimientos pedagógicos no ven

diferencias. Además, no hay una correlación entre años de acreditación y resultados, por ejemplo, carreras con dos años tienen mejores resultados que carreras con tres años de acreditación. También existen informes generales de los resultados para quienes rindieron el 2017 y 2018 (CPEIP, 2018, 2019), sin embargo, no se realiza un análisis entre las variables involucradas en las bases de datos.

En la revisión de la literatura se observa, por una parte, un corpus de investigaciones que cuestionan las políticas públicas relativas a la FID con escasos datos empíricos, por otra parte, quienes analizan datos cuantitativamente no hacen un análisis crítico de las políticas públicas, limitándose a comparar entre tipos de instituciones. A partir de la revisión anterior, la pregunta de investigación que queremos responder es la siguiente: ¿cuál es la distribución de los resultados de la END FID durante los años 2017, 2018 y 2019 según distintas variables socio-demográficas? Específicamente, se analizan el año en que se rindió la END FID y la región donde se imparte la carrera. A partir de esto, queremos analizar desde la perspectiva *accountability* los resultados que arroja esta medición.

MARCO TEÓRICO

Rendición de cuentas o *accountability*

Según la UNESCO (2017, p.4) la rendición de cuentas o *accountability* es, idealmente, un proceso que ayuda a las personas o instituciones a cumplir con sus responsabilidades y alcanzar sus objetivos. Para que el proceso sea considerado como tal debe satisfacer las siguientes condiciones: 1) debe tener responsabilidades claramente definidas; 2) debe tener la obligación de dar cuenta y razón de cómo se han cumplido las responsabilidades; 3) debe tener la justificación jurídica, política, social o moral de la obligación de rendir cuentas. Según este mismo organismo, existen diferentes enfoques de rendición de cuentas, entre los cuales está el profesional, el cual se caracteriza por qué colegas observan y examinan a otros en su grupo para cerciorarse de que cumplen con las normas y expectativas comunes.

Dentro de los elementos esenciales para que la rendición de cuentas funcione está la confianza y la co-responsabilidad, tanto de quienes piden la rendición de cuentas como de quienes las tienen que dar.

Estándares didácticos disciplinares

La END FID evalúa, además, cinco temas didácticos disciplinares. Cada tema tiene una cantidad variable de estándares, en total son 18 estándares distribuidos como sigue: Sistemas numéricos y álgebra, tiene 4 estándares; Cálculo, tiene 3 estándares; Geometría, tiene 6 estándares; y Datos y azar, tiene 5 estándares. Al igual que los estándares pedagógicos generales, cada uno se desglosa en diferentes puntos, así, por ejemplo, el estándar 1 sobre Sistemas numéricos y álgebra indica contiene 20 puntos. A modo de ejemplo, en el primero se menciona: Opera con números enteros y racionales y compara números racionales.

METODOLOGÍA

Con el fin de estudiar la distribución de los resultados de las y los futuros profesores en los temas didácticos disciplinares y pedagógicos generales, se utilizó como base de datos la información disponible en el portal https://datosabiertos.mineduc.cl/evaluacion-nacional-diagnostica/. Se

eligieron los años 2017, 2018 y 2019 porque las bases de datos tienen la misma estructura, donde la mayoría de las variables coinciden.

Las 6 bases de datos de los tres años analizados se unieron y normalizaron. Se hizo un análisis de distribución de los resultados de conocimientos pedagógicos y disciplinares diferenciando algunas variables: Modalidad de formación, con los valores Formación Regular y Formación prosecución de estudios; Tipo de universidad, con los valores Universidad estatal y Universidad privada; Género, con los valores Femenino y Masculino. La variable Región donde se formó la o el futuro profesor, con los valores. Para cada una de las variables analizadas se eligieron los sujetos que contenían toda la información, así por ejemplo para la Figura 1 se consideraron 1640 estudiantes (de un total de 1691) porque había algunos que no contenían información en alguna de las variables. Finalmente, en los resultados que se presentan porcentualmente se eligió una frontera simbólica[4] del 60%, que es el porcentaje que muchas universidades eligen como porcentaje mínimo de aprobación en sus asignaturas. Todo el análisis estadístico se hizo con Python 3 y Jupyter 6.4.5.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

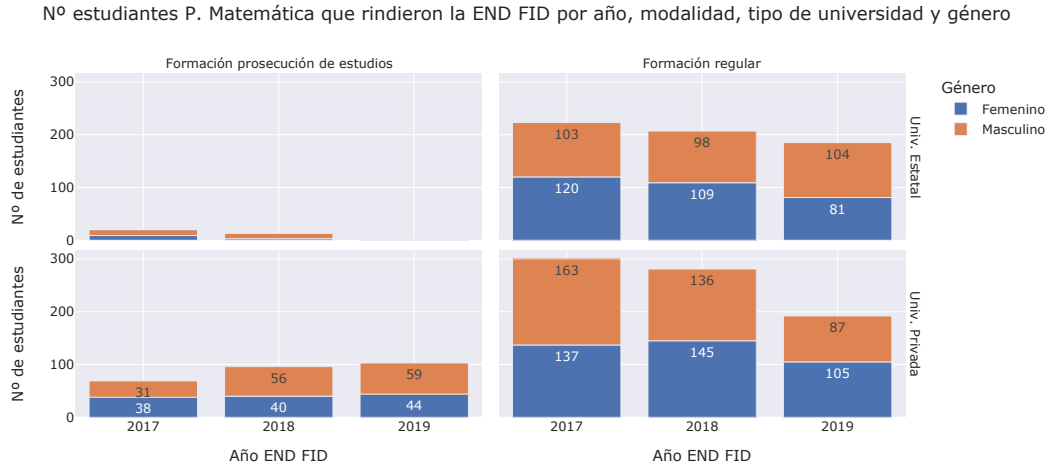
Caracterización de los estudiantes de pedagogía en matemáticas que rindieron la END FID

En la Figura 1 se muestra que, durante los tres años analizados, hay una disminución en la cantidad de estudiantes que rinden la END FID, esto se debe principalmente a una disminución en formación regular, puesto que en la formación en modalidad prosecución se observa un leve aumento. También, se observa que Pedagogía en Matemáticas es una carrera donde la presencia de hombres y mujeres es similar a nivel global (841 hombres de 1640 o 51.3%), aunque hay diferencias entre universidades privadas donde hay mayoritariamente hombres versus en universidades estatales donde hay más mujeres. También se observa que hay una cantidad mayor de estudiantes que se forman en universidades privadas que en universidades estatales y que por lejos, la mayor cantidad de futuros profesores se forman en modalidad regular.

Figura 1.

Disminución en la cantidad de estudiantes que rinden la END FID.

[4] Esta barrera es simbólica porque no está declarado en la prueba cuál es el mínimo de aprobación o incluso si el concepto de aprobación existe en este instrumento, sin embargo, se espera que en algún momento esta prueba sea habilitante por lo que sin duda se fijará una barrera numérica para separar entre aprobados y reprobados.



Fuente: https://sites.google.com/upla.cl/pmatgral1enchileporgeneromodal

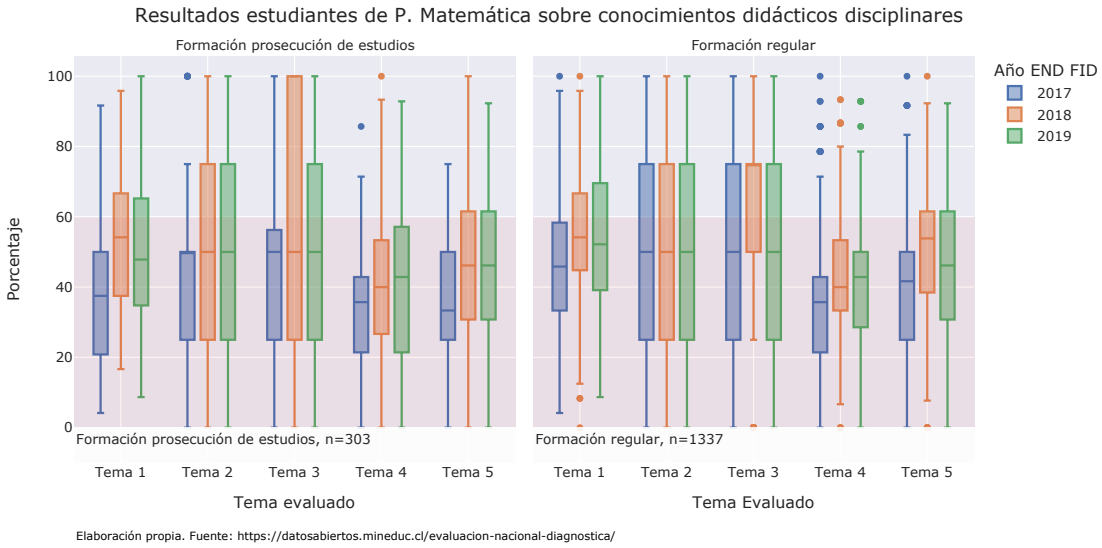
Nota: La información que aparece se clasifica por año (eje horizontal), por modalidad (columnas), por tipo de universidad (filas) y género (color). El número de estudiantes de cada grupo aparece dentro de la barra de cada gráfico.

Resultados según año en que rindieron la END FID

En la Figura 2 se muestran los resultados en los conocimientos didácticos disciplinares por año. Se observa que una estabilidad en los resultados, particularmente que los temas de *Geometría* y *Datos y Azar*, los cuales son los que más descendieron año tras año. Esta estabilidad nos permite trabajar los datos de los tres años como un solo grupo de sujetos para el gráfico de la sección siguiente.

Figura 2.

Resultados sobre los conocimientos didácticos disciplinares por año.



Nota: Resultados de los años 2017, 2018 y 2019. Los temas que se muestran en este gráfico son los siguientes. Tema 1: Sistemas numéricos y álgebra. Tema 2: Cálculo. Tema 3: Estructuras algebraicas. Tema 4: Geometría. Tema 5: Datos y azar.

Además, se observa que en todos los temas más de la mitad de los estudiantes está bajo el 60%, y en los últimos dos ejes en promedio más del 75% de quienes rindieron están bajo el 60%. Por último, podemos observar que hay una dispersión enorme entre el primer y último cuartil, pues mientras el 25% de estudiantes con mejores resultados rondan en promedio entre el 60% y 90%, el 25% con peores resultados rondan entre un 0% y 30%.

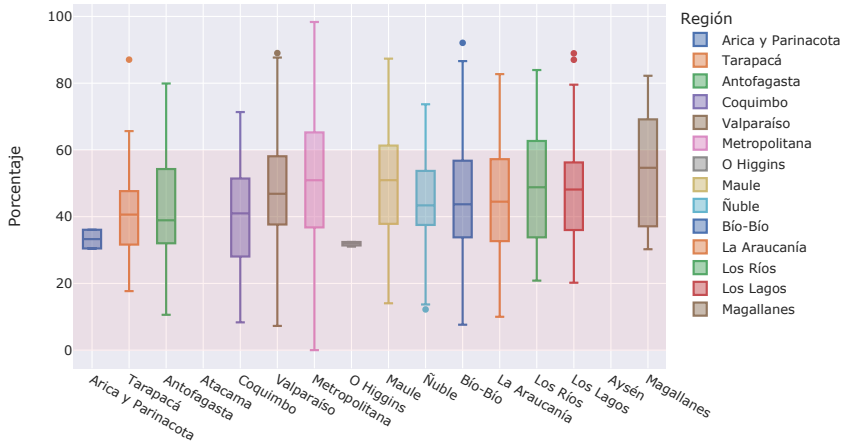
Resultados según región donde se formaron quienes rindieron la END FID

En la Figura 3 se observa que varias regiones cuentan una cantidad exigua de futuros profesores, lo que da cuenta que el modelo actual no da cobertura a las necesidades de profesores que en las distintas regiones del país. También, se puede ver que los resultados son bajos, puesto que, en casi todas las regiones, más del 75% tiene un promedio bajo el 60% en los conocimientos didácticos disciplinares. Este gráfico no tiene por objetivo comparar cuál es la región que está mejor, sino, más bien dar cuenta de que a nivel nacional, los resultados son bajos.

Figura 3.

Porcentaje de futuros profesores por región.

Promedio resultados P. Matemática sobre conocimientos didácticos disciplinares por región



Nota: El promedio se realizó con base en los siguientes temas: Sistemas numéricos y álgebra; Cálculo; Estructuras algebraicas; Geometría; Datos y azar. Las regiones están ordenadas de Norte a Sur. Número de estudiantes por región: Arica y Parinacota, 2; Tarapacá, 24; Antofagasta, 50; Atacama, 0; Coquimbo, 51; Valparaíso, 221; Metropolitana, 682; O Higgins, 3; Maule, 95; Ñuble, 60; Bío-Bío, 254; La Araucanía, 103; Los Ríos, 35; Los Lagos, 104; Aysén, 0; Magallanes, 7.

CONCLUSIÓN

Según los resultados de la evaluación nacional diagnóstica en la formación inicial en pedagogía en matemáticas son bajos, tanto en la prueba de conocimiento pedagógicos generales como en la prueba de conocimientos didáctico disciplinares. Las razones de estos resultados pueden ser variados, por ejemplo, podría ser porque el modelo de formación docente no permite que quienes egresan aprendan lo mínimo o podría ser porque hay problemas con el instrumento que se está aplicando. Por otra parte, en los informes que llegan a las Universidades la información es muy general para poder tomar una decisión informada sobre lo que se debería mejorar. De alguna forma, se construye la idea del profesor endeudado en cuanto a sus conocimientos, es decir, un profesor egresado ya sale teniendo una deuda de lo que debería saber y, por otra parte, las universidades en su conjunto tienen una deuda en la formación que se está entregando. Los modelos de rendición de cuentas se basan en la confianza y en la co-responsabilidad, lo que, al parecer, son elementos en los que se está al deber. Sin embargo, es necesario seguir indagando en otras variables para comprender si este fenómeno de bajos resultados sigue siendo independiente de la variable con la que se analice.

REFERENCIAS

Ávalos, B. (2014). La formación inicial docente en Chile: Tensiones entre políticas de apoyo y control. *Estudios Pedagógicos*, *40*(Especial), 11-28. https://doi.org/10.4067/s0718-07052014000200002

Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas [CPEIP] (2018). *Resultados Nacionales. Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2017*. Autor.

Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas [CPEIP] (2019). *Resultados Nacionales. Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2018*. Autor.

Rodríguez-Alveal, F., Vásquez, C., y Rojas, F. (2019). Formación inicial docente en profesores de matemática: una mirada desde la evaluación nacional diagnóstica. *Estudios Pedagogicos*, *45*(2), 141-153. https://doi.org/10.4067/S0718-07052019000200141

Organización de las Naciones Unidas para la Cultura, las Ciencias y la Educación [UNESCO] (2017). *Rendir cuentas en el ámbito de la educación: cumplir nuestro compromisos*. Organiación de las Naciones Unidas (ONU).

Zurita, F. (2021). Políticas educacionales y dictadura cívico-militar en Chile (1973-1990): El proceso de trasformación neoliberal y autoritario de los espacios formativos y de trabajo del profesorado. *Archivos Analíticos de Políticas Educativas*, *29*. https://doi.org/10.14507/epaa.29.4593

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE DOS PROFESORES DE MATEMÁTICA DE ENSEÑANZA MEDIA SOBRE TÉCNICAS DE CONTEO

Ignacio Casívar, Roberto Muñoz

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

ignaciocasivarj@gmail.com, munozsepulvedaroberto@gmail.com

Debido a las dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas de técnicas de conteo, contenido que se trabaja en segundo año medio, resulta natural preguntarse cuál es el conocimiento de los profesores para abordar este contenido. Mediante un cuestionario de seis ítems asociados a las técnicas de conteo y una entrevista semiestructurada, nos adentramos en el conocimiento especializado de dos profesores de matemática con 15 años de experiencia en el aula y, a través del modelo MTSK, evidenciamos diferencias y similitudes entre sus conocimientos sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de dichas técnicas de conteo.

Técnicas de conteo, Resolución de problemas, MTSK, Profesores de enseñanza media.

PROBLEMÁTICA

De acuerdo con la literatura especializada, los estudiantes presentan dificultades al resolver problemas asociados a las técnicas de conteo, puesto que estas se desarrollan desde una perspectiva meramente algorítmica, más que centrada en la comprensión y/o profundidad del objeto matemático (p.ej. Roa et al., 1997).

Por tal razón, consideramos que el rol del docente a la hora de enseñar los contenidos asociados a las técnicas de conteo juega un papel importante, pues la enseñanza del contenido tiene incidencia en el aprendizaje de los estudiantes.

Investigaciones de otros países, como la de Zapata, et al. (2010) en Colombia, señalan que los profesores tienen dificultades para enseñar combinatoria de manera comprensiva y duradera. En España, según Espinoza y Roa (2014), el análisis combinatorio es un tema difícil para los profesores que lo enseñan y no tiene mucha conexión con otros temas del currículo, además, algunos docentes basan el aprendizaje del contenido en fórmulas y ejercicios estereotipados. En la misma línea, Navarro-Pelayo et al. (1996) mencionan que los profesores también lo consideran un contenido difícil, por lo cual, algunos prefieren omitir su enseñanza. Por otro lado, en Chile, Nettle et al. (2014) dan cuenta de problemáticas de enseñanza-aprendizaje en las estrategias de conteo relacionadas con la coordinación entre el conteo y la cardinalidad. Por último, Inzunza y Guzmán (2011) afirman que el razonamiento combinatorio en los profesores resulta débil, lo cual es problemático, pues tiene gran relevancia en la comprensión de la probabilidad y su razonamiento.

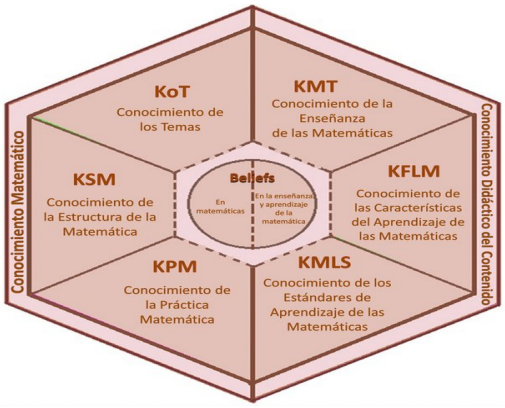
Considerando lo anteriormente expuesto, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: *¿Cuál es el conocimiento especializado de dos profesores de matemática de enseñanza media relacionado a la resolución de problemas de técnicas de conteo?*

MARCO TEÓRICO

La investigación se realiza en base al marco teórico MTSK, el cual permite comprender el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemática, incluyendo el dominio de las creencias y concepciones, como elementos que permean y definen la organización y el uso del conocimiento (Muñoz et al, 2015).

Figura 1.

Dominios y subdominios del MTSK.



Fuente: Tomado de Muñoz et al. (2015).

METODOLOGÍA

Nuestra investigación se basa en una metodología cualitativa y considera un paradigma interpretativo, puesto que se busca describir el conocimiento especializado del profesor de matemática sobre la resolución de problemas de técnicas de conteo. El diseño de la investigación corresponde a un estudio de casos, donde los casos son dos profesores de matemática de enseñanza media que se desempeñan en dos establecimientos subvencionados. Ambos fueron seleccionados debido a que tienen más de quince años de experiencia en aula y han enseñado el tema de técnicas de conteo previamente.

Para la recolección de datos se ha utilizado un cuestionario de razonamiento combinatorio, el cual ha sido validado y empleado por Navarro-Pelayo et al. (1996) y se compone de seis preguntas abiertas de técnicas de conteo. Los ítems del cuestionario están enfocados en comprender el conocimiento matemático del profesor respecto a las técnicas de conteo. Además, se utilizó una entrevista semiestructurada con la finalidad de profundizar tanto en el conocimiento matemático como didáctico del contenido. Los datos se analizaron considerando los subdominios del MTSK.

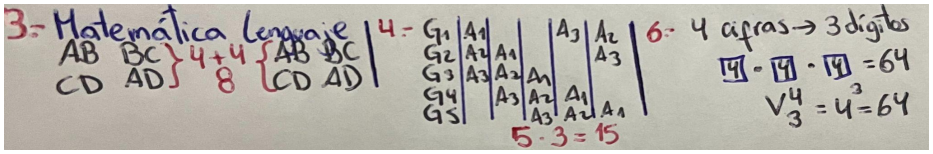
RESULTADOS

Resultados del cuestionario (MTSK profesor 1)

En las respuestas al cuestionario del **profesor 1**, se evidencia conocimiento sobre los registros de representación del contenido matemático **(KoT)**, puesto que, en la resolución de cada problema, presenta esquemas, casillas o fórmulas, tal como se evidencia en la Figura 2.

Figura 2.

Parte de la resolución del cuestionario profesor 1.



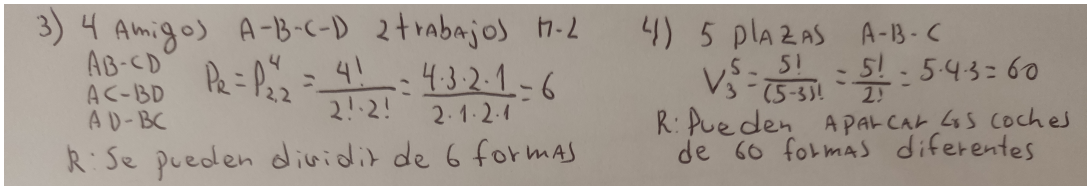
Sin embargo, no se logra apreciar conocimiento de los procedimientos asociados a las diferentes técnicas de conteo **(KoT)** ni tampoco conocimiento sobre las propiedades atribuibles a las técnicas de conteo **(KoT)**, pues en cuatro de los seis problemas del cuestionario no logra determinar a qué tipo de técnica de conteo refiere cada enunciado y procede de manera incorrecta.

Resultados del cuestionario (MTSK profesor 2)

Por otro lado, en cuanto al **profesor 2**, se evidencia el conocimiento sobre las propiedades y fundamentos **(KoT)**, discriminando en cada problema, de acuerdo con las características de este, cuándo se puede utilizar la técnica de conteo para resolverlo. En la misma línea, se evidencia el conocimiento de los procedimientos **(KoT)**, pues logra identificar la técnica de conteo asociada a cada problema y utiliza correctamente las fórmulas para resolverlos, como se muestra en la Figura 3.

Figura 3.

Parte de la resolución del cuestionario profesor 2.



Por último, se puede observar en todas sus respuestas la evidencia del conocimiento de la práctica de la resolución de problemas **(KPM)**, describiendo como heurística general en sus respuestas: la selección de los datos del problema, la discriminación del procedimiento que responde al problema, la ejecución de la estrategia y la entrega de la solución de acuerdo con el contexto.

Resultados de la entrevista del profesor 1 (MTSK)

Respecto a las técnicas de conteo menciona: *"Permutación: Todos los elementos del total, Combinatoria: Ocupó algunos elementos sin importar el orden, Variación: Algunos elementos del total, pero sí importa el orden"*. Lo que se relaciona con **KoT**, pues tiene conocimiento sobre las características de cada técnica de conteo. Además, cuando se le pregunta sobre algún ejemplo cotidiano, dice: *"Si tengo 6 sillas y 6 niños, de cuántas formas puedo sentar a los 6 niños en las 6 sillas, considerando uno por silla"*. También se asocia a **KoT**, pues conoce sobre la fenomenología del contenido, situaciones cotidianas donde es aplicable determinada técnica de conteo.

Luego, se le pregunta cómo presenta el contenido en la etapa escolar y menciona: *"Con ejemplos concretos, partiendo con la permutación, todo con números más pequeños y con ejemplos cercanos. Esto con la finalidad de hacer los ejercicios ahí mismo en la sala"*. Lo que da cuenta de **KMT**, pues conoce sobre estrategias de enseñanza a la hora de presentar las técnicas de conteo en el aula. También, afirma que: *"Uso las fórmulas o las casillas cuando se quieren formar palabras con una*

cierta cantidad de letras o números con una cierta cantidad de dígitos", lo que se puede asociar a **KoT**, pues conoce diferentes estrategias de resolución para un mismo tipo de problema matemático.

Posteriormente, a la pregunta si considera que son evidentes las diferencias entre las técnicas de conteo para los estudiantes, responde que: *"Se les dificulta identificar cuándo es combinatoria y cuándo es variación, porque permutar se asocia a utilizar todos los elementos y eso, generalmente, viene detallado en las preguntas. En cambio, en la combinatoria y variación se usan algunos elementos y cuesta visualizar sí importa o no el orden"*, lo que da cuenta de **KFLM**, pues tiene conocimiento sobre las dificultades asociadas al aprendizaje de las técnicas de conteo.

Finalmente, cuando se le pregunta si considera que el currículum hace una progresión de contenidos correcta hasta el momento donde se presentan las técnicas de conteo, dice: *"¿Eso está en primero medio? ¿O en cuál está ahora? Mmm..., se trabaja con fracciones, potencias, factorial... no recuerdo haber visto factorial antes de trabajar con combinatoria. Siento que le falta algo previo, quizás comenzar a hacer juegos de combinaciones sin fórmula. Experimentos más sencillos y lúdicos, que puedan realizar los estudiantes en la clase con material concreto"*. Lo que se asocia a **KMLS**, porque menciona conocimientos previos asociados al concepto. Sin embargo, alude a la falta de desarrollo conceptual del concepto de combinatoria, pues afirma que no se trabaja el razonamiento combinatorio en niveles anteriores, lo cual es impreciso, ya que en 8° básico se trabaja principio multiplicativo.

Resultados de la entrevista profesor 2 (MTSK)

Respecto a las técnicas de conteo menciona: *"Permutación, variación, combinación, son técnicas de conteo…La permutación es la más fácil de ver, no hay que elegir grupos, para las otras dos me hago la pregunta, si me importa o no me importa el orden; sí importa, es variación, si no importa, es combinación"*. Se evidencia **KoT**, pues tiene conocimiento sobre las características de las técnicas de conteo, señalando las diferencias entre una variación y una combinación.

En cuanto a cómo presenta el contenido en la etapa escolar, dice: *"recuerdo contenidos desde 8° básico, desde el diagrama de árbol, y después directo a técnicas de conteo, la permutación es más fácil para los estudiantes verla en el diagrama de árbol, variación y combinación les causa dificultad, por lo cual solo utilizamos la fórmula"*. Considerando lo anterior, se evidencia **KMLS**, ya que hace alusión a la secuenciación de las técnicas de conteo, considerando 8° básico como un curso que contempla contenidos necesarios para abordar dichas técnicas. Además, se observa **KFLM**, pues menciona características del contenido matemático que generan dificultades en los estudiantes.

Posteriormente, a la pregunta si considera que son evidentes las diferencias entre las técnicas de conteo para los estudiantes, responde: *"Para ello utilizo un ejemplo tipo, que sea representativo, …, mostrando las diferencias, mostrando el orden, en una carrera se premia el podio, o elegir una directiva de un curso con presidente, secretario, tesorero, es lo más típico que trabajo en clases, para que el estudiante evidencie que hay un orden y es importante, y ver otros ejercicios que no importa"*. En base a esto, se evidencia **KMT**, ya que utiliza ejercicios representativos, explicitando las diferencias entre las dos técnicas de conteo, señalando la importancia del orden para identificarlas.

CONCLUSIONES

En cuanto al conocimiento matemático **(MK)** de los docentes, existen diferencias significativas en este, puesto que, si bien, en la entrevista los dos evidencian conocimiento sobre el contenido

matemático, en la resolución de los ítems del cuestionario se observan diferencias en sus conocimientos asociados a los procedimientos matemáticos y las propiedades fundamentales de las técnicas de conteo.

Por una parte, el **profesor 2** identifica cada una de las técnicas de conteo asociadas a los problemas planteados y utiliza correctamente las fórmulas en cada caso, a diferencia del **profesor 1** que, pese a la construcción de diferentes esquemas en su resolución, identifica la técnica de conteo asociada a sólo dos de los seis problemas planteados, respondiendo de manera incorrecta en la mayoría de los casos. Además, en cuanto al **profesor 2**, se logra observar conocimiento sobre la práctica matemática, específicamente la categoría asociada a la resolución de problemas, lo cual no se aprecia en el **profesor 1**.

Pese a las diferencias en el dominio MK, a través de la entrevista pudimos observar que ambos docentes muestran un conocimiento similar sobre la Didáctica del Contenido **(PCK)**, lo que, quizás, se relaciona con sus más de 15 años de experiencia en aula. Respecto al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, el **profesor 1** utiliza ejemplos concretos y, el **profesor 2**, utiliza ejercicios estereotipados para evidenciar las características de cada técnica de conteo. Con respecto al conocimiento de las características de aprendizaje, ambos dan cuenta de las dificultades que tienen los estudiantes al discriminar sí importa o no el orden en un problema de conteo. Sin embargo, en cuanto al conocimiento de los estándares de aprendizaje, sólo el **profesor 2** reconoce a 8° básico como un curso inicial a la hora de abordar técnicas de conteo.

Ahora bien, considerando la problemática inicial y la diferencia entre los conocimientos matemáticos de ambos profesores, nos surge la interrogante: ¿De qué manera está influyendo dicho conocimiento en el aprendizaje de sus estudiantes? Es por lo que, en una futura investigación, nos gustaría ahondar en el conocimiento que tienen los estudiantes de cada profesor sobre técnicas de conteo, observar situaciones de aula y realizar un cuestionario a ambos grupos, esto con la finalidad de responder a dicha interrogante y establecer una relación entre ambas investigaciones.

REFERENCIAS

Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D., y Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 21*(3), 301–324. https://doi.org/10.12802/relime.18.2133

Espinoza, J., y Roa, R. (2014). La combinatoria en libros de texto de matemática de educación secundaria en España. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 277-286). Salamanca: SEIEM.

Inzunza, S. y Guzmán, M. (2011). Comprensión que muestran profesores de secundaria acerca de los conceptos de probabilidad: un estudio exploratorio. *Educación Matemática, 23*(1), 63-95.

Muñoz, M., Contreras, L., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M., y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 18*(3), 1801-1817.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C., y Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación matemática*, *8*(1), 26-39.

Nettle, A., Maturana, I., y Parraguez, M. (2014). Generalización como estrategia cognitiva para el aprendizaje en técnicas de conteo. *RECHIEM. Revista Chilena de Educación Matemática*, *8*(1), 19-26.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J., y Jesús, M. (1997). Estrategias en la Resolución de Problemas Combinatorios por Estudiantes con Preparación Matemática Avanzada. *Epsilon, 36,* 433-446.

Zapata, L., Quintero, S., y Morales, S. (2010). Combinatoria en acción. *11 Encuentro Nacional de Matemática Educativa.* ASOCOLME.

¿SABEN LOS PROFESORES DE MATEMÁTICA QUE LA ESTIMACIÓN DE LA CANTIDAD DE CONTAGIADOS POR COVID-19 SE REALIZA MEDIANTE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL? RESULTADOS DE UNA ENCUESTA

Patricia Sureda Figueroa, Juan Podavini

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

psureda@exa.unicen.edu.ar, podavini.juan.b@gmail.com

En este reporte de investigación se analiza las respuestas de 184 profesores de matemática en ejercicio, que enseñan en el nivel secundario argentino, a un cuestionario sobre la Función Exponencial (FE), su enseñanza y su vinculación con la estimación de los casos de COVID-19. El cuestionario retoma los Invariantes Operatorios (IO) identificados previamente en las respuestas de seis profesores. Los resultados del cuestionario muestran que 174 profesores identifican la FE como la que tiene la variable en el exponente, y que solo 107, establecen una relación entre la FE y los infectados de COVID-19.

Función exponencial, Enseñanza, Teoría de los campos conceptuales, COVID-19, Profesores.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las variaciones exponenciales en la escuela secundaria cobra cada día más importancia debido a que permiten comprender cómo aumenta la cantidad de contagios por COVID-19 si no se toman medidas, la forma en que aumentan los intereses de una tarjeta de crédito cuando se paga el mínimo etc. En este tipo de variaciones, es de muy difícil la conceptualización debido a que se suelen resolver mediante el uso de esquemas lineales (Sureda y Otero, 2013; Villarreal et al., 2005; Weber, 2002). Sumado a esto, su conceptualización es difícil y requiere necesariamente de la escolarización (Sureda y Otero, 2013; 2022).

En correspondencia con lo anterior, el rol del docente juega un papel muy importante en la enseñanza de este tipo de variaciones y su vinculación con el uso en la vida cotidiana. En un trabajo anterior (Podavini y Sureda, 2021) realizamos una entrevista semiestructurada a seis profesores que enseñan la función exponencial en la escuela secundaria. Al ser consultados sobre por qué la enseñan, cinco de ellos respondieron que la enseñan porque está en el diseño curricular. Luego, al ser consultados si sabían cómo se calculaba la cantidad de contagiados por COVID-19, solo la mitad de los profesores entrevistados respondieron que el aumento de la cantidad de contagios por COVID-19 se explicaba mediante variaciones exponenciales (Podavini y Sureda, 2021), aun cuando esto es algo que se decía masivamente en los medios de comunicación. El problema es que si los profesores no entienden que la precipitación en la cantidad de contagiados por COVID-19 se debía a que hay un momento en la variación exponencial que esta comienza a crecer muy rápidamente, difícilmente lo puedan llegar a conceptualizar sus estudiantes.

En este trabajo, se trata de analizar mediante un cuestionario construido en base a la entrevista, si los profesores de matemática en ejercicio vinculan a la función exponencial con situaciones relacionadas con la vida cotidiana, en este caso en particular, si ellos saben cómo se estiman la cantidad de contagios por COVID-19.

LA TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES (TCC)

La TCC (Vergnaud, 1990; 2013) propone el esquema como la organización invariante de la conducta del sujeto frente a una clase de situaciones. El esquema está compuesto por: a) Una meta (o varias) submetas y anticipaciones; b) Reglas de acción, de captación y control de la información; c) Los invariantes operatorios (conceptos en actos y teoremas en acto); d) Las posibles inferencias. Los conceptos en acto son categorías pertinentes como variable, función, número real, etc.; y los teoremas en acto son proposiciones tomadas como verdaderas. Los conceptos y teoremas se construyen en forma solidaria, pues no hay conceptos sin teoremas que se refieran a ellos, ni teoremas en acto que se puedan construir sin conceptos. Los invariantes operatorios, pueden ser correctos o no, lo importante es que sean funcionales. En síntesis, las acciones de los profesores de matemática en el aula constituyen un conjunto de prácticas – frecuentemente espontáneas – que pueden ser entendidas en términos de esquemas acerca de la construcción del saber matemático, del aprendizaje de los alumnos y de la tarea de profesor. Debido a que los esquemas dirigen la acción del profesor, es posible relacionar la actividad didáctica del profesor con ellos, y en particular los invariantes operatorios que son quienes dirigen el esquema.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Se realizó un cuestionario mediante un formulario de google forms, que contestaron ciento ochenta y cuatro profesores de matemática. Se elige la estadística descriptiva debido a que se quiere *describir* la frecuencia relativa de las respuestas de cada ítem del cuestionario. Las respuestas a las preguntas realizadas se dividieron entre preguntas de respuesta libre, y cerradas. Las respuestas de elección se diseñaron a partir de los invariantes operatorios identificados en las respuestas que dieron a las mismas preguntas los seis profesores de matemática entrevistados (Podavini y Sureda, 2021; 2022; Sureda y Podavini, 2022).

En este trabajo se presentan los resultados del cuestionario a: a) las preguntas demográficas, b) las preguntas centradas en la función exponencial. El significado, sus características, su enseñanza y su utilidad. Algunas de las preguntas sobre este aspecto fueron: ¿Qué es la Función Exponencial? ¿Qué características considera más importante? ¿Sabe cómo aumentan los casos de COVID19? Las respuestas se descargaron en un formulario de Excel y se analizaron cuantitativamente.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

La edad más frecuente de los profesores que respondieron el cuestionario era entre 36 y 49 años, mientras que entre 50 y 65 años solo hay 26 respuestas. Por otra parte, la antigüedad docente más frecuente fue de entre 11 y 20 años (ver tablas 1 y 2).

Tabla 1.

Edad de los profesores que respondieron el cuestionario.

Edad	Frecuencia	Frecuencia Relativa
20-35 años	72	0,39
36-49 años	86	0,47
50-65 años	26	0,14

Tabla 2.

Antigüedad docente de los profesores que respondieron el cuestionario.

Antigüedad Docente	Frecuencia	Frecuencia Relativa
0-5 años	53	0,29
6-10 años	50	0,27
11-20 años	63	0,34
21-30 años	11	0,06
Más de 30 años	7	0,04

De ellos, 153 enseñan la función exponencial en la escuela y 31 no. Los que no la enseñan es porque no es parte del diseño curricular del año escolar secundario en el que ellos dan clases.

Respecto a la pregunta ¿Qué es la función exponencial? Se obtuvieron 184 respuestas al cuestionario. Los profesores podían elegir entre uno o más significados. A partir de las respuestas que los profesores seleccionaron, es posible inferir que ellos cuentan con los siguientes Invariantes Operatorios (IO) relativos al significado de la función exponencial.

IO1: *Es la función, en la cual la variable está ubicada en el exponente* (174/184 profesores).

IO2: *Es una curva, no recta, que únicamente crece o únicamente decrece* (87/184 profesores).

IO3: *Es una función cuyo aumento precipitado/ Explosión numérica/ Crecimiento rápido* (63/184 profesores).

La pregunta con mayores respuestas, son estos tres. Tal como se puede advertir, la mayoría de los profesores vinculan la función exponencial con su fórmula, mientras que en un poco más de la mitad se advierten IO vinculados a la forma gráfica de la función exponencial. Finalmente, sólo en 63 profesores es posible identificar IO vinculados a la forma en que la función aumenta numéricamente. Este último IO es fundamental para comprender cómo aumentaba la cantidad de contagiados por COVID-19.

Respecto a la pregunta ¿Por qué se enseña la función exponencial en la escuela secundaria? Los profesores podían elegir más de una opción. A partir de sus elecciones se infieren los siguientes Invariantes Operatorios:

IO4: *Porque está en el diseño curricular* (102/184 profesores).

IO5: *Porque es un saber valioso para otras disciplinas* (125/184 profesores).

IO6: *Es un saber valioso para la vida (*111/184 profesores).

En relación a esta pregunta, podemos ver qué 102 de los 184 profesores que respondieron el cuestionario coinciden en que enseñan la función exponencial porque está prescripto en el diseño curricular, mientras que en la mayoría de ellos es posible advertir IO vinculados a la importancia de la función exponencial tanto para resolver problemas de la vida, como de otras disciplinas.

Finalmente, a la pregunta sobre la estimación de los contagiados por COVID-19 se obtuvieron los siguientes resultados:

IO7: *Los casos de COVID-19 se pueden estimar mediante una función exponencial* (107/184 profesores).

No sabe (77/184 profesores).

La elección de los profesores nos permite inferir que un poco más de la mitad de los profesores que respondieron el cuestionario están en posesión de algún invariante operatorio que vincula a la forma en que aumenta la cantidad de contagiados por COVID-19 con la función exponencial. Sin embargo, lo que alarma es que un poco menos de la mitad de los profesores que enseñan esta función en la escuela secundaria no tenían idea de que los contagios por COVID-19 se modelizaban mediante un modelo exponencial. Estos resultados se corresponden con los obtenidos en las entrevistas a los seis profesores, en el que solo la mitad pudo establecer algún tipo de relación exponencial (Podavini y Sureda, 2021).

CONCLUSIONES

Respecto a la pregunta ¿Qué es la función exponencial? el hecho de que 174 y 87 profesores eligieran la opción de la fórmula y su forma gráfica, respectivamente; en contraposición con los 63 que escogieron la forma en que ésta aumenta, muestra que esta última característica es necesaria para comprender como aumenta la deuda de una tarjeta de crédito o los casos de COVID-19.

Respecto a por qué la enseñan, es posible identificar, en la mayoría de las respuestas, invariantes operatorios vinculados a la importancia de su utilidad. Sin embargo, los resultados muestran que casi la mitad de los profesores no disponen de invariantes operatorios que relacionen la función exponencial con la forma en que se estiman los contagiados por COVID-19. Esto nos hace pensar que si los profesores no estaban al tanto de esta relación matemática que revistió interés social mundial, difícilmente los estudiantes puedan conceptualizar un concepto de la función exponencial que les sea útil para ellos.

REFERENCIAS

Podavini, J., y Sureda, P. (2021). La enseñanza de la función exponencial en la escuela secundaria: los profesores. Un estudio de caso. En M. Álvarez, G. Carnelli, L. Díaz, F. Espinoza, A. Fórmica, y S. Scaglia (Eds.) *Noticiero de la Unión Matemática Argentina*, 56 (1), 58-61.

Podavini, J., y Sureda, P. (2022). Invariantes Operatorios de profesores de Escuela Secundaria sobre Función Exponencial y Modelización del COVID-19. *Revista Ikastorratza.* [En revisión].

Sureda, P., y Podavini, J. (2022). La Función Exponencial y la forma en que se estiman los contagiados por COVID19: entrevista a Profesores de Escuela Secundaria. *Revista Épsilon*. [En revisión].

Sureda, P., y Otero, R. (2022). Ausencia de Invariantes Operatorios Exponenciales en estudiantes de la Escuela Secundaria de Adultos. *Revista Educación Matemática.* [En revisión].

Sureda, P., y Otero, R. (2013). Un estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Educación Matemática*. *25*(2), 89-118.

Vergnaud, G (1990). La Teoría de los Campos Conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, *10*(2), 133-170.

Vergnaud, G. (2013). Pourquoi la théorie des champs conceptuels? *Infancia y Aprendizaje*, *36*(2), 131-161.

Villarreal, M. E., Esteley, C. B., y Alagia, H. R. (2005). As produções matemáticas de estudantes universitários ao estender modelos lineares a contextos não-lineares, *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, *23*(18), 23-40.

Weber, K. (2002) Students' understanding of exponential and logarithmic functions. En D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant Y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the 24th annual meeting of the North*

American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

IMPACTO DE LA PANDEMIA EN LOS ESTUDIANTES DE LA CARRERA PEDAGOGÍA MEDIA MATEMÁTICA DE LA UC TEMUCO DE LAS COHORTES 2018-2019

Nicolás Calbul, Giuliana Jara, Natalia Maldonado, Denit Quezada, Anahí Huencho

Universidad Católica de Temuco

ncalbul2018@alu.uct.cl, gjara2019@alu.uct.cl, nmaldonado@alu.uct.cl, dquezada2019@alu.uct.cl, ahuencho@uct.cl

El COVID-19 conllevó a cambios abruptos del diario vivir. La educación se enfrentó a nuevas metodologías de aprendizaje que afectan su bienestar estudiantil, por lo que buscamos comprender los efectos de la modalidad virtual de los futuros docentes de la carrera de Pedagogía Media Matemáticas de la UC de Temuco. Se realizan entrevistas semiestructuradas a 24 estudiantes pertenecientes a las cohortes 2018-2019 de la carrera. Los resultados evidenciaron alteraciones en su proceso de enseñanza-aprendizaje, dado un alto estrés que afectó la interacción estudiantil, aprendizaje autónomo y deficiencia de contenido para el rendimiento académico, alterando su formación inicial docente.

Formación inicial docente, Aspectos psicosociales, Pandemia, Matemática, Modalidad Virtual.

INTRODUCCIÓN

La virtualización de la educación en pandemia afectó los logros de aprendizaje, la interacción social, la estimulación de los estudiantes y las habilidades prácticas que se desarrollan en espacios educativos (Aguilar, 2020; Cervantes y Gutiérrez, 2020). La comunidad educativa, tras la pandemia, se vieron enfrentados a procesos internos, reflejados en sus acciones personales e interpersonales, evidenciados en los aspectos psicosociales. En este contexto, los estudiantes pueden presentar aspectos psicosociales que afecten su salud mental, rendimiento académico, interacción estudiantil, aprendizaje autónomo, entre otros (Puerta y Pérez, 2017; García et al., 2021; Godínez et al., 2016).

En cuanto a la enseñanza de las matemáticas, ésta se ve aún más comprometida por su carácter complejo y su estructura tradicional, la que requiere una interpretación del lenguaje corporal para evidenciar el aprendizaje que se invisibiliza a través de una pantalla (Cassibba et al., 2021). En la Formación Inicial Docente (FID), los futuros docentes de matemática vieron su conocimiento específico afectado negativamente por esta modalidad (Cassibba et al., 2021). Así, el objetivo de esta investigación es comprender los efectos de la modalidad virtual en la formación de los futuros docentes de matemática de la carrera de Pedagogía Media en Matemática en la UC de Temuco.

Formación inicial docente de matemáticas en pandemia

La FID corresponde al proceso profesional de un futuro profesor, en donde adquiere las habilidades necesarias para generar enseñanzas que satisfagan las diversidades sociales y los cambios históricos temporales (Ávalos y Matus, 2010; Souza y Martins, 2021). En contexto de pandemia la FID se percibe deficiente producto del cambio en la modalidad de enseñanza, el cual limita las estrategias de los profesores para desarrollar sus clases y generando nuevos retos en la formación docente (Cannellotto, 2020).

En Matemática, los programas de formación se vinculan a dos ejes principales, correspondiente a la profundización de los conocimientos específicos y la formación pedagógica en su conjunto (Souza y Martins, 2021). En pandemia, la FID de matemática se vio enfrentada a sucesos únicos con una experiencia nueva sin conocimientos previos para afrontar los cambios de la enseñanza (Calle et al., 2021). Los futuros profesores de matemática y su formación de modalidad virtual alcanzaron niveles de aprendizaje deficientes en el marco de la disciplina, sin lograr aprendizajes profundos y significativos (Cassibba et al., 2021).

Aspectos psicosociales en el proceso de enseñanza y aprendizaje

Los aspectos psicosociales describen procesos internos que se vinculan al individuo, encontrándose en constantes modificaciones debido a las interacciones con el medio social y cultural (Osorio et al., 2009). La interacción estudiantil en el proceso de enseñanza es atribuible a los docentes, estudiantes y el sistema educativo en general, permitiendo intervenciones, colaboraciones y debates con sus pares para desarrollar habilidades sociales que le permite favorecer su aprendizaje (Lescano et al., 2021).

Estos aspectos se vinculan al ambiente de aprendizaje mediante los contenidos a trabajar, las estrategias didácticas, pedagógicas y los vínculos relacionados con el entorno dentro y fuera del aula, pero en pandemia las restricciones sociales, afloraron conductas de aislamiento social y fallas en el bienestar estudiantil (lm-Hadulla et al. 2021; Liza et al. 2022). Algunas consecuencias se reflejaron en el alto nivel de estrés, depresión y ansiedad, afectando directamente el rendimiento académico de los estudiantes, su salud mental, interacción estudiantil, aprendizaje autónomo, entre otros (Puerta y Pérez, 2017; García et al., 2021; Godínez et al., 2016).

METODOLOGÍA

Dado que el objetivo de esta investigación es comprender los efectos de la modalidad virtual en los estudiantes de la carrera Pedagogía Media en Matemática de la UC de Temuco, el estudio se enfoca en un paradigma cualitativo, porque permite analizar la realidad subjetiva de los efectos de la educación superior en pandemia mediante la extracción de los datos no numéricos, sino, por medio de una examinación de casos para obtener una perspectiva por medio de sus tendencias generales (Hernández et al., 2006).

En la investigación, se estima como población todos los estudiantes ingresados a la carrera PMM de la UCT de las cohortes 2018 - 2019. La selección de dichas cohortes es debido a su trayectoria educacional anterior a la pandemia, persistiendo en su FID durante la crisis sanitaria y cercanos a egresar, caracterizados por vivenciar el proceso universitario tanto en modalidad presencial como virtual, permitiendo analizar ambos contextos formativos.

El instrumento de recolección de datos corresponde a una entrevista semiestructurada, considerando a 24 estudiantes de la carrera, los que nos permite una saturación de los datos del 80% (Marshall, 2015), con foco en el rendimiento académico, salud mental, trabajo autónomo e interacción estudiantil. La entrevista se extendió entre 10 a 30 minutos por cada participante y fue grabada. Cada entrevista fue transcrita y analizada levantando códigos emergentes y generando agrupaciones por temas que nos permiten comprender el efecto de la modalidad virtual en FID en matemática.

RESULTADOS

Dentro de los grandes temas tratados por los estudiantes entrevistados este se centra en el estrés durante el proceso de aprendizaje dada la modalidad enfrentada y la carga de actividades académicas solicitadas en los diferentes cursos del plan de estudio, evidenciado mediante la siguiente apreciación: "*Durante la pandemia me sentí estresado, colapsado, angustiado muchas veces terminando los trabajos con mucha adrenalina por todo lo que había que hacer y de repente los profesores mandan más trabajos, terminando colapsado*" (Estudiante 1).

Este tema se desagrega con el rendimiento académico en donde los estudiantes concuerdan con la obtención de mejores calificaciones que en periodos normales de formación universitaria, con un rango de aprobación de cursos superior al tradicional, pero con una comprensión de las temáticas superficiales por dinámicas mayoritariamente de transferencia de contenidos por sobre la construcción de éstos en ambientes de colaboración y reflexión conjunta, lo que permitía reforzar los contenidos superficialmente antes de las evaluaciones establecidas, una evidencia de esto es "*teníamos muy buenas notas, pero estudiamos para el momento no había un aprendizaje significativo en donde comprendemos el contenido primordial para nuestra formación*" (Estudiante 4), "*básicamente, yo diría que el aprendizaje que tuvimos dentro de la universidad en modalidad online fue más autónomo que dependiente de un profesor como tal*" (Estudiante 3). Asimismo, los deficientes aprendizajes que serán reflejados en la futura labor docente, como en las prácticas profesionales de la FID.

Unas de las preocupaciones recurrentes en el marco del aprendizaje en modalidad virtual, son los cursos matemáticos, como el cálculo y la trigonometría. En la contingencia sanitaria no existieron las herramientas suficientes para efectuar la enseñanza de los contenidos y/o entrega de conocimientos de forma significativa, como lo expresa la siguiente cita, "*era mucho más fácil consultarle las dudas al profesor en presencial, ya que en online simplemente se podía cortar la llamada o tener el internet malo, también no había retroalimentaciones efectivas*" (Estudiante 4). Visualizando un aprendizaje de contenidos matemáticos desarrollados de manera autónoma.

La autonomía del aprendizaje es un tema recurrente entre los estudiantes entrevistados, lo que trajo consigo la búsqueda de espacios de estudios adecuados y una excesiva autorregulación en el proceso, como evidencia se tiene,

> "*el aprendizaje autónomo fue deficiente, creo yo, por lo mismo que te decía de la autorregulación a los tiempos, el hecho de que uno está rodeado de gente, a veces mucho ruido, cosas así, impedía un aprendizaje que fuera bueno*" (Estudiante 2).

Las entrevistas dejan en claro la preocupación actual de las cohortes en la proximidad de ejercer la profesión docente en la disciplina, puesto que creen que sus conocimientos son deficientes y que existe un tiempo reducido para remediar las necesidades de aprendizajes, teniendo como una única

solución el atenderlas de manera autónoma en los momentos requeridos, una cita asociada a este tema es la siguiente,

> "*la única solución posible para saldar todas las fallas en la falta de conocimiento es con un aprendizaje autónomo, pero aun así tenemos que tener a un docente guía para ayudarnos a resolver consultas*" (Estudiante 4).

Lo que se acompaña a los cursos de didáctica y práctica, los cuales fueron desarrollados en un contexto en donde la experiencia de enseñanza de las matemáticas fue escasa o desarrollada en ambientes poco realistas, la cita que acompaña esta idea es la siguiente,

> "*es mejor presencial, ya que uno se enfrenta hacia las situaciones que realmente va a vivir diariamente en un futuro. No es como estar detrás de cámara a ver al alumno y no saber si está aprendiendo o si está haciendo las cosas y todo eso*" (Estudiante 2).

De igual modo, los estudiantes identifican que los factores que hubiesen sustituido las necesidades presentadas durante la modalidad online es un acompañamiento académico y emocional más activo, tal como se evidencia en la siguiente cita, "*si hubiera tenido un acompañamiento académico y emocional durante la pandemia, podría haberme enfocado más en los estudios y tener más motivación para poder seguir*" (Estudiante 3).

Finalmente, en el marco de suplir las necesidades antes expuestas se requiere herramientas y espacios para subsanar las carencias en cuanto a contenido matemático y práctico, junto con duplicar las instancias de simulaciones de contextos de enseñanza que involucren circunstancias presenciales y virtuales, un ejemplo de esto es, "*tal vez un curso centrado en la didáctica, pero con enfoques en la simulación, ya que es difícil enfrentarse a un grupo curso en la realidad*" (Estudiante 1).

DISCUSIONES Y CONCLUSIONES

Desde los resultados, se evidencia que la pandemia afectó a los estudiantes emocionalmente por la carga académica e incertidumbre en los conocimientos que debieran ser adquiridos para su formación docente, evidenciando deficiencias en el aprendizaje de contenidos matemáticos, falta de experiencias en las prácticas iniciales y desempeños didácticos. Dado que la intención de la investigación es comprender los efectos de la modalidad virtual de los futuros docentes en la carrera PMM, subyace que los aspectos psicosociales son primordiales para el desempeño docente, pues al tener una buena base emocional permitirá tener un buen desarrollo como individuos tanto en el ámbito personal como laboral.

En el estudio emergen necesidades que comprenden nuevos horizontes enfocados para sus desarrollos profesionales como docentes de la disciplina, las cuales se involucran con nuevas metodologías de desempeño autónomo para implementar nuevas herramientas didácticas, también manteniendo un seguimiento a los egresados de la carrera correspondiente al estudio.

Dado que los estudiantes no alcanzaron aprendizajes profundos y significativos (Cassibba et al., 2021), las instituciones requieren incorporar herramientas de acompañamiento académico y socioemocional que responda a las necesidades de los estudiantes con la intención de desarrollar

estabilidad emocional y una nivelación de contenido, incorporando las herramientas necesarias para que los futuros docentes puedan entregar el conocimiento que incorporen las didácticas.

REFERENCIAS

Aguilar, F. (2020). Del aprendizaje en escenarios presenciales al aprendizaje virtual en tiempos de pandemia. *Estudios pedagógicos, 46*(3), 213-223. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052020000300213

Ávalos, B., y Matus C. (2010). *La Formación Inicial Docente en Chile desde una óptica internacional. IEA TEDS-M*. Ministerio de Educación.

Calle, E., Mora, M., Jácome, M., y Breda, A. (2021). La enseñanza de las matemáticas en un curso de formación en contexto de pandemia en un curso de formación en contexto de pandemia: la percepción de futuros profesores de matemáticas de Ecuador. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 16*(20), 200-215.

Cannellotto, A. (2020). Universidades viralizadas: la formación en y post pandemia. En I. Dussel, P. Ferrante, y D. Pulfer, (Eds.), *Pensar la educación en tiempos de pandemia. Entre la emergencia, el compromiso y la espera*, (213- 228). UNIPE.

Cassibba, R., Ferrarello, D., Mammana, M., Musso, P., Pennisi, M., y Taranto, E. (2021). Enseñanza de matemáticas a distancia: Un reto para las universidades. *Revista Education sciences, 11*(1), 1-20 https://doi.org/10.3390/educsci11010001

Cervantes, E., y Gutiérrez, P. (2020). Resistir la Covid-19. Intersecciones en la Educación de Ciudad Juárez, México. *Revista Internacional de Educación para la Justicia Social*, *9*(3), 7-23. https://doi.org/10.15366/riejs2020.9.3.001

García, J., García, G., y Botero, M. (2021). Aspectos psicosociales y condiciones educativas de docentes de lengua en formación durante el confinamiento por la pandemia de COVID-19. *Revista De Lenguaje Y Cultura, 26*(3), 553-569. https://doi.org/10.17533/udea.ikala.v26n3a05

Godínez, G., Reyes, J., García, M., y Salgado, T. (2016). Los factores psicosociales como impacto en el bajo rendimiento escolar de los estudiantes de la Universidad Autónoma de Guerrero. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, *7*(13), 107-125.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill.

Lescano, A., Puy, J., y Puy, A. (2021). De la presencialidad a la virtualidad: Enseñar Matemáticas en Pandemia. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología,* 28, 294-302. https://doi.org/10.24215/18509959.28.e36

Liza, F., Amin, S., Das, A., y Ashad, M. (2022). Impactos de COVID-19 en la educación, la vida y la salud de los estudiantes en Bangladesh. *Revista Internacional de Investigación Ambiental y Salud Pública,* 19(785),1- 17. https://doi.org/10.3390/ijerph19020785

Lm-Hadulla, R., Klimov, M., Juche, T., Möltner, A., y Herpertz, S. (2021). Bienestar y salud mental de estudiantes durante la pandemia de COVID-19. *Revista Psychopathology*, 54, 291-297. https://doi.org/10.1159/000519366

Marshall, B., Cardon, P., Poddar, A., y Fontenot, R. (2013). ¿Importa el tamaño de la muestra en la investigación cualitativa?: Una revisión de las entrevistas cualitativas en esta investigación. *Journal of Computer Information Systems, 54*(1), 11–22. https://doi.org/10.1080/08874417.2013.11645667

Osorio, M., Mejía, L., y Navarro, J. (2009). Factores psicosociales que influyen en el éxito o fracaso del aprovechamiento escolar en la asignatura de Física básica. *Espacios públicos, 12*(26), 261-276.

Puerta, D., y Perez, J. (2017). *Factores psicosociales escolares y desarrollo cognitivo*. Universidad Católica de Pereira.

Souza, C., y Martins, L. (2021). Aprendizajes experimentados por los profesores que trabajan en las carreras de matemáticas en el contexto de la educación a distancia de emergencia. *Revista de Humanidades e Innovación, 8*(41), 89-105.

COMUNIDADES DE PRÁCTICA AL DESARROLLO PROFESIONAL DE FORMADORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: FACILITADORES Y OBSTACULIZADORES

Constanza Ledermann, Helena Montenegro, Salomé Martínez

Universidad de Chile

constanza.ledermann@uchile.cl, helena.montenegro@uchile.cl, samartin@dim.uchile.cl

En esta revisión de literatura se analizan diversos factores a considerar para la conformación de una comunidad de práctica de formadores de matemática. Se identificaron cuatro factores claves: oportunidades para fomentar la colaboración y la participación al interior de la comunidad; creación de un sentido pertenencia; configuración de una identidad y significados comunes en torno a preocupaciones, intereses y/o experiencias; y conformación de un espacio de apoyo emocional y de desarrollo de la identidad profesional como formador. Finalmente, se revisan consideraciones del diseño del ambiente digital para favorecer interacciones y la interfaz del entorno virtual.

Comunidades de práctica, Formadores de profesores, Colaboración, Identidad profesional, Diseño de entornos virtuales.

INTRODUCCIÓN

Durante la última década se ha acrecentado el interés por impactar en el desarrollo profesional de los formadores de profesores de matemáticas, derivado del hecho de que el fortalecimiento de sus habilidades de enseñanza contribuye a mejorar el aprendizaje de los estudiantes (Vescio et al., 2008). A pesar de que ha sido un tema poco desarrollado dentro del campo de la formación docente (Ping et al., 2018; Van der Klink et al., 2017), en la literatura se han identificado diversos elementos que son importantes de considerar. En primer lugar, se da cuenta del desafío que supone articular las áreas de desarrollo profesional dentro de los programas de formación docente, dado que coexisten formadores deprofesores de diferentes orígenes y experiencias profesionales (Van der Klink et al., 2017). Segundo, el escaso o nulo apoyo que reciben una vez que se convierten en formadores de docentes, situación que persiste a lo largo de su carrera (Van Velzen et al., 2010). En tercer lugar, se espera que desarrollen su identidad profesional como formadores de docentes (Izadinia, 2014), pero no se fortalece su rol ni su identidad como investigadores, particularmente en lo que respecta a la necesidad de investigar sus propiasprácticas docentes (MacPhail et al., 2019; Ping et al., 2018).

Esta situación puede observarse también en función de las necesidades de desarrollo profesional de los formadores de profesores de matemáticas. Por ejemplo, Suppa et al. (2020), identifican tres factores clave que contribuyen al desarrollo profesional de los formadores de profesores de matemáticas noveles 1) trabajar con un mentor, 2) recibir materiales educativos, y 3) trabajar en un entorno de enseñanza colaborativa donde puedan interactuar con otros formadores de profesores. En torno a esta última idea, una manera de reforzar el desarrollo profesional radica en la creación comunidades de práctica, que pueden constituir un modelo de aprendizaje profesional atractivo para los formadores de profesores, puesto que están conformadas por profesionales que comparten inquietudes y problemas para profundizaren sus conocimientos y experiencias, y se centran en la

colaboración y el aprendizaje colaborativo (Avidov-Ungar et al., 2021) para abordar las necesidades disciplinarias específicas de los formadores.

En el marco de un proyecto de investigación aplicada, estamos diseñando un sistema de apoyo para formadores de profesores de matemáticas basado en comunidades de práctica en línea. Este sistema pretende apoyar el trabajo colaborativo de los formadores de profesores a partir de: 1) la investigación de sus propias prácticas docentes y 2) el desarrollo de innovaciones pedagógicas en la enseñanza de las matemáticas. El formato en línea de estas comunidades permitirá la participación de los formadores de profesores de matemáticas independientemente de la zona geográfica en la que impartan sus clases, en un contexto de equidad territorial. El proyecto tiene como objetivo proporcionar una plataforma digital para apoyar a estas comunidades, así como una metodología de colaboración con el fin de atraer a los participantes, para fomentar las interacciones de los participantes, y promover el compromiso a largo plazo. El diseño de dicha plataforma requiere tener en cuenta estos propósitos, así como otras necesidadesespecíficas identificadas en la literatura para que dichas comunidades prosperen.

El presente estudio comparte los resultados de una revisión bibliográfica realizada para identificar aspectos cruciales para considerar en la construcción de este tipo de comunidad de práctica para los formadores de profesores de matemáticas.

DISEÑO METODOLÓGICO

Se realizó una búsqueda bibliográfica bajo el modelo PRISMA (McInnes et al., 2018) para examinar las experiencias y los factores críticos relevantes en la literatura sobre comunidades de práctica. Este procedimiento implicó, en primer lugar, definir un sondeo de términos de búsqueda y seleccionar las bases de datos adecuadas. En segundo lugar, se formularon los criterios de inclusión yexclusión que guiaron la búsqueda bibliográfica. En tercer lugar, se examinaron los títulos y las palabras clave de los artículos para determinar su pertinencia para el objetivo de investigación.

En la primera etapa se seleccionaron 275 documentos, los que se revisaron preliminarmente según su título y palabras clave, conduciendo a la selección de 35 artículos sobre el tema de interés. Posteriormente, se revisaron sus resúmenes y se aplicaron diversos criterios de inclusión y exclusión. Finalmente, se seleccionaron 22 documentos para una revisión completa.

El análisis de los datos se realizó mediante un análisis temático para identificar patrones y temas recurrentes (Braun y Clarke, 2006). Para ello, se empleó la codificación inductiva para identificar temas relacionados con (1) los procesos óptimos para crear y desarrollar una comunidad de práctica influyente; (2) los factores relacionados con el éxito de las comunidades de práctica, y (3) los elementos críticos del entorno digital que deben considerarse para facilitar el compromiso y la retención de sus miembros.

RESULTADOS

Se identificaron seis aspectos fundamentales que caracterizan el desarrollo de una comunidad de práctica. Los cuatro primeros tienen que ver con las características de las interacciones generadas dentro de las comunidades; los dos últimos se centran en las características estructurales que favorecerían las interacciones entre los participantes y el diseño del entorno virtual.

Colaboración y participación. Para desarrollar una comunidad de práctica es crucial establecer un propósito común basado en los temas que los participantes consideran relevantes para su trabajo y desarrollo profesional (Avidov-Ungar et al., 2021; Nese et al., 2020). Esta colaboración crea una culturaque estimula el aprendizaje a través del intercambio de ideas, perspectivas y prácticas (Cherrington et al., 2018; Mompoint-Gaillard et al., 2022).

Sentido de comunidad. Se debe propiciar la construcción de una identidad y un sentido común entre los miembros, basado en el lenguaje y las normas de comportamiento (Dania y Griffin, 2021; Olanoff et al.,2021; Weinberg et al., 2021). Para ello, los miembros deben establecer puntos de intersección entre sus preocupaciones, intereses y experiencias y asignar tiempo para las discusiones reflexivas y críticas (Weinberg et al., 2021). Estas acciones permiten configurar la comunidad como una instancia de consulta, y ayudan a invitar a todos sus miembros a compartir preocupaciones comunes y a estar abiertosa presentar y reflexionar sobre prácticas exitosas y no exitosas (Avidov-Ungar et al., 2021).

Apoyo emocional. El apoyo profesional y emocional que los participantes sienten que reciben cuando forman parte de una comunidad es clave (Avidov-Ungar et al., 2021), ya que permite generar un entornode aprendizaje seguro en el que es posible compartir experiencias y discutir nuevos enfoques (Cherrington et al., 2018). Además, crea un espacio que brinda oportunidades para intercambiar conocimientos interpersonales y establecer relaciones estables, lo que posibilita que los formadores de docentes superen su aislamiento laboral al permitir la reflexión conjunta en torno a problemas e inquietudes de la práctica (Moodley, 2019).

Identidad profesional. La participación en la comunidad permite a los individuos desarrollar nuevas percepciones sobre sus identidades profesionales (Jocius et al., 2022), en un proceso dialógico en el queesta se configura continuamente en interacción con los demás (Weinberg et al., 2021). Existe una estrechaconexión entre la identidad y la práctica; por lo tanto, el desarrollo de la práctica de los formadores de docentes está estrechamente vinculado al desarrollo de su identidad profesional (Izadinia, 2014). Por lo tanto, la comunidad puede ser vista como un catalizador para el cambio en las prácticas de enseñanza y la identidad profesional de los formadores de docentes (Kareemee et al., 2019).

Diseño de interacciones en espacios virtuales. La creación de una comunidad de práctica en línea no consiste únicamente en añadir tecnología a las comunidades de aprendizaje presenciales, sino que implicaapoyar un proceso de naturaleza particular y específica (Durr et al., 2020). Uno de los puntos fuertes delas comunidades de práctica en línea es el aumento de las oportunidades para reflexionar y colaborar sinlas limitaciones habituales de tiempo y espacio (Karo y Petsangsri, 2021). Este proceso puede ser apoyado por un facilitador que ayude a lograr el buen funcionamiento de la comunidad, movilice el aprendizaje y desarrolle un sentido de comunidad (Jan y Vlachopoulos, 2018). Dicho facilitador puedepropiciar niveles más profundos de reflexión (Nikiforos et al., 2020) y garantizar oportunidades continuas de interacción (Avidov-Ungar et al., 2021; Diile y Røkenes, 2021).

Consideraciones sobre el diseño y la interfaz del entorno virtual. Cuando se configuran como recurso educativo los medios digitales, deben promover la interacción del profesor (Dania y Griffin, 2021). Por lo tanto, los participantes deben familiarizarse con los tipos de herramientas y tareas que

van a utilizar yrealizar, facilitando así su participación (Karo y Petsangsri, 2021; Nikiforos et al., 2020). A raíz de ello,surge la necesidad de priorizar unas tecnologías sobre otras, dependiendo de la intención de cada actividad.

DISCUSIÓN

El presente estudio tuvo como objetivo identificar los elementos clave a considerar en la creación de unacomunidad virtual de práctica para formadores de profesores de matemáticas. Una revisión de la literaturaidentificó seis aspectos críticos relacionados con las interacciones generadas dentro de las comunidadesy los aspectos estructurales de los sistemas tecnológicos que sustentan la comunidad. Los resultados destacan cómo las comunidades permiten a sus miembros superar el aislamiento que experimentan en sutrabajo en el aula, configurándose ésta como un lugar de colaboración basado en el establecimiento de propósitos y objetivos comunes (Avidov-Ungar et al., 2021; Weinberg et al., 2021). Además, este lugarse sustenta en una identidad compartida que favorece el intercambio colaborativo de ideas, prácticas y recursos en un entorno seguro (Dania y Griffin, 2021).

Identificamos cuatro retos para diseñar nuestro sistema de apoyo a los formadores de profesores de matemáticas basadas en comunidades de práctica online para que sea sostenible. Primero, debemos considerar el diseño de la interfaz amigable, que permita a los participantes utilizar su tiempo a favor de la interacción con otros y no perderlo en aprender a usar las herramientas digitales. En segundo lugar, debemos considerar la atención a los diferentes orígenes de los formadores de profesores (matemáticos y profesores de secundaria), que también enseñan a estudiantes con diferentes perfiles. Incluir esta diversidad será clave para desarrollar un sentido de comunidad entre los matemáticos y los formadores de profesores de matemáticas, avanzando en la discusión y reflexión sobre los problemas y retos de la enseñanza de las matemáticas.

En tercer lugar, una comunidad de esta naturaleza debe considerar un espacio seguro, que favorezca el intercambio de recursos y experiencias de enseñanza entre formadores de profesores de matemáticas, fortaleciendo sus habilidades de enseñanza al conocer cómo otros formadores de profesores han enfrentado las dificultades de enseñar un contenido particular. Por último, es esencial considerar la identidad profesional de los formadores de profesores de matemáticas como profesores e investigadores. Esta idea adquiere relevancia si tenemos en cuenta que se espera que los formadores de profesores desarrollen una identidad como académicos, lo que conlleva la adquisición de competencias docentes y de investigación. Sin embargo, ha habido mucho interés en la investigación profesional y el autoestudio entre los formadores de profesores para mejorar la enseñanza. Por lo tanto, la comunidad debe considerar la posibilidad de crear oportunidades para desarrollar este tipo de investigación como estrategia de trabajo colaborativo y desarrollo profesional entre los participantes.

REFERENCIAS

Avidov-Ungar, O., Guberman, A., Dahan, O., y Serlin, R. (2021). Professional communities of teacher educators: the characteristics that promote their success. *International Journal of Leadership in Education, 24*(4), 491-512.

Braun, V., y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77–101.

Cherrington, S., Macaskill, A., Salmon, R., Boniface, S., Shep, S., y Flutey, J. (2018). Developing a pan-university

professional learning community. *International Journal for Academic Development, 23*(4), 298-311.

Dania, A., y Griffin, L. L. (2021). Using social network theory to explore a participatory action research collaboration through social media. *Qualitative research in sport, exercise and health, 13*(1), 41-58.

Durr, T., Kampmann, J., Hales, P., y Browning, L. (2020). Lessons learned from online PLCs of rural STEM teachers. *The Rural Educator, 41*(1), 20-26.

Izadinia, M. (2014). Teacher educators' identity: A review of literature. *European Journal of Teacher Education,37*(4), 426–441.

Jan, S. K., y Vlachopoulos, P. (2018). Influence of learning design of the formation of online communities oflearning. *International Review of Research in Open and Distributed Learning, 19*(4).

Jocius, R., O'Byrne, W. I., Albert, J., Joshi, D., Blanton, M., Robinson, R., y Catete, V. (2022). Building a VirtualCommunity of Practice: Teacher Learning for Computational Thinking Infusion. *TechTrends,* 66, 547–559. https://doi.org/10.1007/s11528-022-00729-6

Kareemee, S., Suwannatthachote, P., y Faikhamta, C. (2019). Guidelines for Online PLC with a Lesson Study Approach to Promote STEM Education. *The Journal of Behavioral Science, 14*(3), 32-48.

Karo, D., y Petsangsri, S. (2021). The effect of online mentoring system through professional learning community with information and communication technology via cloud computing for pre-service teachers in Thailand. *Education and Information Technologies, 26*(1), 1133-1142.

MacPhail, A., Ulvik, M., Guberman, A., Czerniawski, G., Oolbekkink-Marchand, H., y Bain, Y. (2019). The professional development of higher education-based teacher educators: Needs and realities. *Professional Development in Education, 45*(5), 848–861.

Mompoint-Gaillard, P., Ragnarsdóttir, G., y Jónasson, J. T. (2022). The key role of moderators in online communities of teachers: How presences support co-construction of knowledge in asynchronous discussions. *Teaching and Teacher Education*, 116, 103751.

Moodley, M. (2019). WhatsApp: Creating a virtual teacher community for supporting and monitoring after a professional development programme. *South African Journal of Education, 39*(2), 1-10.

Nese, R. N., Meng, P., Breiner, S., Chaparro, E., y Algozzine, R. (2020). Using stakeholder feedback to improve online professional development opportunities. *Journal of Research on Technology in Education, 52*(2), 148-162.

Nikiforos, S., Tzanavaris, S., y Kermanidis, K. L. (2020). Virtual learning communities (VLCs) rethinking: Collaboration between learning communities. *Education and Information Technologies, 25*(5), 3659- 3675.

Ping, C., Schellings, G., y Beijaard, D. (2018). Teacher educators' professional learning: A literature review. *Teaching and Teacher Education,* 75, 93–104.

Suppa, S., DiNapoli, J., Thanheiser, E., y Tobias, J. (2020). Supporting novice mathematics teacher educators teaching elementary mathematics content courses for the first time. *The Mathematics Enthusiast, 17*(23), 493–536.

Van der Klink, M., Kools, Q., Avissar, G., White, S., y Sakata, T. (2017). Professional development of teacher educators: What do they do? Findings from an explorative international study. *Professional Developmentin Education, 43*(2), 163–178.

Van Velzen, C., Van der Klink, M., Swennen, A., y Yaffe, E. (2010). The induction and needs of beginning teacher educators. *Professional Development in Education, 36*(1–2), 61–75.

Vescio, V., Ross, D., y Adams, A. (2008). A review of research on the impact of professional learning communities on teaching practice and student learning. *Teaching and Teacher Education, 24*(1), 80–91.

Weinberg, A. E., Balgopal, M. M., y Sample McMeeking, L. B. (2021). Professional growth and identity development of STEM teacher educators in a community of practice. *International journal of science and mathematics education, 19*(1), 99-120.

NIVELES DE RAZONAMIENTO DE FUTUROS PROFESORES ANTE EL CONCEPTO DE CONTINUIDAD

Angélica Ormeño

angelicaceciliaob@gmail.com

Universidad de Concepción

Este documento corresponde a un reporte de la primera etapa del trabajo final de grado para optar al título de Magíster en Didáctica de la Matemática. La investigación pretende analizar los niveles de razonamiento de estudiantes de Pedagogía en Matemática de la Universidad del Bío-Bío respecto al concepto de Continuidad, por medio de un test y una entrevista socrática con base en el modelo Van Hiele.

Van Hiele, Niveles de razonamiento, Continuidad, Formación de profesores.

INTRODUCCIÓN

Debido a la incorporación de la asignatura *Límites, derivadas e integrales* para el plan diferenciado de matemática en el currículum escolar chileno, se considera imprescindible que los profesores en ejercicio y los profesores en formación, estén capacitados en términos de conocimiento disciplinar en análisis matemático. Este conocimiento no puede ser superficial, se necesita de una comprensión profunda de los conceptos para que él o la docente pueda diseñar y adaptar actividades de aprendizaje adecuadas a sus estudiantes.

En este sentido, es necesario evaluar el nivel de conocimiento disciplinar de los conceptos del Cálculo de los futuros profesores, pero más aún, el nivel de razonamiento ante estos objetos matemáticos. En esta investigación se busca identificar cuál es el nivel de razonamiento ante el concepto de Continuidad, que, por su amplitud de significados, permitirá realizar un análisis profundo de las ideas matemáticas que poseen los estudiantes de pedagogía en matemática ante la noción de Continuidad.

NIVELES DE RAZONAMIENTO DE FUTUROS PROFESORES

En la formación de profesores de matemática se incluyen asignaturas de especialidad, cuyos contenidos suelen ser más complejos que los que deberá enseñar durante su ejercicio profesional; esto se debe a que se quiere fortalecer el razonamiento matemático formal.

Entonces parece claro que, los docentes de matemática deberían poseer un alto nivel de razonamiento y abstracción en su disciplina. Ya que, si esto se cumple, podrán intervenir ante los obstáculos epistemológicos e identificar los errores que comenten sus estudiantes durante el proceso de aprendizaje; y con ello proponer soluciones que puedan minimizar estas dificultades.

El modelo Van Hiele

El modelo Van Hiele nace en 1957 a partir de los trabajos doctorales del matrimonio formado por Dina van Hiele-Geldof y Pierre van Hiele, en los cuales buscaban estudiar la comprensión de los conceptos matemáticos y la forma en que los estudiantes alcanzan un razonamiento deductivo más formal. Esta teoría se desarrolla en vías de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría elemental, y fue ampliamente utilizada en estudios posteriores en Didáctica de la

Geometría; sin embargo, muchas de las últimas investigaciones que se han enmarcado en el modelo Van Hiele se han centrado en conceptos del análisis matemático, ejemplo de esto son los trabajos de algunos autores (Campillo y Pérez, 1998; Jaramillo y Campillo, 2001 ; Gutiérrez y Londoño, 2021), los cuales se consideran parte de la base teórica para esta investigación.

Los niveles de razonamiento en el modelo Van Hiele

Uno de los aportes más significativos de la teoría de Van Hiele es estudiar la forma en que se razona respecto a un objeto matemático, que incluye desde el razonamiento superficial basado en la observación de las características, hasta el razonamiento formal en base a la estructura matemática. Para esto, el modelo clasifica el razonamiento en niveles: el Nivel 0 de Visualización o Reconocimiento, el Nivel 1 de Análisis, el Nivel 2 de Clasificación, el Nivel 3 de Deducción formal y el Nivel 4 de Rigor.

Bajo esta teoría, y lo anteriormente descrito, se esperaría que los profesores de matemática estén en un nivel superior al de sus estudiantes, es decir, si se pretende que los estudiantes sean capaces de realizar demostraciones informales, los docentes tendrían que ser capaces de realizar las demostraciones informales y también demostraciones formales, de modo que se puedan anticipar a las respuestas de los estudiantes. Sin embargo, no hay demasiada información respecto al nivel de razonamiento que deben alcanzar los docentes con base en la teoría de Van Hiele.

EL CONCEPTO DE CONTINUIDAD

Entre los contenidos que pertenecen a la asignatura Límites, derivadas e integrales existe uno que, puede ser percibido como uno de los objetos matemáticos más complejos, es el de Continuidad. Este concepto aparece de forma explícita en el texto Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para carreras de Pedagogía en Matemática; en él se establecen los indicadores de conocimiento disciplinar deseables en un futuro docente de matemática, y se considera una pauta en la formación de profesores. Para el concepto de Continuidad, el documento menciona que se espera que el(la) docente de matemática “Comprende las nociones de límite, continuidad, derivadas, integrales y series, y conoce el Teorema Fundamental del Cálculo, lo que le permite planificar y gestionar actividades de aprendizaje…” (CPEIP, 2021, p. 91).

Dificultad de la Continuidad como objeto matemático

Si bien, la definición de Continuidad es parte de la mayoría de cursos sobre Cálculo I y de Análisis matemático en la formación de docentes de matemática, esto no asegura que los estudiantes de pedagogía posean una comprensión profunda del concepto de Continuidad. Por ejemplo, un estudiante luego de haber aprobado la asignatura de Cálculo, podría considerar que ha aprendido Cálculo Diferencial a nivel general, pero comprender de forma errónea ciertas ideas específicas, como la definición de continuidad, sin haber reflexionado sobre ello. En estos casos, como menciona Hitt (2003), cuando el profesor no es consciente de sus conflictos cognitivos, éstos se convertirán en obstáculos para el aprendizaje de sus estudiantes.

Este es un problema frecuente, aprobar una asignatura no implica la comprensión de todos los contenidos de esa asignatura, especialmente de un objeto matemático complejo como el de Continuidad, y que será aún más complejo para un estudiante de enseñanza media. Crespo (2004), lo explica en pocas palabras “Cuando un concepto matemático ha tardado tantos siglos en hacerse

evidente, esto demuestra que su comprensión no es sencilla, y, por lo tanto, su enseñanza no puede tomarse a la ligera" (p. 44).

Así, aprender el concepto de continuidad es un proceso complejo, no solo para los estudiantes de enseñanza media, sino también para los estudiantes de pedagogía en matemática. Los docentes en formación necesitan una enseñanza disciplinar y didáctica de los conceptos, por ello, es una tarea difícil enseñar la definición de Continuidad a quienes deberán enseñar dicha idea en un futuro.

ENTREVISTA SOCRÁTICA PARA EL ANÁLISIS DEL RAZONAMIENTO

Para el desarrollo de esta investigación se propone utilizar el método de entrevista socrática de forma semiestructurada a partir de un test escrito aplicado previamente, con el fin de mantener una rigurosidad en la estructura y conceptos esenciales de la entrevista de acuerdo a descriptores comunes, pero que además entregue la libertad suficiente a los encuestados para expresar sus ideas y concepciones respecto a los objetos matemáticos que se estudian.

Esta elección está fundamentada en el uso del modelo de Van Hiele. Según Jaramillo y Campillo (2001), "La entrevista socrática entra dentro de la estructura del modelo educativo de Van Hiele" (p. 67). Este tipo de metodología, además tiene doble función, tal como explica De La Torre (2003, p. 116) cuando se refiere a los Diálogos de Platón:

> "el propósito que se persigue con la entrevista socrática es que el aprendiz reflexione no sólo acerca de las preguntas que se le formulan sino, también, acerca de sus propias respuestas y que llegue a hacer conciencia de las relaciones y propiedades que utiliza en sus razonamientos".

ANTECEDENTES DE INVESTIGACIONES PREVIAS

Muchos de los artículos que estudian la Comprensión del concepto de Continuidad bajo una metodología cualitativa, asocian su investigación al modelo de Van Hiele, entre ellos se encuentra el artículo "La Noción de Continuidad desde la Óptica de los Niveles de van Hiele", de Campillo y Pérez (1998), quienes han sido algunos de los primeros en asociar este modelo a objetos del análisis matemático. Ellos dividen su estudio en etapas, aunque solo se enfocan en la primera de ellas, en la cual establecen descriptores para los niveles de razonamiento 0, I, II, III y IV con respecto a la Continuidad local (continuidad en el sentido de Cauchy).

Aunque estos autores no llegan a aplicar el instrumento ni analizar los resultados, sí lo hace una estudiante de la Universidad de Antioquia en 2011, quien aplica el test de Campillo y Pérez mediante una entrevista socrática, diseñando además fases de aprendizaje según el modelo de Van Hiele para el tránsito del nivel II al nivel III. En su tesis de magíster Salazar (2011), se enfoca en el estudio de casos para profundizar en la recolección de información.

El uso de la entrevista socrática se consolida en Jaramillo y Campillo (2001), quienes describen las pautas para diseñar de forma adecuada una entrevista socrática semiestructurada para estudiar la comprensión de conceptos del análisis matemático, a partir del modelo de Van Hiele. En el artículo entregan una estructura para el diseño del método, que incluye la creación de las preguntas, descriptores y prueba escrita

Un artículo más actual es el de Gutiérrez y Londoño (2021), quienes clasifican el razonamiento de algunos estudiantes según el modelo Van Hiele, por medio de una entrevista socrática, en su artículo

Comprensión del concepto de infinito actual y su relación con las funciones reales: el infinito y el modelo de van Hiele. Los resultados muestran que los estudiantes pertenecen a los niveles de razonamiento 3 y 2 respecto al concepto de infinito.

HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

Hasta el momento no se han encontrado investigaciones que identifiquen el nivel de razonamiento para el concepto de Continuidad en estudiantes de pedagogía, y tampoco en docentes en ejercicio. Sin embargo, con base en los estudios previos anteriormente mencionados se espera que los resultados sean relativamente similares a los obtenidos por estudiantes de otras carreras y especialidades. Aunque esto podría variar de acuerdo a las características de la carrera de pedagogía en matemáticas, cuya matemática suele ser más formal que la de carreras de ingeniería, y, por ende, el análisis del discurso semántico podría llevar a concepciones incluso más rigurosas como las que se asocian a la Continuidad entendida desde el punto de vista de la Topología.

REFERENCIAS

Campillo, P., y Pérez, P. (1998). La Noción de Continuidad desde la Óptica de los Niveles de van Hiele. *Rev. Divulgaciones Matemáticas*, *6*(1), 69-80.

Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas [CPEIP] (2021). *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para carreras de Pedagogía en Matemática.* Ministerio de Educación. https://estandaresdocentes.mineduc.cl/publicaciones/matematica/

Crespo, C. (2004). El concepto de continuidad y sus obstáculos epistemológicos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, 39–44.

De La Torre, A. (2003). El método socrático y el modelo de Van Hiele. *Lecturas Matemáticas*, *24*(2), 99-121.

Gutiérrez, A., y Londoño, R. (2021). Comprensión del concepto de infinito actual y su relación con las funciones reales: el infinito y el modelo de van Hiele. *Revista Facultad de Ciencias Básicas*, *17*(1), 9-26.

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del Cálculo*. XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo.

Jaramillo, C., y Campillo, P. (2001). Propuesta Teórica de Entrevista Socrática a la Luz del Modelo de van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, *9*(1), 65–84.

Salazar, L. (2011). *Fases de Aprendizaje en el contexto de van Hiele para el concepto de Continuidad Local* [Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia, Colombia].

DESARROLLO DE LA AFECTIVIDAD Y DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN EDUCACIÓN PÁRVULARIA: EL CASO DE LA INGENIERÍA COOPERATIVA JUEGO DE LOS TESOROS

Grace Morales

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

grace.morales@pucv.cl

Esta ponencia presenta parte de los resultados de un estudio de caso que muestra las estrategias docentes, y cambios en el aspecto afectivo y pensamiento matemático infantil, durante una implementación actualizada de la situación cuasi-fundamental sobre la representación llamada el "juego de los tesoros" (Brousseau, 2004). Se realiza un estudio cualitativo, sobre un estudio de caso de una maestra y 26 alumnos de 4 y 5 años participantes. Como resultados principales se haya la identificación de estrategias basadas en la reticencia didáctica y una gestión de las emociones infantiles logrando que busquen soluciones a problemas en una experiencia matemática.

Ingeniería cooperativa en didáctica, Educación Parvularia, Afectividad, Pensamiento matemático, Juego de los tesoros.

PROBLEMATICA

En la actualidad, en Educación Parvularia, sigue existiendo un cuestionamiento sobre la manera de implementar curricularmente una articulación entre los ámbitos *Interacción y Comprensión del Entorno* y *Social y personal del párvulo*, en particular los aspectos sociales y afectivo, y el desarrollo del pensamiento matemático (Subsecretaría de Educación Parvularia, 2018). En efecto, el actual currículo en Educación Parvularia declara entre los Objetivos generales de la Ley N°20.370 la necesidad de fomentar el desarrollo integral de niños y niñas promoviendo conocimientos, habilidades y actitudes que les permita: "d) Relacionarse con niños y adultos cercanos en forma armoniosa, estableciendo vínculos de confianza, afecto, colaboración y pertenencia", y "h) Reconocer que el lenguaje escrito ofrece oportunidades para comunicarse, informarse y recrearse" (Subsecretaría de Educación Parvularia, 2018, p.16). El ámbito social y afectivo es transversal, y debe cautelarse su "implementación curricular, debido a la relevancia formativa que tienen sus componentes para el desarrollo humano y por lo cual se requiere, que sean visibilizados de manera permanente en todas las acciones educativas que se propician con los niños y las niñas" (Subsecretaría de Educación Parvularia, 2018, p.38). Efectivamente, el ámbito social y afectivo debe contenerse y vincularse con los otros a "un nivel más personal e interpersonal" donde niñas y niños "aprenden sobre sí mismos y los demás, creciendo en autonomía, identidad y sociabilidad". Esto nos lleva a cuestionarnos ¿cómo podemos desarrollar estrategias docentes que permitan llevar al aula experiencias que articulen los aspectos afectivos y el desarrollo del pensamiento matemático?

Para desarrollar este cuestionamiento, se tomó como punto de apoyo una experiencia matemática robusta en el nivel de 4 a 5 años. Se trata del "juego de los tesoros", situación cuasi-fundamental sobre la representación, diseñada y probada por Brousseau y su equipo (2004). Se reimplementó cinco veces por un equipo de investigación de la Universidad de Bretaña Occidental, entre 2008 y 2013. Esta ponencia utiliza los datos recolectados de una tesis doctoral, presenta parte de los resultados de

uno de los estudios de caso para mostrar las estrategias docentes empleados, y que repercutieron en cambios en el aspecto afectivo y pensamiento matemático infantil durante una de las implementaciones realizada en 2013.

MARCO TEÓRICO

El juego de los tesoros: Una experiencia para aprender a representar

El "juego de los tesoros" es una ingeniería didáctica diseñada, en los años 70, para alumnos de 4 y 5 años en la que, durante un año, los alumnos son conducidos a construir códigos para representar, objetos, colecciones, propiedades, relaciones entre otros (Brousseau, 2004). Brousseau le asigna el status de situación cuasi-fundamental de la función de representación, concepto que fue dotado de un sentido muy concreto: « Il s'agit donc pour les élèves de pouvoir utiliser des signes, des combinaisons de signifiants et des listes de signes pour décrire et communiquer » (Brousseau, 2004, p. 258). Nuestra traducción: Se trata para los alumnos de poder utilizar signos, combinaciones de significados y listas de signos para describir y comunicar.

El "juego de los tesoros" se desarrolla en cuatro fases. Las describiremos a continuación, pero nos centraremos en la fase 2, de donde se toman los datos para presentar el caso de estudio.

La **primera fase** es grupal, la intención es que los alumnos designen oralmente 30 o 40 elementos de un conjunto de objetos cotidianos (bolitas, cajas, llaves, u otros). Los objetos se muestran en la mañana y se guardan en una caja hasta la tarde. El juego consiste en recordar uno por uno los objetos nombrándolos para que la maestra los saque.

La **segunda fase**, consiste en un juego individual. Cada alumno debe recordar, inicialmente 3 objetos, pero pronto la maestra les presentará 10 y los esconderá hasta la tarde. Este cambio en la variable didáctica se le denomina "salto informacional". La intención es imposibilitar el uso de la memoria y obligar a buscar otra solución para recordar los objetos. La maestra ofrecerá, después de cada sesión de juegos individuales una instancia de reflexión grupal, con la intención de que busquen posibles soluciones que resuelvan el problema. Brousseau señala que la maestra debe actuar mostrándose "impávida". Esta directriz de acción es la que cuestionaremos en nuestra presentación, ya que la estrategia docente requiere de una problematización de lo que significa este término.

A partir de las ideas propuestas y discutidas, Brousseau (2014) señala que aparecerá la idea de dibujar los objetos, es decir, representarlos simulando una "lista" rudimentaria. Los alumnos experimentarán cierta incertidumbre y frustración mientras intentan hacer que sus representaciones les permitan recordar exactamente los objetos escondidos y no otro (por ejemplo: un rectángulo puede evocar una caja de medicina, una caja de chocolates, un paquete de pañuelos, etc.). La tercera fase el juego cambia a pequeños grupos. El juego consistirá en que uno de los miembros del grupo dibuje 4 objetos escondidos en la caja de la maestra. Sus compañeros de juego deberán nombrar los objetos escondidos usando como pista SOLAMENTE las representaciones dibujadas. Luego de terminar los juegos en pequeños grupos, la maestra los reúne para discutir los problemas que tuvieron para reconocer los objetos dibujados (fase 4). Los hará volver a observar estos objetos para buscar detalles que puedan dibujar y distinguir un objeto de otro. De esta manera, los alumnos comienzan a modelizar los objetos poniéndose de acuerdo sobre una forma única para representar cada objeto, constituyendo junto a su

maestra un "código común". Este código común les permitirá, en la medida que lo usen y respeten como un acuerdo grupal, ganar en sus juegos.

Nociones teóricas para analizar el aspecto afectivo

La "impavidez" (l'impavidité) puede tener el significado de ausencia de miedo, de inquietud. Pero también puede significar indiferencia, lo que puede ser problematizado a partir de la noción de "reticencia didáctica". Esta noción implica que el maestro puede "ocultar, callar, mostrar o decir" pistas que orienten a los estudiantes a actuar o focalizar su atención sobre ciertos aspectos de un problema, descartando otros (Sensevy et al., 2013; Morales, 2014).

METODOLOGÍA

Se preparó la implementación de la ingeniería didáctica, en sus cuatro fases, en un colectivo constituido por 2 investigadores, 3 maestros, 1 doctorante, 2 estudiantes de pregrado, 4 candidatos de magíster, 1 consejero pedagógico. Se implementó en cuatro ocasiones en años distintos. La duración promedio de cada fase fue la siguiente: fase 1 un mes, fase 2 tres semanas, fases 3 y 4 de cuatro a cinco meses.

La reflexión de esta ponencia se enmarca en una investigación mayor, de corte cualitativo, en un estudio de caso (Leutenegger, 2009) que tuvo por propósito documentar la evolución de los aspectos cognitivos y afectivos de un educando de 5 años durante la implementación de las cuatro fases (Morales, 2014). Se realizaron videos grabados de las clases de todas las fases, los cuales fueron transcritos y posteriormente analizados. Se firmaron consentimientos informados por los apoderados. La reflexión que se presenta en esta ponencia toma como punto de apoyo los datos originales recolectados en la tesis doctoral. Se presentará un análisis cualitativo de las estrategias implementadas por uno de los docentes durante la fase 2 con un grupo de 26 alumnos de 5 años.

Gran parte del cuestionamiento sobre las estrategias docentes ha sido enmarcada en la reflexión de este colectivo, posterior a la publicación de la tesis doctoral, en 2022. Para la reflexión, este grupo utiliza la metodología de investigación de *ingeniería cooperativa en didáctica* (Sensevy y Bloor, 2019; Sensevy et al., 2013). La describiremos a continuación. Dentro de los paradigmas de investigación se ha ido posicionando el *design-based research* (Cobb, et al., 2003; Collins et al., 2004). Se caracteriza por un sistema de interrelaciones colaborativas entre docentes e investigadores quienes analizan problemas de la práctica educativa desde múltiples perspectivas; para ello, diseñan, analizan y adecúan cambios en la enseñanza-aprendizaje dentro de un proceso iterativo (Penuel et al., 2011).

El análisis en si se funda sobre el paradigma indiciario (evidential paradigm o paradigme indiciaire de Ginsburg, 1980), con una aproximación clínica en sistemas didácticos (Leutenegger, 2009; Sensevy, 2011) inspirado en los trabajos de Foucault The Birth of the Clinic o La naissance de la clinique (Foucault, 1963). Esto significa que el investigador no trabaja directamente con los hechos, pero sí con los elementos del discurso, gestos y escritos que lleva al status de observables (statut d'observable) los que deben constituirlos como "signos para el observador" (Leutenegger, 2009). Dichos signos son organizados y articulados entre sí conformando sistemas de eventos, lo que permite reconstruir escenas o episodios e interpretados como fenómenos didácticos (Leutenegger, 2009). Los elementos discursivos, gestuales y escritos se plasman en fotogramas, constituyendo un sistema

híbrido o SHTIS (Blocher y Lefeuvre, 2017) (ver ejemplo de la Figura 1). Se complementa con elementos discursivos de entrevistas y cuaderno del docente (en el que el docente escribía sus reflexiones después de cada intervención en aula), triangulando la información para visibilizar elementos que dan cuenta de la intención del docente (ver ejemplo Figura 2).

Figura 1.

Ejemplo Sistema híbrido texto-imagen-sonidos SHTIS. Transcripción e imagen sesión fase 2.

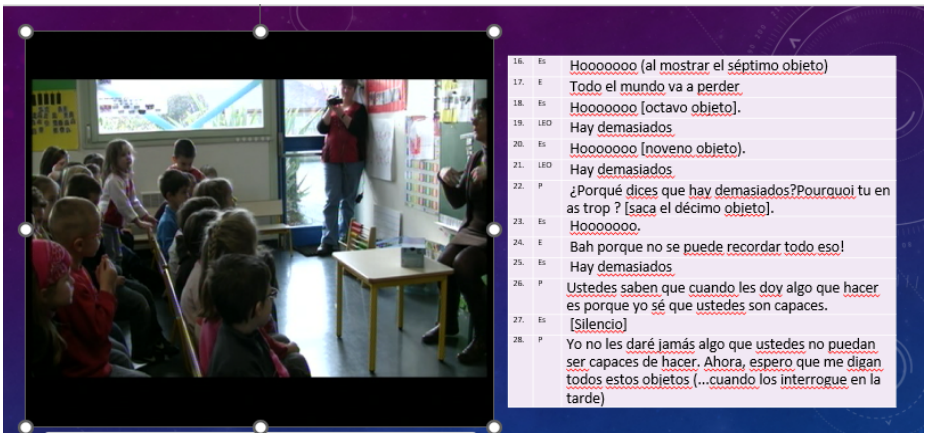
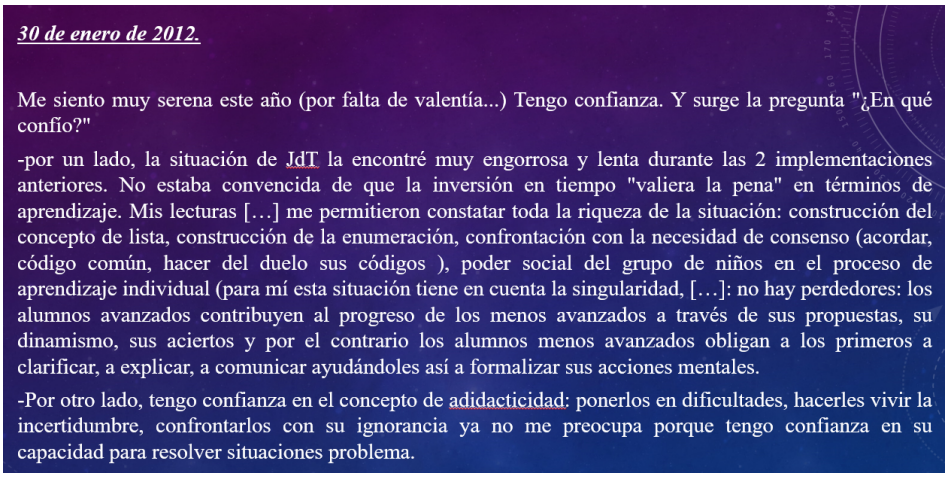


Figura 2.

Ejemplo escritura cuaderno del docente.



RESULTADOS PRINCIPALES

Se pudo observar que la maestra utiliza estrategias fundadas en la reticencia didáctica, animando a los alumnos a buscar una solución sin darles la respuesta (Figura 1). También muestra un gran dominio en la forma de trabajar los afectos infantiles, logrando gestionar sus emociones y canalizar sus acciones hacia el encuentro de una solución compartida. Es importante señalar que la maestra va más allá de la regla descrita en la ingeniería didáctica original de Brousseau, no se contenta sólo con parecer indiferente a la incertidumbre que experimentan los alumnos en la sesión en la que se enfrentan a 10 objetos. Ella reinterpreta las reglas agregando a su estrategia gestos de confianza hacia

los alumnos, motivándolos a buscar una solución ya que confía que son capaces (Figura 2). En la ponencia se desarrollará el análisis para caracterizar las estrategias de reticencia didáctica presentando evidencias: entrevistas (Figura 3), transcripciones de intervenciones en aula, imágenes y fragmentos del cuaderno del docente.

Figura 3.

Entrevista al docente 2013.

117.	GMI	¿Qué piensas de la descripción que hace Brousseau sobre la impavidez de la fase 2?
118.	Maestra	si / [...] queremos tanto el éxito de los alumnos que no les permitimos enfrentar la dificultad de la realidad / [...] / para mí la impavidez es / se trata más del orden del proceso de la situación que intentamos implementar / y el proceso debe ser de los alumnos / el profesor debe estar justo al lado para eh / [por] si no se respeta el proceso.

REFERENCIAS

Blocher, J.N., y Lefeuvre, L. (2017). Le système hybride textes-images-sons : une explora-tion. *Recherches en didactiques 1*(23), 99-132.

Brousseau, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation*. *30*(2), 241–277.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9–13.

Collins, A., Joseph, D., y Bielaczyc, K. (2004). Design research: theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 15–42.

Leutenegger, F. (2009). *Le temps d'instruire: approche clinique et expérimentale du didactique ordinaire en mathématique.* Peter Lang.

Foucault, M. (1963). *Naissance de la clinique*. PUF.

Ginzburg, C. (1980). *Signes, traces, pistes: Racines d'un paradigme de l'indice*. Gallimard.

Morales, G. (2014*). L'enseignement et l'apprentissage de la représentation. Une étude de cas en maternelle: le jeu des trésors.* [Tesis de Doctorado, Université de Bretagne Occidentale, Francia].

Penuel, W. R., Fishman, B. J., Cheng, B. H., y Sabelli, N. (2011). Organizing research and development at the intersection of learning, implementation, and design. *Educational Researcher*, *40*(7), 331–337.

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe*. De Boeck.

Sensevy G., y Bloor T. (2019). *Cooperative Didactic Engineering*. *Encyclopedia of Mathematics Education.* Springer.

Sensevy, G., Forest, D., Quilio, S., y Morales, G. (2013). Cooperative engineering as a specific design-based research. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, *45*(7), 1031-1043.

Subsecretaría de Educación Parvularia. (2018). *Bases Curriculares de la Educación Parvularia*. Ministerio de Educación de Chile.

LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL EN FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA, DESDE EL CONTEO DE CASOS AL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Nicolás A. Fernández Coronado, Isaac A. Imilpán Rivera, Jaime I. García-García

Universidad de Los Lagos

nicolasalonso.fernandez@alumnos.ulagos.cl, isaac.imilpan@ulagos.cl, jaime.garcia@ulagos.cl

Se presenta un análisis de respuestas de futuros profesores de matemática a un problema de conteo de casos y otro del cálculo de probabilidades, con el objetivo de identificar los componentes del significado holístico de la distribución binomial que manejan. Identificamos que los participantes son capaces de enfrentarse a tareas de cálculo y aplicación de la fórmula; sin embargo, presentan debilidades, por ejemplo, al no hacer referencia explícita a los principios de la probabilidad o la esperanza. Lo anterior evidencia una necesidad de promover la comprensión de las componentes y principios de la binomial y cómo estos se relacionan.

Distribución binomial, Probabilidad, Formación de profesores, Enfoque Ontosemiótico.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y aprendizaje de la probabilidad ha tomado gran importancia en las últimas décadas, en respuesta a la creciente necesidad de ciudadanos capaces de hacer frente a las situaciones probabilísticas que se presentan en la sociedad, con competencias no solo asociadas a la lectura y comprensión de información probabilística, sino también vinculadas a su discusión, comunicación y crítica (Gal, 2005). Así, es posible identificar líneas investigativas que buscan fomentar la comprensión significativa de la probabilidad desde perspectivas más cercanas a la vida real, por ejemplo, rescatando aspectos de su historia e identificando cómo esta se evidencia en la educación (Batanero, 2005) y promoviéndola desde edades tempranas (Vásquez y Alsina, 2013).

Dentro de la investigación en educación probabilística, la distribución binomial ha cobrado mayor importancia como objeto de estudio, vinculada al análisis del razonamiento probabilístico de estudiantes y profesores en concordancia con la formación del ciudadano probabilísticamente alfabetizado. El estudio de las competencias de los profesores y profesoras frente a situaciones problemas binomiales ha permitido identificar debilidades en el manejo de componentes esenciales, comprender la esperanza matemática, en sesgos como el de equiprobabilidad, la necesidad de comprender los principios detrás de representaciones como el diagrama de árbol y en establecer relaciones entre las componentes de la distribución binomial (Cid y Alvarado, 2017; Mayen y Salazar, 2014; Pérez, 2016; Toledo, 2018). Con el propósito de contribuir en esta reciente línea investigativa, analizamos las respuestas de profesores en formación frente a situaciones problema de naturaleza binomial, desde los componentes del significado holístico de la distribución binomial identificados en estudios previos (Fernández et al., 2022; García-García et al., 2022).

MARCO TEÓRICO

El Enfoque Ontosemiótico (EOS) es un sistema teórico que incluye elementos para abordar cuestiones involucradas en el aprendizaje y enseñanza de la probabilidad, desde diversas dimensiones (Godino

et al., 2020). Como principio, la matemática se considera como originada de la labor del ser humano frente a situaciones problemas que se les presenta en su entorno, consistente con una serie de acciones o expresiones, conocidas como prácticas matemáticas, para resolverla, comunicar su solución, validarla o extenderla a otras. A su vez, en estas prácticas emergen seis tipos de objetos matemáticos primarios, nombrados "elementos del significado", que corresponden a: situaciones-problemas, procedimientos, conceptos-definiciones, propiedades-proposiciones, argumentos y elementos lingüísticos, siendo estas entidades que se relacionan e intervienen en la práctica, ya sea en su apoyo o regularización (Godino et al., 2020). A partir de esto, el significado holístico de la distribución binomial correspondería a los sistemas potenciales de prácticas que un sujeto puede manifestar frente a situaciones problemas binomiales.

Significados parciales de la distribución binomial

El significado holístico de la distribución binomial, reconstruido desde un estudio histórico epistemológico (García-García et al., 2022), está compuesto por cuatro significados parciales: SP1) Conteo de casos, SP2) estudio de probabilidades de fenómenos binomiales simples o particulares, SP3) estudio de probabilidades de fenómenos binomiales complejos o con una gran cantidad de casos, y SP4) la aproximación a otras ideas probabilísticas o matemáticas como la ley de los grandes números. Para el trabajo presentado, y como un primer acercamiento, consideramos los primeros dos significados parciales y sus objetos primarios (Fernández et al., 2022).

METODOLOGÍA

Desde un paradigma cualitativo (Serrano, 1994), y un diseño exploratorio-descriptivo (Abreu, 2012; Cazau, 2006), analizamos y describimos los elementos (objetos matemáticos primarios) presentes en las respuestas de futuros profesores frente a situaciones-problemas binomiales, así como el nivel de logro frente a ellas (respuesta deseada o no deseada). Para esto, seguimos cuatro fases: (1) identificación de los objetos primarios de la distribución binomial; (2) diseño y validación de un instrumento para explorar la comprensión de los participantes sobre la binomial; (3) descripción de los datos recogidos; y (4) síntesis y representación de nuevas ideas identificadas en los resultados.

Para esta investigación se contó con las respuestas de 22 futuros profesores de matemáticas de educación media (estudiantes de una universidad pública del sur de Chile). Los participantes que respondieron el instrumento han tomado al menos un curso de estadística y probabilidad, habiendo abordado el contenido probabilístico de la distribución binomial y sus temas asociados.

El instrumento de recolección de datos consistió en dos situaciones problemas, validadas por aplicación piloto y juicio de expertos. La primera situación problema, que consistió en un lanzamiento simple de monedas, fue diseñada tomando como referencia los objetos matemáticos primarios del primer significado parcial (SP1) de la distribución binomial; mientras que, para la segunda situación problema, relacionada con el cálculo de probabilidades, se consideraron los del SP2.

RESULTADOS

En un primer nivel de análisis, se identificaron las respuestas deseadas y no deseadas en cada una de las situaciones problema. Es posible identificar que la mayor parte de los participantes no presentan dificultades en responder la situación asociada a un conteo de casos (Tabla 1), por otro lado, en la situación problema 2, se identificaron dificultades especialmente en la estimación del valor esperado.

Tabla 1.

Frecuencias de respuestas dadas por los participantes a la situación-problema 1.

Pregunta	Respuesta deseada	Respuesta no deseada / sin respuesta
1a	22 (100%)	0
1b	17 (77%)	5 (23%)
2	22 (100%)	0

Tabla 2.

Frecuencias de respuestas dadas por los participantes a la situación-problema 2.

Pregunta	Respuesta deseada	Respuesta no deseada / sin respuesta
1	11 (50%)	11(50%)
2	3 (14%)	19 (86%)

Un segundo nivel de análisis, relacionado a la presencia o ausencia de los objetos matemáticos primarios de SP1 y SP2, permite esclarecer las dificultades y debilidades que presentaron los participantes. No obstante, también se consideraron los objetos vinculados al tercer significado parcial de la distribución binomial (SP3).

En particular, respecto a la primera situación problema, es posible identificar la ausencia de los conceptos de combinatoria y el coeficiente binomial (100%), y el uso implícito de otros como el valor de la variable aleatoria (95%), orden (100%) y desigualdad (86%), que, si bien no es necesario hacerlos explícitos para responder a una situación problema, se esperarían que estuvieran presentes en las respuestas de los futuros profesores. Como una problemática simple y asociable a los primeros acercamientos a la probabilidad, se evidencia la presencia de un razonamiento inductivo (86%), pero sin el uso de ideas recursivas. Finalmente, otro aspecto interesante es la identificación de diversos tipos de lenguaje, siendo el tabular el menos utilizado (Tabla 3).

Tabla 3.

Lenguajes utilizados por los participantes a la situación-problema 1.

Lenguaje	Presente explicito	Presente con errores	Ausente
Escrito	22 (100%)	0	0
Simbólico	22 (100%)	0	0
Tabular	4 (18%)	0	18 (82%)
Gráfico	17 (77%)	0	5 (23%)

Respecto a la segunda situación problema, las dificultades identificadas en el análisis pueden ser asociadas a errores relacionados con identificar el valor de la variable (50% presencia con error), que pertenece al SP1, y el uso directo de la fórmula de la distribución binomial (91%) para calcular la probabilidad, perteneciente al SP3, en lugar de usar principios probabilísticos del SP2 para la construcción de expresiones probabilísticas. El manejo menos completo de componentes para

resolver esta situación (en comparación con los identificados en la primera situación) es evidenciable especialmente en los procedimientos (Tabla 4) y el lenguaje utilizado (Tabla 5).

Tabla 4.

Procedimientos utilizados por los participantes a la situación-problema 2.

Procedimientos	Presente explícito	Presente con errores	Ausente
Identificar situación binomial	20 (91%)	0	2 (95)
Modelación	20 (91%)	1 (4,5%)	1 (4,5%)
Cálculo de la expectativa	0 (18%)	3 (14%)	19 (86%)

Tabla 5.

Lenguajes utilizados por los participantes a la situación-problema 2.

Lenguaje	Presente explícito	Presente con errores	Ausente
Escrito	22 (100%)	0	0
Simbólico	22 (100%)	0	0
Tabular	4 (18%)	0	18 (82%)
Gráfico	0	0	22 (100%)

CONCLUSIONES

Respecto al primer significado de la distribución binomial, asociado al conteo de casos, identificamos una alta evidencia del uso correcto explícito e implícito de conceptos como caso, el valor de la variable y el orden, así como la ausencia de la combinatoria o los coeficientes binomiales. Si bien esto último no es problemático en la resolución de los problemas, significan una comprensión incompleta del primer significado parcial. Respecto al segundo significado de la distribución binomial, identificamos una alta presencia de conceptos originados del primer significado y el uso directo de la fórmula, perteneciente al tercer significado. Por otro lado, identificamos que ninguno de los participantes pudo abordar el cálculo de la expectativa de manera correcta, aun modelando e identificando características de un fenómeno binomial. En síntesis, pudimos identificar en los futuros profesores el manejo de diversos de los objetos matemáticos primarios de los significados parciales de la distribución binomial, sin embargo, sin lograr reconocer la relación del conteo de casos con constructos como la combinatoria y el binomio, y además, sin poder establecer efectivamente la relación entre los conceptos de media, esperanza y valor esperado que permiten aterrizar las probabilidades calculadas a los fenómenos cercanos de la realidad y resolver preguntas relacionadas con la estimación y toma de decisiones. El fomento de estas componentes en procesos educativos enfocados en docentes les facilitaría promover en sus estudiantes la comprensión de la relación entre las distintas ideas probabilísticas que dan significado a la distribución binomial, desde diversas perspectivas, y así, el uso de la distribución binomial como una herramienta en la modelación y entendimiento de fenómenos de la vida diaria y no como una serie de fórmulas a aplicar directamente en un solo tipo de problemas.

REFERENCIAS

Abreu, J. (2012). Hipótesis, método y diseño de investigación (hypothesis, method & research design). *Daena: International Journal of Good Conscience*, *7*(2), 187-197.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *RELIME*, *8*(3), 247-263.

Cazau, P. (2006*). Introducción a la investigación en ciencias sociales*. ACADEMIA

Cid, N., Retamal, L., y Alvarado, H. (marzo, 2017). *Un estudio inicial sobre conocimientos de probabilidad binomial en profesores de matemática* [Comunicación]. Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

Fernández, N., García-García, J., Arredondo, E. y Araya, I. (2022). Epistemic Configurations and Holistic Meaning of Binomial Distribution. *Mathematics*, *10*(10), 1748.

Gal, I. (2005). Towards "Probability Literacy" for all Citizens: Building Blocks and Instructional Dilemmas en G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Springer.

García-García, J. I., Fernández, N., Arredondo, E., y Imilpán, I. (2022). The Binomial Distribution: Historical Origin and Evolution of Its Problem Situations. *Mathematics*, *10*(15), 2680.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2020). El Enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena De Educación Matemática*, *12*(2), 47-59.

Mayén, S., y Salazar, A. (2014). *Niveles de razonamiento en la resolución de tareas de tipo binomial*. En Andrade, Luisa (Ed.), Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica (pp. 88-97). Bogotá: Asociación Colombiana de Educación Estocástica.

Pérez, K. (2016). *Razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a situaciones con distribución binomial* [Tesis de magister, Universidad Zacatenco]. Repositorio Institucional.

Pilcue, L. y Martínez, W. (2020). *Dificultades que presentan estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas con respecto a la distribución binomial* [Trabajo de grado, Universidad del Valle]. Repositorio Institucional.

Serrano, G. P. (1994). *Investigación cualitativa: retos e interrogantes*. La Muralla.

Toledo, Á. (2018). *Niveles de razonamiento frente a problemas binomiales.* En Lestón, P. (Ed.), Actas de la XII Conferencia Argentina de Educación Matemática (pp. 334-342). Buenos Aires.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en educación primaria. Un desafío para la formación inicial y continua del profesorado. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 85, 5-23.

FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES CON CURVAS EN COORDENADAS POLARES DESDE EL ANÁLISIS DIDÁCTICO

Heiller Gutiérrez Zuluaga, Eliécer Aldana Bermúdez

Universidad del Quindío

hgutierrez@uniquindio.edu.co, eliecerab@uniquindio.edu.co

El reporte de investigación que se presenta se enmarca en la línea de Educación Matemática y tiene como propósito aportar a la reflexión académica de algunos elementos acerca de cómo los profesores de matemáticas en formación de la Universidad del Quindío planean y organizan la enseñanza, específicamente en el uso de las coordenadas polares y sus aplicaciones en la representación y análisis de las curvas, para desarrollar una estrategia didáctica que permita mejorar los niveles de comprensión de dicho concepto. Se utilizará la teoría del análisis didáctico y se seguirá un estudio de tipo cualitativo, desde una perspectiva histórico-hermenéutica.

Análisis didáctico, Curvas en coordenadas polares, Profesores en formación.

INTRODUCCIÓN

La educación actual requiere de profesionales dispuestos a asumir la enseñanza de las Matemáticas y sus procesos de aprendizaje de una manera diferente, dado los retos que demandan las sociedades contemporáneas que han cambiado muchos paradigmas educativos y que puedan dar solución a cuestiones como la dificultad para entender esta disciplina, la necesidad e importancia dentro de los planes de estudio y su utilidad tanto en la cotidianidad como en disciplinas más específicas. El presente trabajo que se enmarca en la línea de investigación en Educación Matemática del Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad del Quindío y tiene como título "Análisis didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de curvas en coordenadas polares, de profesores en formación en contexto de universidad" el cual aporta a la reflexión académica de algunos elementos acerca de cómo los profesores de matemáticas en formación planean y organizan la enseñanza. Por ello, el objetivo de esta investigación es contribuir desde el análisis didáctico a la enseñanza y el aprendizaje de curvas en coordenadas polares, de profesores en formación en contexto de Universidad, un tema no muy trabajado en dicho contexto, en lo relacionado con el pensamiento espacial y geométrico en el cual poco se ha dado a conocer los significados que las coordenadas polares tienen en las acciones y en las actividades humanas. Es así como en este trabajo se busca identificar las dificultades que presentan los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas que cursan el espacio académico de Geometría analítica, específicamente en el uso de las coordenadas polares y sus aplicaciones en la representación y análisis de algunas curvas, para desarrollar una estrategia de enseñanza que permita mejorar los niveles de comprensión de dicho concepto.

La experiencia como docente de matemáticas y específicamente de los espacios académicos de Geometría Analítica me han permitido identificar diversas dificultades que presentan los estudiantes, posiblemente a la instrucción previa recibida, las cuales afectan el proceso de comprensión de las curvas en coordenadas polares: una de ellas es la carencia de articulación entre los registros algebraicos y geométricos. Así mismo, los estudiantes demuestran dificultad cuanto se ven enfrentados al uso de teoremas y definiciones rigurosas, buscan memorizar fórmulas y mecanizar

procedimientos sin analizar el concepto (Sosa, et al., 2014 y Gascón, 1997). Además, los estudiantes tienen concepciones erróneas de curvas en coordenadas polares, específicamente en las cónicas, como lo referencia Fernández (2011) "es que no asumen las secciones cónicas como lugares geométricos, no le dan sentido y significado" (p. 24). Al respecto Gaita y Ortega (2014) proponen "solucionar problemas de lugar geométrico estableciendo relaciones entre las unidades elementales en los marcos geométrico y algebraico" (p. 319). Lo anterior hace reflexionar acerca de la importancia de priorizar la noción de lugar geométrico en el aprendizaje de curvas en coordenadas polares. Las razones anteriores generan que a los estudiantes se les dificulta comprender la definición de curvas en coordenadas polares como lugares geométricos, igualmente cometen errores al vincular sus elementos desde la representación algebraica a la representación gráfica y viceversa, además presentan confusión al convertir una ecuación general a su respectiva ecuación canónica y viceversa, y en algunos casos no identifican estos objetos matemáticos al presentarles una ecuación de segundo grado.

De acuerdo con lo anterior y para abordar este problema, se utiliza la teoría del análisis didáctico (González y Gallardo 2006) que corresponde a un marco teórico y metodológico que busca dar un significado a los conceptos matemáticos y se utiliza para diseñar y planear la manera como el profesor organiza sus actividades en un periodo de tiempo con el propósito de realizar un proceso de enseñanza aprendizaje. Se fundamenta en cuatro fases: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación (Gómez, 2002). Con la implementación de estas fases en la investigación se dará respuesta a la pregunta: ¿Cómo el análisis didáctico contribuye a la enseñanza y el aprendizaje de curvas en coordenadas polares, de profesores en formación en contexto de Universidad?.

METODOLOGÍA

Para los propósitos de esta investigación se sigue un estudio de tipo cualitativo e interpretativo para comprender los fenómenos educativos que ocurren en un contexto, se trata de interpretar y explicar la forma como los estudiantes llegan a la comprensión y construcción conceptual, (Bisquerra, 2009). Está basada en una perspectiva histórico-hermenéutica, debido a que es un enfoque interpretativo en las Ciencias de la Educación que busca la comprensión global del fenómeno (Cifuentes, 2011). Se realiza un estudio de casos en la Universidad del Quindío, Facultad de Ciencias de la Educación, con un grupo de 20 profesores en formación, que cursan segundo semestre de programa de Licenciatura en Matemáticas. El proceso de investigación del estudio de casos se desarrollará mediante las cuatro fases de acuerdo con la propuesta de Gómez (2007): El análisis didáctico comienza con una revisión histórica y epistemológica de los conceptos centrales implicados en el tema de las curvas en coordenadas polares. Continúa con el análisis de contenido matemático escolar correspondiente, que se complementa con una síntesis que selecciona y organiza los conceptos y procedimientos relevantes que articulan el tema de curvas en coordenadas polares. Prosigue con un análisis cognitivo centrado en el aprendizaje de tales contenidos, que genera una síntesis sobre expectativas de aprendizaje establecidas, según dichos criterios y que sirve para organizar los aprendizajes. Avanza con el análisis de instrucción, que, a su vez, produce una nueva síntesis que se expresa en el diseño de las unidades didácticas. Finalmente, en el análisis de actuación se realiza la evaluación de la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos desarrollados en la etapa anterior, que da paso a una síntesis evaluadora del proceso.

A continuación, se presenta un resumen donde se articulan los objetivos específicos, las fases del análisis didáctico y las actividades a desarrollar en cada una de ellas:

Tabla 1.

Articulación de los objetivos, fases y actividades en la investigación.

Objetivos específicos	Fases del Análisis didáctico	Actividades
Describir de manera estructurada y sistemática los elementos que son fundantes del contenido matemático como un organizador del currículo que permita identificar los contextos de tipo social, institucional y educativo.	Fase 1: Análisis de Contenido	Identificar, organizar y clasificar los significados del concepto matemático en estudio, a partir de las dimensiones: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología
Determinar las dificultades y los errores que los estudiantes presentan antes de la instrucción y las capacidades y competencias que se espera que ellos desarrollen después de la instrucción, al realizar las tareas que componen la actividad.	Fase 2: Análisis Cognitivo	Establecer las habilidades y competencias que desarrollan los estudiantes para profesores haciendo una descripción del dominio de las nociones y conceptos al inicio y al final del proceso.
Fortalecer la articulación entre las curvas y su representación en coordenadas polares con la planeación, selección y seguimiento de las tareas, mediante el análisis de instrucción.	Fase 3: Análisis de instrucción	Diseño, análisis y selección de tareas que constituirán las actividades de enseñanza aprendizaje, teniendo en cuenta los análisis de contenido y cognitivo.
Validar el logro de los objetivos y caminos de aprendizaje, capacidades y competencias de los estudiantes, mediante el análisis de actuación.	Fase 4: Análisis de actuación	Determinar las capacidades que los estudiantes han desarrollado y las dificultades que se pueden haber manifestado.

REFLEXIÓN FINAL

La puesta en marcha de esta investigación advierte como posibles resultados, desde la planificación y organización de la enseñanza se formarán a los profesores dando lugar muy especial a la fenomenología de objetos matemáticos del conocimiento y en lo que tiene que ver con el aprendizaje que los estudiantes logren dar sentido y significado al objeto matemático estudiado, de tal manera que impacte posteriormente en su desempeño docente.

REFERENCIAS

Bisquerra, R., y Sabariego, M. (2009). El Proceso de Investigación (Parte 1). En R. Bisquerra (Coord.). *Metodología de la Investigación Educativa* (2ª ed.). (89-125). La Muralla.

Cifuentes-Gil, R. M., y María, R. (2011). *Diseño de proyectos de investigación cualitativa*. Noveduc libros.

Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando cabri geometre II plus* [Tesis de Maestría, Universidad del Valle, Colombia].

Gaita, C., y Ortega, T. (2014). Unidades elementales en problemas de lugar geométrico en los cuadros geométrico y algebraico. En D. Vera (Coordinador), *Simposio de investigación en educación matemática XVII* (pp. 317-326).

Gómez, P. (2002b). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-293.

Gómez, P. (2007a). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* [Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España].

González, J., y Gallardo, J. (2006). Análisis didáctico curricular: un procedimiento para fundamentar y completar el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de matemáticas. Didáctica de la Matemática. *Seminario "Análisis Didáctico". X Simposio de la SEIEM*. Granada, España.

Universidad de Málaga. España.

Sosa, L., Tuyub, I., y Aparicio, E. (2014). Diagnostico en estudiantes de nuevo ingreso a nivel superior: competencias y dificultades matemáticas. En C. Lara (Presidencia), *Acta latinoamericana de matemática educativa*.

Comunicaciones Breves

IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN EL ACOMPAÑAMIENTO ACADÉMICO DE PACE A ESTUDIANTES DE INGENIERÍA COMERCIAL

Claudio Espinoza-Fuentes, Diego Jiménez-Arriagada

Universidad Alberto Hurtado

claudioespinoza@uchile.cl, djimenezarriagada@gmail.com

En el contexto del programa de acceso inclusivo PACE UAH, se observa en el acompañamiento académico que en el estudio de la función cuadrática emergen dificultades frecuentes relacionadas con problemas de modelación e interpretación. Esta investigación en curso, de carácter cualitativo, tiene como objetivo evaluar la Idoneidad Didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje sobre dicho objeto matemático en el acompañamiento a estudiantes de Ingeniería Comercial, diseñado a partir de las necesidades individuales y de las características del proceso disciplinar que cursan. Esto, con el fin de identificar posibles mejoras para futuras implementaciones, y avanzar hacia un acompañamiento más efectivo.

Acompañamiento académico, Función cuadrática, Idoneidad didáctica, Inclusión.

INTRODUCCIÓN

El componente de Acompañamiento en la Educación Superior (AES) del Programa de Acceso a la Educación Superior de la Universidad Alberto Hurtado (PACE UAH) tiene por objetivo facilitar el progreso, permanencia y titulación de los estudiantes que ingresan a la universidad por medio del programa, mediante la implementación de dispositivos que respondan a sus necesidades académicas y psicoeducativas durante los dos primeros años de Educación Superior (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2022, p. 10-11). El acompañamiento académico se realiza principalmente mediante mentorías académicas, desarrolladas por docentes de diversas áreas disciplinares, y abordan la necesidad declarada por las y los estudiantes que las solicitan.

AES se implementa en la UAH desde 2017, y desde 2019 se comienza a desarrollar el plan de mentorías académicas, lo que ha permitido a las y los docentes observar el trabajo del estudiantado de manera individual. En 2022, a partir de la experiencia de observación y reflexión docente, en el área de matemática se instaura un modelo de trabajo de elaboración propia llamado *Microproceso*, que responde a la necesidad tanto de comprender las variables que influyen en el proceso que se realiza con las y los estudiantes, como de de configurar un modelo de acompañamiento disciplinar, con el fin de que este sea más efectivo, mejorando la persistencia estudiantil. Se comprende un microproceso como un proceso de enseñanza y aprendizaje que se desarrolla en un periodo de tiempo acotado, durante hasta tres semanas, en el que se busca responder a una necesidad sentida, aquella que motiva la adherencia, a la vez que se desarrolla la competencia matemática, entendida como la capacidad de "analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando se resuelven o enuncian problemas matemáticos en una variedad de situaciones y dominios" (Rico, 2007, pp. 49-51).

De esta forma, un microproceso se configura en una relación multidireccional entre i) las necesidades sentidas de los estudiantes y las observadas por los docentes, ii) el proceso disciplinar que cursan los estudiantes, el cual tiene ciertas regularidades por carrera por lo que emergen necesidades frecuentes,

y iii) un escenario, entendido como un conjunto de tareas y recursos, junto con las condiciones necesarias para su implementación, que los docentes diseñan. Es decir, la tarea del docente en el diseño e implementación de un microproceso implica atender a cada una de las tres variables y a la relación que existe entre ellas.

ANTECEDENTES

Acompañamiento académico

Tinto (2015), señala que la persistencia estudiantil, una manifestación de la motivación, está fuertemente relacionada con sus metas y su autoeficacia. Las y los estudiantes deben querer persistir y esforzarse para enfrentar los desafíos del proceso universitario, y está motivación se puede mejorar o disminuir a partir de las experiencias que tienen en la institución (Tinto, 2015, p. 2). En este sentido, advierte que la respuesta institucional para promover la persistencia debe considerar, entre otros, el monitoreo del rendimiento y proporcionar apoyo académico y social, sin lo cual es posible que las/los estudiantes pierdan la motivación para persistir y abandonen.

También afirma que los programas de acompañamiento, como los de mentorías, son más efectivos cuando están directamente conectados o contextualizados con los cursos en que los estudiantes están inscritos (Tinto, 2008, p.3-6). El acompañamiento académico es beneficioso en la medida en que insta al estudiantado a participar activamente en la búsqueda del aprendizaje, lo que mejora la motivación y el rendimiento académico, dado que surge la necesidad de desarrollar habilidades básicas porque les ayuda a aprender un tema en el que tienen interés. De esta forma, los estudiantes aprenden más, y se mejoran su autoeficacia consiguiendo que lleguen a creer que pueden aprender (Tinto, 2015, p.8-9). La relación entre un acompañamiento académico eficaz, la vinculación con el proceso disciplinar, y la mejora del rendimiento y la autoeficacia ha sido reportada por diversas investigaciones, en distintos contextos universitarios y países, incluyendo a Chile (Maldonado et al., 2009; Martinic, 2019).

Dificultades en el aprendizaje de las funciones

Las dificultades frecuentes en el aprendizaje de las funciones han sido ampliamente abarcadas por la investigación en Didáctica de la Matemática. Artigue (1995), sobre este objeto y con respecto a la iniciación en el estudio del cálculo, menciona que el trabajo con el uso de representaciones no coordinadas refuerza asociaciones del concepto con su expresión algebraica o con su representación gráfica, en vez de construir la noción en relación con la definición. Posteriormente, Artigue (1998) añade que el trabajo con prototipos promueve la construcción de una definición y una imagen del concepto disociadas, que lleva al estudiantado a considerar un objeto como función o no, dependiendo de su representación.

Por otra parte, el status operacional de las funciones, es decir, que se comprenden como un proceso que se realiza a una pre-imagen para conocer su imagen, se constituye como un conocimiento que se resiste a las cuestiones que plantea el campo del cálculo, en el que las funciones son objetos sujetos de otros procesos. Con respecto al obstáculo de la función como proceso-objeto, Neira (2020) añade que uno de los rasgos que caracterizan el pensamiento variacional es el estudio del comportamiento de las funciones, y que para que las y los estudiantes logren desarrollar esta forma de pensamiento

"es necesario que superen la idea de función como correspondencia entre dos valores, y que comiencen a visualizar una situación cambiante" (p. 50).

Sobre lo que sucede en el contexto chileno, Pino-Fan et al. (2019), mencionan que "el estudio de las funciones es tratado, en general, desde un punto de vista estrictamente formal, lo que genera obstáculos y dificultades en la comprensión de los conceptos y procesos matemáticos" (p. 202). Este tratamiento puramente algebraico refuerza la asociación entre el concepto de función con su representación algebraica, "función como fórmula", limitando el significado que el estudiantado le atribuye al concepto y dejando de lado la reflexión sobre las prácticas que le dan sentido e importancia, como lo que Artigue (1998) llama "economía del pensamiento funcional" (p. 5).

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En el contexto del acompañamiento académico realizado por el programa PACE UAH, en el área de matemática, se advierte que aún cuando en sesiones de mentoría se evidencia aprendizaje, el conocimiento construido por las y los estudiantes es en ocasiones insuficiente para enfrentar las exigencias de sus cursos de matemática. En el caso particular del estudiantado de la carrera de Ingeniería Comercial, se observan frecuentemente dificultades en el aprendizaje de las funciones, y más aún en el caso de la función cuadrática. Generalmente, el uso de fórmulas se logra de manera satisfactoria, pero no sucede de igual forma al resolver situaciones de modelación y al realizar interpretaciones en contextos de la economía, de la propia matemática, y otros. El desarrollo de estas habilidades, junto con el conocimiento matemático asociado, es imprescindible para el progreso académico, puesto que son necesarias para profundizar posteriormente en el estudio del cálculo, y porque en otros cursos relacionados con su disciplina se analizan fenómenos que se modelan mediante funciones.

Para abordar de mejor manera las necesidades de las y los estudiantes en relación con los requerimientos institucionales, es relevante indagar en las variables que inciden en cómo se configura el acompañamiento académico, a saber, el proceso disciplinar, las necesidades del estudiantado, y los escenarios con los que se promueve el aprendizaje. De esta forma, se plantea como pregunta de investigación, ¿qué características tiene un escenario que permite la construcción de conocimiento sobre la función cuadrática atendiendo a las necesidades de las y los estudiantes y a las particularidades de su proceso disciplinar?

ENFOQUE TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Esta investigación se sustenta teóricamente desde el constructo Idoneidad Didáctica, del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y de la instrucción matemática (Godino et al., 2007, 2020). Se trata de una herramienta de análisis de procesos de estudio puntuales o globales, que funciona como un criterio sistémico de adecuación y pertinencia respecto de un proyecto educativo, que se define como:

> El grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). (Godino et al., 2020, p. 55)

El EOS propone una serie de principios provisionales, los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID), consensuados por la comunidad científica interesada en la educación matemática, útiles a priori para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje, y a posteriori para evaluar sus implementaciones. El constructo Idoneidad Didáctica es multidimensional, se descompone en seis idoneidades parciales: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica. Un proceso de enseñanza y aprendizaje se considera idóneo cuando se consigue un equilibrio entre los diferentes criterios de idoneidad parcial.

Esta investigación es de naturaleza cualitativa, y se lleva a cabo tomando elementos de la ingeniería didáctica, enfoque metodológico propicio para el marco del EOS (Godino et al., 2014). Se siguen las recomendaciones y orientaciones entregadas por los autores del EOS para uso de los CID, es decir, durante las cuatro fases de la investigación se tienen en cuenta los CID para orientar el ajuste y pertinencia del diseño de acuerdo al contexto educativo.

A partir del constructo Idoneidad Didáctica se orienta el diseño, implementación y evaluación del microproceso. Particularmente, las seis facetas antes mencionadas, se relacionan estrechamente con las variables del modelo *Microproceso*: i) la caracterización del proceso disciplinar se ve orientado a partir de la idoneidad epistémica y ecológica; ii) las necesidades sentidas y observadas se relacionan con la idoneidad emocional y cognitiva, y iii) el escenario, además de considerar las dos variables anteriores, debe cumplir con la idoneidad interaccional y mediacional.

En la primera fase de la investigación se realiza un análisis preliminar de las tres variables del modelo *Microproceso*, a partir de las seis facetas de la Idoneidad Didáctica, de acuerdo a la relación antes descrita. En la segunda fase se realiza el diseño y análisis *a priori* del escenario, y luego en la tercera fase se lleva a cabo la implementación y recogida de evidencias de aprendizaje con el grupo de 8 estudiantes que actualmente cursan Matemática I del programa de Ingeniería comercial, y que son acompañados por el programa. Finalmente, en la cuarta fase se realiza el análisis *a posteriori* de la implementación, para reflexionar sobre las características del escenario propuesto e identificar posibilidades de mejora.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Dado que la investigación está en la fase de análisis *a priori*, *ad portas* de la implementación, aún no es posible concluir sobre la Idoneidad Didáctica del diseño. Sin embargo, durante el proceso se ha podido apreciar que tanto el modelo *Microproceso* como los CID, y la relación que se propone entre estos, constituyen herramientas que favorecen la comprensión por parte de los docentes del fenómeno didáctico que se busca abordar y de las dimensiones de la enseñanza que se deben considerar en el acompañamiento académico. Esto permite conjeturar sobre una mejora en la pertinencia del escenario diseñado y, como consecuencia, en la efectividad del proceso de acompañamiento académico, a la vez que se confirma la dificultad que representa para el equipo docente de PACE trabajar en desconexión con las cátedras del estudiantado, lo que añade incertidumbre en relación con los horizontes de aprendizaje, impactando particularmente en las facetas ecológica y epistémica. Se espera con esta investigación establecer una metodología para el trabajo docente del equipo de matemática, junto con exponer la necesidad de institucionalización del acompañamiento.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 40-55. https://bit.ly/3ASwHqG

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., y Wilhelmi, M. (2014). Ingeniería Didáctica basada en el Enfoque Ontológico-Semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2-3), 167-200.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2020). El Enfoque Ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la Didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(2), 47-59. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25

Maldonado, L., Serrano, E., Macías, D., Bernal, R., Rodríguez, G., y Vargas, E. (2009). El Acompañamiento Como Estrategia Pedagógica En El Aprendizaje Exitoso De Las Matemáticas. *Entre Ciencia e Ingeniería, 3*(6), 33-59. http://funes.uniandes.edu.co/12190/

Martinic, R. (2019). ¿Qué hay tras la permanencia universitaria? Los cambios más significativos en el acompañamiento académico. *Educaçao e Pesquisa, 45*, 1-20. http://dx.doi.org/10.1590/S1678-4634201945190724

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2022). *Términos de referencia 2022 Programa PACE*. Autor.

Neira, G. (2020). *Dificultades en las prácticas del Cálculo Diferencial: una mirada desde la teoría de los obstáculos y los conflictos semióticos* [Tesis de doctorado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia].

Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y., y Castro-Gordillo, W. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 11*(23), 201-220. doi: 10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Tinto, V. (1 de noviembre, 2008). *Access without Support is Not Opportunity* [ponencia]. Annual Institute for Chief Academic Officers, The Council of Independent Colleges, Seattle, Washington. https://doi.org/10.3200/CHNG.40.1.46-50

Tinto, V. (2015). Through the Eyes of Students. *Journal of College Student Retention: Research, Theory & Practice, 19*(3), 1-16. https://doi.org/10.1177/1521025115621917

CONSTRUCCIONES MENTALES ASOCIADAS AL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES. UN ANALISIS DESDE LA TEORÍA APOE: EL CASO DE UN ESTUDIANTE CON TRASTORNO DE ASPECTRO AUTISTA

Thiare Antivil Soto, Paulo Galleguillos Catalán

Universidad Central de Chile

thiare.antivil@alumnos.ucentral.cl, paulo.galleguillos@alumnos.ucentral.cl

La presente investigación tiene como objetivo analizar los mecanismos mentales que muestra un estudiante con Trastorno de Espectro Autista (TEA), en particular, cuando él interioriza desde la acción al proceso en situaciones problemáticas en el eje de álgebra y funciones. Basados en la teoría APOE, (1) se realizará una Descomposición Genética (DG) que muestre los mecanismos mentales que tiene un estudiante cuando construye cognitivamente el objeto de función, luego, (2) realizar un cuestionario que permitirá validar la DG hipotética. Por último, (3) se analizan las respuestas del informante para validar o refinar la propuesta de DG construida.

Espectro autista, Descomposición genética, APOE, Álgebra y funciones.

JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Al interior de las necesidades educativas especiales, del tipo permanente, se encuentra el Trastorno Espectro Autista (TEA). Ella, corresponde a un trastorno del desarrollo en las competencias cualitativas como la comunicación, interacción social y flexibilidad cognitiva (MINEDUC, 2010).

Según el estudio del MINEDUC (2010), el estudiante que es diagnosticado con TEA presenta tres cualidades significativas. En primer lugar, en el ámbito de comunicación se señala que "algunos niños/as muestran retraso y alteración en la adquisición del lenguaje (respuestas verbales singulares, fuera de contexto), por lo que necesitan apoyo fonoaudiológico para apoyar los elementos del lenguaje desde un enfoque comunicativo" (p.82). Por otro lado, el segundo ámbito que es característico de un estudiante con TEA, es la forma de interactuar con otros, es decir, un estudiante con este trastorno puede "presentar desde un aislamiento completo, en el que la persona se queda dentro de su mundo, indiferente a las personas, presenta dificultades en la interacción social por problemas para comprender sutilezas sociales y por no poder decodificar las reglas sociales implícitas." (p.17). Por último, en el ámbito cognitivo "son significativos los déficits de la flexibilidad cognitiva, las funciones ejecutivas, el juicio y el sentido común" (p.20).

Las características mencionadas en párrafos anteriores son una motivación inicial para analizar las construcciones y mecanismos mentales que muestra un estudiante con TEA. Lo haremos a través del marco teórico APOE, en el cual, nos enfocaremos en el mecanismo de interiorización debido a que este es un mecanismo que permite mostrar cómo el estudiante informante es capaz de pasar de un estímulo externo a otro que le permita generalizar en torno al planteamiento de una función.

Justificación del problema desde el ámbito Educativo

Durante el proceso de aprendizaje de las matemáticas, según Sambade (2017) "Estos niños presentan una muy baja generalización de los aprendizajes, selectividad atencional, resistencia a actividades nuevas o cambiantes y una falta de consistencia en las reacciones a la estimulación, lo que dificulta que con las técnicas habituales de enseñanza se puedan ver beneficiados" (p.1).

Esto nos muestra que, un estudiante con TEA, necesita de situaciones problemáticas nuevas que permitan interiorizar conceptos matemáticos de forma no tradicional, de tal manera que podamos observar su comportamiento cognitivo al enfrentarse a ello. Por esta razón, el foco de esta

comunicación breve está en identificar, desde una perspectiva cognitiva, cómo el estudiante con TEA responde a ello y muestra un aprendizaje significativo.

Por otro lado, Sambade (2017), nos alerta de posibles dificultades que podemos tener cuando llevamos a cabo un proceso de enseñanza y aprendizaje con un estudiante que tiene este tipo de trastornos cognitivos. En este sentido, la Tabla 1 reporta dificultades significativas de los estudiantes con este tipo de características, siendo estas clasificadas por su área de desarrollo.

Tabla 1.

Dificultades significativas de los participantes, clasificadas por áreas de desarrollo.

Área de desarrollo	Necesidades encontradas
A nivel académico	- Problemas de comprensión verbal - *Problemas de generalización de los aprendizajes* - Problemas de flexibilización en los aprendizajes que implican dificultades para aceptar cambios en los patrones previamente aprendidos - Problema para relacionar los conceptos numéricos con sus cantidades - Problemas para identificar aquel aspecto por el que se le está preguntando - Problemas para extraer información relevante y desestimar aquella que no lo es en cada momento

Fuente: Tomado de Sambade, Fraga y López (2017, p.2).

De acuerdo con la tabla anterior, unas de las dificultades más importantes para esta investigación es el problema de ***generalizar los aprendizajes***, pero ¿qué es esto?

Para nosotros, la generalización tiene características que observamos desde dos perspectivas. La primera, corresponde a lo propuesto por Amy (2007), donde menciona que, ***generalizar aprendizajes*** consiste en un proceso donde los estudiantes identifican puntos en común entre los casos, extendiendo su razonamiento, y derivando amplios resultados de cosas particulares, logrando que el estudiante genere similitudes entre los problemas, situaciones o contextos.

Por otro lado, la generalización en vista de los conductual se divide en dos partes. La primera es la que se refiere a estímulos externos, según González (2018) es cuando el estudiante al enfrentarse a una situación, este genera nuevos estímulos las cuales pasa a tener un dominio sobre la conducta enseñada, debido a que estos son similares a los estímulos utilizados en etapa del entrenamiento. La segunda es la generalización de respuesta y está se presenta cuando el estudiante a entrenado un estímulo repetitivamente en una situación, la cual conlleva como resultado en poder asociar distintas situaciones en base al recuerdo del estímulo.

Bajo esta premisa y mediante una propuesta didáctica, está investigación pretende analizar el cómo comprende un estudiante con TEA un contenido, específicamente, el objeto de función en el eje de álgebra y funciones. Nuestra investigación pondrá a prueba un modelo hipotético de construcción del objeto de función, en donde interactúan mecanismos y construcciones mentales, que muestran la comprensión del objeto. Se puede notar que este es un contraste directamente con la flexibilidad

cognitiva, ya que se busca encontrar generalidades que aporten al desarrollo del sentido común y juicio ante situaciones.

Por lo tanto, los objetivos específicos se conformarán en tres objetivos que serán esenciales para la investigación. En primer lugar, se realizará una DG que muestre los mecanismos y construcciones mentales que un estudiante tiene cuando construye cognitivamente la función. En segundo lugar, se elaborará y diseñará un instrumento que muestre el cómo comprende la noción de funciones. Finalmente, con los datos que nos entregará el instrumento podremos analizar estas respuestas desde el marco teórico APOE y refinaremos la DG construida para entregar una propuesta de cómo un estudiante con TEA construye el objeto de función.

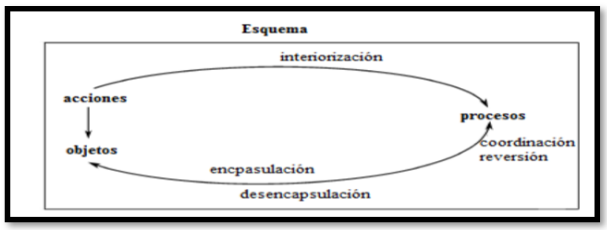
Por lo tanto, la pregunta que guía nuestro trabajo es ¿Cuáles son los construcciones y mecanismos mentales que muestra un estudiante con TEA cuando construye la noción de función?

MARCO TEÓRICO

La teoría APOE (Dubinsky,1991), acrónimo de *Acción-Proceso-Objeto-Esquema*, es un modelo que describe desde una perspectiva cognitiva cómo un estudiante aprende un concepto matemático, describiendo cómo estos son construidos mentalmente (Arnon et al. 2014), a través de mecanismos mentales como la *interiorización, la encapsulación, desencapsulación, coordinación y reversión*, que permiten que las estructuras mentales evolucionen según el nivel de construcción del individuo (Oktac. 2019).

Figura 1.

Construcciones y mecanismos mentales de la teoría APOE



Fuente: Tomado de Arnon, et al. (2014, p. 18).

En la Figura 1 podemos observar la interacción de las estructuras mentales, estos elementos son fundamentales para la teoría APOE, debido a que guiarán la construcción de un modelo multi interpretativo de descripción, sobre cómo los estudiantes que son parte del TEA aprenden un objeto matemático.

Arnon (2014) nos define los mecanismos mentales como:

- **Acción:** Si un estímulo externo, en donde la transformación del objeto estará guiada de forma explícita por instrucciones externas. Esta estructura se puede ejemplificar en actividades en la enseñanza de funciones, como cuando se les pide a los estudiantes pasar desde una tabla de valores a un gráfico para poder visualizar la función.
- **Procesos:** Este aspecto se logrará si el estudiante le puede dar un significado a las operaciones que él realiza, justificando de manera concreta el "¿Por qué?" está haciendo esos procedimientos y deja de depender de instrucciones externas. Esta se puede evidenciar cuando el estudiante es capaz de colocar los valores para "$f(x)$" para cada valor de "x" en una tabla, a través de una función dada, de forma que el estudiante al enfrentarse a una función sepa cómo responder a este ejercicio.

- **Objeto:** Es la reflexión del estudiante sobre acciones aplicadas a un evento concreto, este comprendiendo el proceso como una totalidad, y que este puede interactuar sobre él y es capaz de construir el proceso.
- **Esquema:** El esquema es la agrupación coherente de conocimientos asociados a un concepto que presenta el estudiante. Aquí el estudiante utilizará todos los elementos: la acción, el proceso y el objeto.

Los mecanismos mentales utilizados para realizar las construcciones mentales se denominan mecanismos, cada uno con una característica diferente. Nosotros nos basaremos en la interiorización que según la autora Aldana (2011) lo define como "la construcción mental de un proceso que interactúan sobre un objeto cognitivo"(p.74).

Basado en lo anterior, este marco teórico permite la descripción de los estados de construcción mental necesarios para que los estudiantes aprendan conceptos matemáticos. La enseñanza de la noción de función despierta un gran interés a la hora de comprender cómo un alumno con TEA aborda estas situaciones, considerando sus capacidades neuronales distintas, por lo que, el adaptar la naturaleza de la matemática a sus habilidades es precisamente la perspectiva de la investigación.

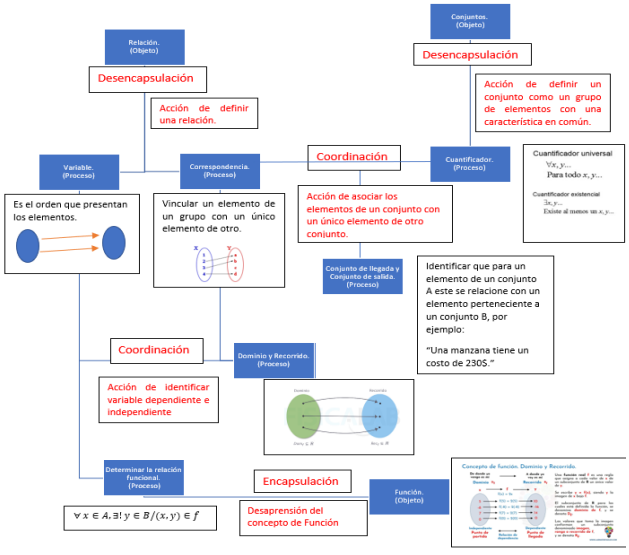
MARCO METODOLÓGICO

Esta investigación es de carácter cualitativo y será potenciado con un estudio de caso, en donde se pretende analizar en detalle las respuestas de una estudiante de cuarto año de psicología con T.E.A tardío leve.

La cual se llevará a cabo mediante el ciclo metodológico propuesto por APOE, con la cual se focalizará en los mecanismos mentales de Acción y Proceso, para poder estudiar la interiorización que presenta un estudiante. Este ciclo está formado por 3 componentes en donde en su primera etapa se encuentra en la creación de la DG en base al origen epistemológico de la noción función, describiendo las construcciones y mecanismos mentales que realice un estudiante sin una NEE cuando construye cognitivamente el objeto de función.

Figura 2.

Origen epistemológico de la noción de función.

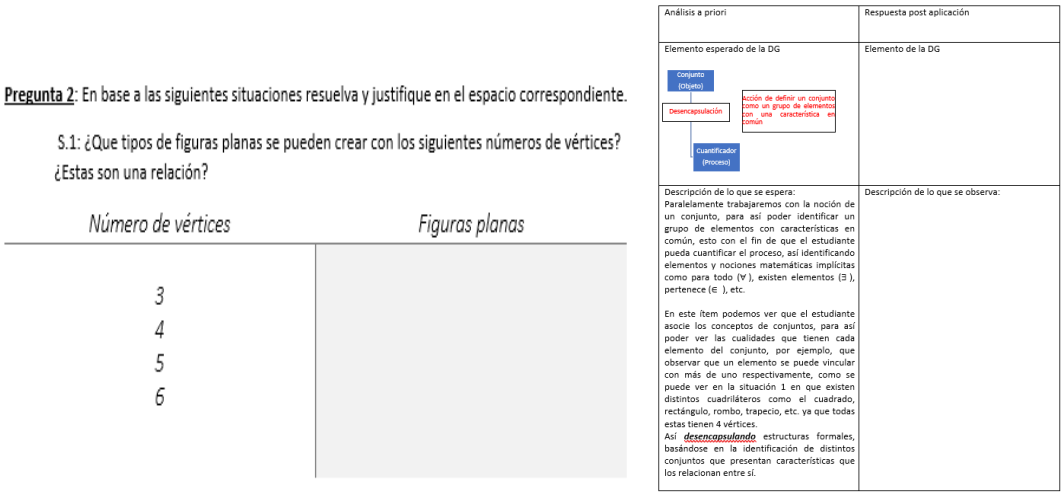


Fuente: Elaboración de autores.

En la segunda etapa se aplicará un cuestionario, la cual cada ítem tendrá como objetivo un nivel de la DG, describiendo detalladamente las construcciones mentales que de lo que se espera que el estudiante realice.

Figura 3.

Ejemplo de pregunta del cuestionario



Fuente: Elaboración de autores.

Para finalizar con la tercera etapa, con los datos obtenidos a través de la implementación del cuestionario se analizarán los mecanismos y construcciones mentales observadas durante el proceso, obtenido conclusiones las cuales nos ayuden interpretar cómo construye estos procesos un estudiante con TEA, para así poder refinar la DG que crea el estudiante.

REFERENCIAS

Aldana, E. (2011). *Comprensión del Concepto de Integral Definida en el Marco de la Teoría.* [Tesis de Doctorado, Universidad de Salamanca, España].

Amy B. Ellis (2007) A Taxonomy for Categorizing Generalizations: Generalizing Actions and Reflection Generalizations, *Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221-262.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014) *APOS. Theory A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* Springer.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D.Tall, *Advanced mathematical thinking*. Kluwer.

González, A. (2018). *Aprendizaje y Generalización de concepto en una niña con TEA.* [Tesis de Maestría, Universidad de la Laguna, España].

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2010) *Manual de Apoyo a Docentes: Educación de Estudiantes que presenta Trastorno del Espectro Autista*. Autor.

Sambade, L., Fraga González, B., y López, B. (2017). Aprendizaje Lógico-Matemático en TEA y Problemas de Atención. *Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación*, (11), 184-187. https://doi.org/10.17979/reipe.2017.0.11.2754

LA IMPORTANCIA DE LA REFLEXIÓN DEL PROFESOR SOBRE LAS NORMAS QUE REGULAN LA GESTIÓN DE SUS CLASES

Cristina N. Peña Soto, Guadalupe Morales Ramírez, Luis R. Pino-Fan

Universidad de Los Lagos

cristinanps98@gmail.com, guadalupe.morales@ulagos.cl, luis.pino@ulagos.cl

En este comunicado breve se plantea una discusión respecto de la importancia de la reflexión del profesor sobre las normas que implementa en sus clases de matemáticas y cómo estás pueden impactar en el aprendizaje de los estudiantes al gestionar su propio sistema normativo como elemento clave en la mejora del proceso educativo. Para la discusión se recurre a un ejemplo concreto extraído de una investigación, donde se reflexiona acerca de aquellas normas que se instauran en clases y se discute sobre como concientizar al profesorado del conjunto de normas que realiza a lo largo de sus prácticas de aula a la hora de enseñar matemáticas.

Sistema de normas, Competencia reflexiva, Reflexión del profesor, Enfoque ontosemiótico.

INTRODUCCIÓN

Las competencias del profesor han sido ampliamente estudiadas y entendidas como conocer y ser capaz de desarrollar prácticas matemáticas y didácticas necesarias para resolver los tipos de problemas. Dentro de la amplia gama de competencias que debe tener el profesor de matemáticas, una de las que tiene mayor énfasis, en el ámbito de la investigación, es la competencia reflexiva en torno a la práctica pedagógica, concibiéndose como una competencia clave para la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje (Perrenoud 2004; Breda et. al 2015; Shoenfeld y Kilpatrick, 2008).

Sin embargo, para comprender lo que ocurre en el aula y reflexionar sobre aquellos aspectos que intervienen en el proceso de instrucción, es necesario entender que la educación es una actividad social, y como toda actividad social, está regulada y condicionada por normas, costumbres, hábitos, leyes, entre otras. Las normas se pueden encontrar en el aula de manera explícita o implícita, pero necesitan ser reconocidas para orientarlas hacia niveles idóneos (Godino et al., 2009).

Cuando se hace referencia a las normas, se espera que estas permitan que los estudiantes sean capaces de explicar, justificar, argumentar y debatir sobre las justificaciones de sus demás compañeros y éstas pueden ser de carácter social o más específicas del aula de matemáticas: normas sociomatemáticas (Godino et al., 2009; D'Amore et al., 2007; Civil y Planas, 2004; Molina, 2019).

El objetivo de este trabajo es presentar una discusión sobre la importancia de la reflexión del profesor sobre el sistema de normas que regulan y condicionan la gestión de sus clases de matemáticas, como un mecanismo para la mejora de su práctica pedagógica, concretamente para la gestión de sus clases.

MARCO TEÓRICO

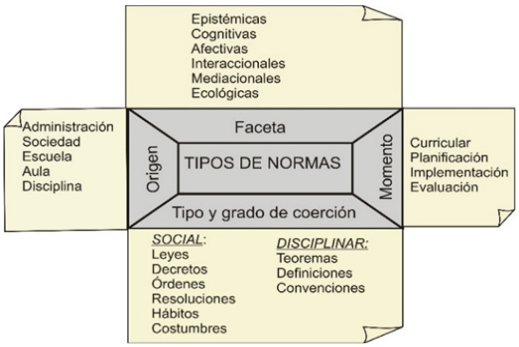
En este trabajo se discute y reflexiona sobre la práctica reflexiva a partir de la mirada de la dimensión normativa propuesta por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino et al., 2007). En el EOS se conoce a la dimensión normativa como una herramienta teórica-metodológica que busca especificar las reglas del juego en el marco de una interacción, considerando que no todas las normas son de la misma naturaleza. Por ejemplo, las normas que

regulan el proceso de estudio matemático se pueden categorizar desde el punto de vista institucional (según su origen): normas que vienen dadas por la administración educativa, la sociedad, la escuela misma, la disciplina del aula; o también según en el momento en el que surge: la gestión curricular, la planificación, implementación y evaluación (Font y Rubio, 2014; Godino et al., 2009).

En este comunicado se hará principal énfasis en aquellas normas según la faceta interviniente en el proceso de estudio. La Figura 1 muestra la clasificación de normas que propone el EOS para comprender y estudiar detalladamente el sistema de normas que regulan y condicionan la gestión de clases.

Figura 1.

Clasificación del sistema normativo según el EOS.



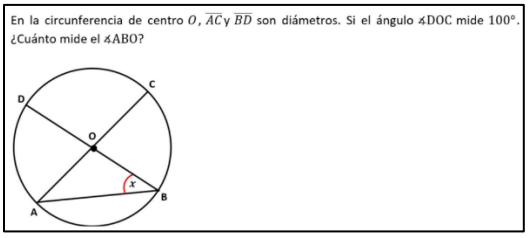
DISCUSIÓN SOBRE LA IMPORTANCIA DE LA REFLEXIÓN DEL PROFESOR

En la gestión de clases, es fundamental reflexionar sobre aquellas normas que se instauran durante el proceso de instrucción; cuando el profesor es consciente sobre el sistema normativo es posible que pueda optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje, regulando el contenido disciplinar, las interacciones, los recursos y medios disponibles para la negociación de significados en los estudiantes.

A continuación, presentamos un ejemplo de norma instaurada por el profesor en la resolución de un problema geométrico, extraído de Peña et al. (2021), en el estudio del tema de segmentos y ángulos en la circunferencia tratado en un curso de 3° medio en modalidad de clases virtuales. El problema consistió en la identificación de ángulos entre segmentos de la circunferencia (Figura 2), el cual motivó una dinámica de interacción entre el profesor y los estudiantes de donde emergieron algunas normas.

Figura 2.

Problema sobre la identificación de ángulos.



Fuente: Extraído de Peña et al. (2021)

Dado que el problema implicaba el proceso de visualización, el uso de propiedades sobre ángulos (ángulo extendido, sectores circulares y ángulo inscrito) y procedimientos que le permitieran a los estudiantes responder a la pregunta del problema, ellos recurrieron al profesor para que les indique cuál es el procedimiento que debían llevar a cabo, sin antes haber reflexionado sobre los elementos geométricos que se ponen en juego en el problema. De manera inmediata, el profesor realiza un problema análogo a modo de ejemplo, para presentar un procedimiento similar al que debían aplicar. Al final de su explicación, el profesor hace énfasis en "visualizar" los ángulos presentados, dando lugar a la interpretación de que el proceso de visualización es solamente la acción de "ver" y no un proceso que debe ser desarrollado para plantear conjeturas o deducir información. De aquí la norma que emerge es la siguiente:

> ***Norma emergente: El estudiante tiene la responsabilidad de realizar procesos matemáticos como visualizar e interpretar representaciones, cuando realiza una tarea.***

La norma anterior hace referencia a que el alumno debe asumir toda responsabilidad de su aprendizaje; sin embargo, el profesor no motiva y no cuestiona con la intención de generar un conocimiento, esto implica que el profesor no desarrolle el conjunto de normas que regulan el aprendizaje del estudiante, porque la práctica que realiza el profesor de mostrar un ejemplo análogo, lo realiza con la intención de que el estudiante reproduzca el procedimiento de manera mecánica.

Lo anterior motiva a reflexionar sobre aquellas normas que el profesor pone en juego de manera inconsciente y que tienen una implicación en el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, las normas interaccionales son clave para la gestión del aprendizaje del estudiante y dado que la clase fue virtual, el profesor no consideró las intervenciones que hicieron los estudiantes para manifestar sus dudas, aunque estas fueran solo para solicitar el procedimiento. En este sentido, es relevante establecer normas que regulen la interacción, en este caso se debió cuestionar a los estudiantes para que ellos recurrieran al proceso de visualización y pudieran interpretar y comprender lo que solicitaba el problema.

El reconocimiento del efecto de las normas interaccionales conllevan a concientizar al profesor sobre el sistema normativo que debe implementar con sus estudiantes, entre estudiantes para la negociación de significados y con los recursos mediacionales, ya sea, regulando los tiempos de participación de cada estudiante, organizando trabajos de grupo a través de la plataforma educativa, haciendo uso efectivo de software educativo para la enseñanza de las matemáticas, gestionando el contenido disciplinar, entre otros.

REFLEXIONES FINALES

En el proceso de instrucción, el sistema normativo está presente de manera implícita o explícita; es decir, diversas normas (epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, afectiva y ecológica) que regulan la gestión de los aprendizajes, son instauradas implícita o explícitamente por el profesor. Aquí resaltamos la norma interaccional como fundamental para establecer comunicación entre el profesor y estudiantes con el fin de modificar el funcionamiento del saber sobre lo que deben de aprender los estudiantes (Pino-Fan et al., 2015). En el caso del ejemplo presentado, el uso de material informático considerando el contexto (pandemia COVID-19) fue un aspecto importante para la comunicación y

para el aprendizaje, lo que permitió reflexionar sobre las posibilidades y desafíos que conlleva el uso de los recursos didácticos, también acerca de cómo se gestionan los recursos para una comunicación efectiva, lo cual es clave en esta modalidad de clases. Así, una gestión idónea de los recursos permitiría, por ejemplo, una interacción estudiante-recurso enriquecida en el proceso.

La reflexión del profesor sobre las normas que regulan y condicionan los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, se prevé como un mecanismo para la mejora de la gestión de sus clases, al concientizarlas y regular su uso de acuerdo a las necesidades que surjan durante la gestión de los aprendizajes. Por tanto, queda abierta como línea de investigación la creación de espacios que permitan desarrollar habilidades y competencias en el profesorado para la reflexión sobre las normas.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido desarrollada en el marco del Proyecto de Investigación Fondecyt 1200005, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

Agradecimientos a ANID-Subdirección de Capital Humano/Magíster Nacional/2022 – 22220434, por el financiamiento otorgado al primer autor.

REFERENCIAS

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques.* Kluwer.

Civil, M. y Planas, N. (2004). Participation in the mathematics classroom: does every student have a voice?. *For the Learning of Mathematics, 24*(1), 7-13.

D'Amore, B., Font, V., y Godino, J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, *28*(2), 49-77.

Godino, J.D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39*(1-2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M., y De Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 59-76.

Molina, O. (2019). *Sistemas de normas que influyen en el proceso de argumentación: un curso de geometría del espacio como escenario de investigación* [Tesis Doctoral, Universidad de Los Lagos, Chile].

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Autor.

Peña, C., Pino-Fan, L., y Assis, A. (2021). Norms that regulate the management of virtual mathematics classes in the COVID-19 context. *Uniciencia*, *35*(2), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.21

Perrenoud, P. (2004). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar: profesionalización y razón pedagógica*. Graó.

Pino-Fan, L., Assis, A., y Godino, J. D. (2015). Análisis del proceso de acoplamiento entre las facetas epistémica y cognitiva del conocimiento matemático en el contexto de una tarea exploratorio-investigativa sobre patrones. *Educación Matemática, 27*(1), 37-64.

PENSAMIENTO FUNCIONAL EN ESTUDIANTES COMO APROXIMACIÓN AL PENSAMIENTO ALGEBRAICO. UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES DE 5º BÁSICO CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES (NEE)

Sergio Montiel Contreras, Elizabeth Hernández Arredondo

Universidad de Los Lagos

sergio.montiel@ulagos.cl, elizabeth.hernandez@ulagos.cl

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, sugiere que los estudiantes con Necesidades Educativas Especiales (NEE) logran mejores aprendizajes cuando trabajan a la par de otros niños, que no presentan NEE. En esta línea, en Chile, el programa de integración escolar (PIE) pretende contribuir al mejoramiento continuo de la calidad de la educación, favoreciendo los aprendizajes en la sala de clases y la participación de todos y cada uno de los estudiantes, especialmente de aquellos que presentan Necesidades Educativas Especiales (NEE). Bajo esta premisa, los profesores de matemáticas, en conjunto con los educadores diferenciales, han de trabajar colaborativamente y entregar a todos sus estudiantes las mismas oportunidades de aprendizaje, siempre considerando las características propias de cada uno de ellos. Bajo este contexto, presentamos una actividad desarrollada en una escuela rural de la comuna de Purranque, con estudiantes de 5° básico, con el objetivo de observar elementos claves del desarrollo del pensamiento funcional y los niveles de generalización que presentan los estudiantes, con especial foco en las respuestas de aquellos estudiantes que presentan NEE. Los resultados muestran que, en general, los estudiantes con NEE logran reconocer la relación de correspondencia entre las variables que plantea la situación. Sin embargo, muestran dificultades para generalizar estas relaciones. Por lo que es posible, por medio de actividades como esta, potenciar el desarrollo del pensamiento funcional de los estudiantes, aproximándolos al pensamiento algebraico.

Pensamiento funcional, Pensamiento algebraico, Necesidades Educativas Especiales.

ALUMNOS CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, sugiere que los estudiantes con Necesidades Educativas Especiales (NEE) logran mejores aprendizajes cuando trabajan a la par de otros niños, que no presentan NEE (UNESCO, 1994). En esta línea, en Chile, la ley 20422 deja de manifiesto una normativa que garantiza la igualdad de oportunidades e inclusión social de personas con discapacidad. Bajo esta normativa, en el ámbito educativo, el programa de integración escolar (PIE) pretende contribuir al mejoramiento continuo de la calidad de la educación, favoreciendo los aprendizajes en la sala de clases y la participación de todos y cada uno de los estudiantes, especialmente de aquellos que presentan Necesidades Educativas Especiales (NEE), ya sean permanentes (NEP) o transitorias (NET). Bajo esta premisa, los profesores de matemáticas, en conjunto con los educadores diferenciales, han de trabajar colaborativamente y entregar a todos sus estudiantes las mismas oportunidades de aprendizaje, siempre considerando las características propias de cada uno de ellos.

Cabe precisar que cuando hablamos de alumnos con NEE nos referimos a aquellos que, a lo largo de su proceso formativo, reciben una respuesta educativa diferente a la de los/las alumnos que no las presentan y requieren de determinados apoyos y prestaciones educativas. Una de las disciplinas matemáticas que más dificultades presenta en los estudiantes es el desarrollo del pensamiento algebraico, no importando si los niños y las niñas tienen NEE.

PENSAMIENTO FUNCIONAL, FUNCIONES Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

El pensamiento algebraico es un proceso cognitivo que permite a los estudiantes establecer y construir relaciones matemáticas generales, que pueden ser expresadas de diferentes formas y van evolucionando con el tiempo (Soares et al., 2006). Aceptando esta definición, la idea de evolución en el tiempo, invita a proponer a los estudiantes actividades que permitan transitar hacia la generalización de dichas relaciones, lo que involucra un grado de abstracción importante que debiese ser gradual. Este grado de abstracción que implican las matemáticas escolares y los conceptos algebraicos en particular, puede darnos una idea del por qué los estudiantes manifiestan dificultades en esta asignatura en su proceso formativo.

Por otro lado, entendemos el pensamiento funcional como un componente del pensamiento algebraico que se centra en las relaciones entre las variables que varían simultáneamente y que es abordado en los primeros niveles educativos, principalmente mediante tareas que involucran relaciones funcionales de tipo lineal (Blanton y Kaput, 2004).

En particular, en el contexto educativo del álgebra escolar, en Chile, las funciones son un concepto ampliamente estudiado a partir de 7º básico, puesto que las funciones constituyen una herramienta fundamental no solo para las matemáticas, sino que son de vital importancia para el desarrollo de diferentes disciplinas, ya que nos permiten modelar, comprender y predecir fenómenos del mundo real (Blanton, 2008). Sin embargo, creemos que su introducción es muy abrupta no siendo adquirido de forma natural (Freudenthal, 1983) y en ese sentido, consideramos de suma importancia proponer actividades que permitan el desarrollo del pensamiento funcional desde los primeros cursos de enseñanza básica, potenciando aquellos elementos claves para su desarrollo como relaciones entre variables, generalización de relaciones funcionales o los diferentes sistemas de representación, facilitando el tránsito hacia mayores niveles de abstracción propios del pensamiento algebraico.

PROPUESTA

La actividad propuesta está en línea con la investigación sobre el pensamiento algebraico emergente. Nuestro objetivo es observar elementos claves del desarrollo del pensamiento funcional, con especial foco en las respuestas de aquellos estudiantes que presentan NEE. Para ello se adaptó una actividad propuesta de por el grupo de investigadores del proyecto "Pensamiento Algebraico" (https://pensamientoalgebraico.es/es/), cuyo foco de estudio son los componentes relativos al pensamiento algebraico en los niveles de educación infantil y primaria.

Contexto

- La actividad se aplicó en un grupo de 5º básico de una escuela rural de la localidad de Crucero en la comuna de Purranque.
- El curso está integrado por 11 estudiantes, de los cuales 9 participan de la actividad.
- En este curso 5 estudiantes pertenecen al PIE de los cuales 2 presentan NET y 3 NEP.

Actividad

La actividad propuesta estaba dividida en tres partes. En una primera fase se entregó a los estudiantes una recta numérica y dos fichas que representaban a un conejo y una rana. La consigna consistía en presentar la relación funcional lineal $y = x + 2$:

Consigna: Un conejo y una rana están en una competencia de saltos. La rana siempre salta dos metros más que el conejo. Entonces:

Las preguntas planteadas en esta primera parte apuntaban a reconocer casos particulares en una primera instancia para valores cercanos, los cuales podían ser resueltos usando la recta numérica y las fichas.

- Si el conejo ha saltado 2 metros, la rana ha saltado _____metros.
- Si el conejo ha saltado 5 metros, la rana ha saltado _____metros.

Luego también en la primera parte de la actividad se plantearon preguntas que apuntaban a reconocer casos particulares. Sin embargo, estos valores eran más lejanos y no podían ser resueltos utilizando la recta numérica y las fichas. La idea era que los estudiantes pudieran hacer uso de la relación entre las variables que se planteaba de manera explícita en la consigna inicial.

- Si el conejo ha saltado 20 metros, entonces la rana ha saltado _____metros.
- Si el conejo ha saltado 30 metros, entonces la rana ha saltado _____metros

En la segunda fase de la actividad, se les solicitó a los estudiantes que tabularan los resultados obtenidos en la primera parte, solicitándoles que justificaran esos resultados encontrados. La idea en este apartado era poder observar los primeros indicios de generalización de la relación funcional.

Ya en la fase 3 se preguntó a los estudiantes lo siguiente:

- Si el conejo hace un salto, pero no sabemos cuántos metros saltó (podría ser cualquier número) ¿podríamos saber cuántos metros saltó la rana?
- ¿Cómo calcularías la distancia que saltó el conejo si sabemos que la rana hizo un salto de 5 metros? ¿Y uno de 19 metros? Justifica y regístralo en la tabla.

Con la primera pregunta se pretendía “forzar” a los estudiantes para que muestren indicios de generalización de la relación funcional. La segunda pregunta tenía por intención observar si los estudiantes podían reconocer la relación inversa entre las variables.

RESULTADOS PRELIMINARES

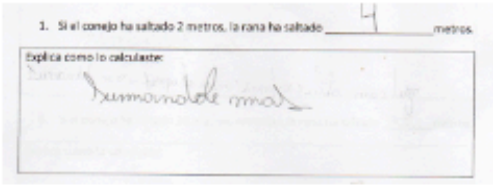
Para el análisis de los resultados, consideramos el marco conceptual utilizado por Fuentes en su tesis de magíster, donde destaca que es posible hallar evidencia de pensamiento funcional cuando el niño hace explícita la relación que encuentra entre las variables que están involucradas en el problema de estudio y esta relación es expresada en lenguaje común (verbal o escrito), con dibujos, símbolos o números para ir de las individualidades a la generalización (Fuentes, 2014).

A modo de ejemplo la Figura 1, muestra los resultados de la actividad de una de los estudiantes PIE con NEP, diagnosticada con discapacidad intelectual que llamaremos A1.

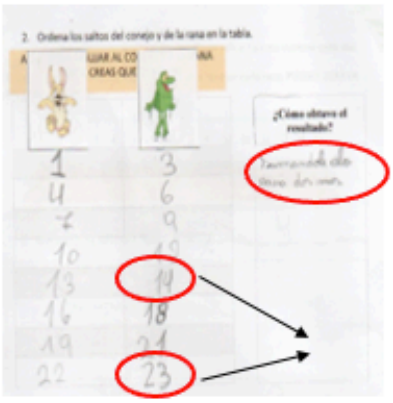
Figura 1.

Resultados estudiante A1.

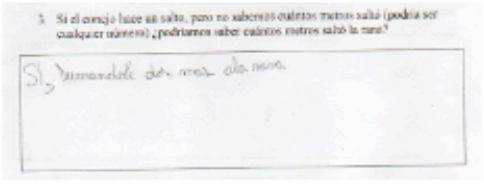
La estudiante logra resolver los ejercicios del apartado 1, comprendiendo la relación entre las variables.



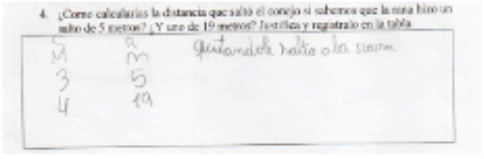
En el apartado 2 la estudiante comienza asignando al conejo el valor 1 y sumando 2 obtuvo 3 para la rana, luego para la siguiente fila considera el valor correlativo al 3 obtenido en la celda anterior, es decir 4 y lo asigna al conejo, sumando 2 obtuvo 6 para la rana y así continuó con un par de fallos.



En la fase 3, la estudiante logra entender que para obtener el valor del salto correspondiente a la rana ha de considerar el salto del conejo y sumar 2 (se observa en los cálculos). Sin embargo, no logra expresar esa idea correctamente.



Finalmente, la estudiante logra identificar la relación entre las variables y la inversa, con algunos fallos, sin el rigor esperado.



CONSIDERACIONES FINALES

En general, los estudiantes logran reconocer la relación entre variables que plantea la situación. Por lo que es posible potenciar (por medio de actividades como esta) el desarrollo del pensamiento funcional de los estudiantes que participan de la actividad. Por otro lado, considerando el nivel educativo y considerando el contexto producto de la pandemia, lo que se esperaba era encontrar respuestas que dieran cuenta al menos hasta lo expresado en el OA 13 de 4º básico, identificar y describir patrones numéricos que involucren una operación, de manera manual y/o usando software educativo, lo cual es posible apreciar en las respuestas de los estudiantes.

- Producto de los resultados y la experiencia de la aplicación, es posible hacer varias modificaciones que mejoren la actividad propuesta:
- No entregar directamente la relación en el enunciado, sino mostrar algunos casos particulares y que sea el alumno quien encuentre la relación.
- Reformular algunos enunciados para hacerlos más comprensibles.
- Condicionar un poco algunas respuestas para que el estudiante complete el argumento con la intención de trabajar en la producción de argumentos claros y sólidos.

REFERENCIAS

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psicology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen University College.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the Elementary Classroom: Transforming Thinking, Transforming Practice*. Heinemann.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Reidel.

Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio.* [Tesisde Máster, Universidad de Granada, España].

Soares, J., Blanton, M. L., y Kaput, J. (2006), Thinking Algebraically across the Elementary School Curriculum. *Teaching Children Mathematics, 12*(5), 228–235.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO] (1994). *Informe Final. Conferencia mundial sobre necesidades educativas especiales: acceso y calidad.* Autor.

EVALUANDO EL USO DE REGISTROS EN VIDEO EN EVALUACIONES DE UN CURSO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Rodrigo Rojas-Muñoz

Universidad Austral de Chile

rodolforojas@uach.cl

Esta investigación se desarrolló en un curso de Geometría Analítica desarrollado en el Campus Patagonia de la Universidad Austral de Chile. Su objetivo es evaluar el uso del registro audiovisual al responder pruebas de desarrollo. El estudio analiza el cambio en el diseño de las pruebas, en la rúbrica de evaluación y en la comunicación entre profesor y estudiante durante las pruebas, así como la opinión de los estudiantes sobre este formato. Los resultados preliminares indican que hubo mayor libertad en el diseño, se pudo evaluar dominios superiores, hubo mayor retroalimentación y los estudiantes se muestran favorables al formato.

Evaluación matemática, Enseñanza remota de rmergencia, Evaluación en línea, Video como instrumento de evaluación, COVID-19.

INTRODUCCIÓN

Debido a la pandemia COVID-19, a mediados de mayo de 2020, 162 países habían decidido cerrar totalmente las instituciones que imparten educación formal (UNESCO 2020). El cierre de las instituciones de educación formal puede tener graves consecuencias, como la interrupción del aprendizaje, la interrupción de disponibilidad de alimento sano y de bajo costo, el aumento de la pobreza en familias con niños y niñas en casa durante largos periodos y el aumento de las tasas de abandono escolar (Gajardo y Díez-Gutiérrez, 2021).

En términos educativos, el paso a la formación online obliga a revisar las concepciones educativas y didácticas de los profesores, en particular, la evaluación, cuyo cambio es el que mayor polémica ha generado, profundizando sus contradicciones como instrumento de aprobación en vez de su rol en el aprendizaje (Castillo-Olivares y Castillo-Olivares, 2021).

En lo referente a la evaluación online, una alternativa es el uso del registro audiovisual como medio para mostrar aprendizajes. Cuando este formato es creado por los estudiantes, provoca un aprendizaje extra: el dominio de las tecnologías de grabación digital, edición y transferencia. Por otro lado, el evaluador tiene a mano un instrumento de evaluación online que contiene evidencia de autoría y que puede revisar en detalle y repetidamente (Arnold, 2012).

Incluso cuando esta herramienta es utilizada en experiencias presenciales, es útil para observar el desempeño de los estudiantes al integrar contenidos, competencias y situaciones complejas (González, 2018).

Este trabajo analiza los resultados al cambiar sólo un aspecto en una evaluación en matemáticas tipo test con preguntas de desarrollo: los estudiantes realizan un video explicando las respuestas a las preguntas del test, en vez de sólo presentar el desarrollo escrito.

OBJETIVOS

Objetivo general

Evaluar el uso del registro audiovisual al responder un test de desarrollo en cursos de matemáticas universitarias.

Objetivos específicos

1. Analizar el cambio en el tipo de preguntas de las pruebas.
2. Analizar el cambio en los desempeños evaluados.
3. Analizar el cambio en la comunicación entre profesor y estudiante durante el desarrollo de las pruebas.
4. Rescatar la opinión de los estudiantes sobre el formato de registro audiovisual.

METODOLOGÍA

Cambios generales

El estudio se aplicó en un curso de 22 estudiantes de Bachillerato en Ingeniería en el Primer Semestre del año 2020. La prueba y los resultados fueron comparados con un curso de 12 estudiantes del mismo Bachillerato que realizaron el curso en el Primer Semestre de 2019. Ambos cursos fueron dictados por el mismo docente. Cada curso consideró la realización de 5 pruebas tipo tests con preguntas de desarrollo.

En consideración al nuevo escenario de enseñanza remota de emergencia en el año 2020, el curso fue dictado en formato de videoconferencia online en plataforma Zoom, con la obligación de grabar y distribuir entre los estudiantes cada clase. Además, se elimina el requisito de asistencia mínima del 80% y los estudiantes no tienen la obligación de encender sus cámaras durante la clase.

Lo anterior produjo tres cambios inmediatos: un cambio en la dinámica de la clase, un cambio en el uso de TICs y un cambio en el formato de evaluación. En el año 2019, las clases eran parcialmente expositivas y parcialmente prácticas, con desarrollo de ejercicios por parte de todos los estudiantes presentes con apoyo del profesor. En el año 2020, las clases pasaron a ser casi exclusivamente expositivas, con el desarrollo de algunos ejemplos con apoyo de algunos estudiantes, mientras los ejercicios eran enviados ahora como tarea, apoyando el desarrollo individual a través de WhatsApp o correo electrónico a aquellos estudiantes que lo solicitaran. Por otra parte, en 2019, se hacía uso de GeoGebra sólo de manera ocasional para propósitos demostrativos, mientras que en 2020, se incorporó el uso permanente de GeoGebra, además del uso de Excel y WolframAlpha por estudiantes y profesor, para apoyar la exposición y el desarrollo de los ejemplos. Finalmente, en 2019, la misma prueba era realizada por todos los estudiantes en un horario común en una misma sala en forma escrita durante 90 minutos, en cambio en 2020 las pruebas eran enviadas un día viernes en la tarde, y los estudiantes debían devolver el lunes siguiente videos explicando el desarrollo de preguntas similares, pero con datos distintos.

Cambio en el tipo de preguntas

La disposición de este formato en video con mayor tiempo de desarrollo, donde no se podía ver al estudiante desarrollar su prueba, pero sí como explicaba el desarrollo, y podía hacer uso de TICS, implicó el cambio en el tipo de pregunta realizada.

Mientras en el año 2019 y anteriores, la mayoría de las preguntas solicitaban la representación gráfica de una ecuación, la interpretación de una situación tipo o la resolución algebraica de una ecuación o identidad, por ejemplo:

Figura 1.

Pregunta 3 de la Prueba N°2 del curso de Geometría Analítica año 2019.

Dada la ecuación:

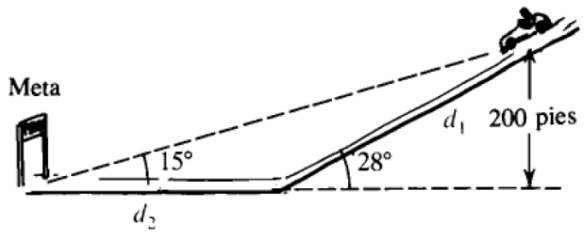
$$25x^2 - 4y^2 - 100x - 4y - 1 = 0$$

a. Identifique la curva y sus elementos
b. Grafique la curva y sus elementos en un plano cartesiano

Figura 2.

Pregunta 1 de la Prueba N°3 del curso de Geometría Analítica año 2019.

La entrada a una pista baja por una montaña. Utilizando la información dada en la figura, calcule la distancia total $d_1 + d_2$ que recorre el carrito.



En cambio, en el año 2020, hay preguntas más complejas, algunas de ellas solicitando la deducción de parámetros de representaciones geométricas o la demostración de una propiedad aplicada a un caso particular.

Figura 3.

Pregunta 2 de la Prueba N°4 del curso de Geometría Analítica año 2020.

La siguiente ecuación representa una cónica

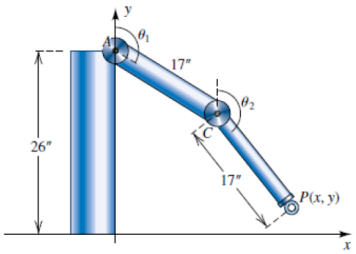
$$2x^2 - 6xy + y^2 - 5x + 3y + 4 = 0$$

a. Determine una ecuación general de segundo grado sin término xy que represente la cónica en un sistema de ejes rotados (12 p)
b. Calcule las coordenadas de los vértices y focos de la cónica en coordenadas cartesianas (x, y) (8 p)

Figura 4.

Pregunta 2 de la Prueba N°2 del curso de Geometría Analítica año 2020.

Considere el brazo robótico articulado de la figura



a. Calcule las coordenadas del punto C si $\theta_1 = 40°$

b. Calcule las coordenadas del punto P si $\theta_2 = 145°$

Cambio en los desempeños evaluados

Las pruebas realizadas en los años previos a la pandemia, se desarrollaban en forma escrita y la rúbrica se basaba en la asignación de puntajes por cada paso algebraico bien logrado o por la representación gráfica de cada elemento o la interpretación algebraica o geométrica de un enunciado. En la prueba del año 2020, se mantiene la asignación de puntajes por los mismos elementos, pero en vez de evaluar lo escrito, se evalúa lo que se dice. Además, los desarrollos pueden ser apoyados por el uso de TICs, por ejemplo, mostrar gráficas usando GeoGebra o avanzar desarrollos algebraicos usando WolframAlpha.

Entonces, el desempeño que se evalúa es distinto. En los años previos se evalúa principalmente la memorización de conceptos básicos y respuestas. En cambio, en el año 2020, no requieren la memorización pues los estudiantes disponen de los contenidos, así se evalúa el entendimiento, la aplicación y la justificación oral, así como el uso de herramientas tecnológicas.

Cabe señalar aquí que a pesar de la mayor dificultad y las habilidades requeridas de nivel superior, el desempeño de los estudiantes mejoró considerablemente. Esto se debe principalmente a que si un estudiante no recuerda algún procedimiento, entonces no logrará avanzar y no obtendrá casi nada del puntaje de esa pregunta. En cambio, en el video el desarrollo se basa en la aplicación de los procedimientos, esto es, si no recuerda el procedimiento, lo puede revisar y continuar con los cálculos. Además, el estudiante debe construir un libreto para explicar el proceso y también se evalúa esta explicación considerando el dominio de terminología técnica y el uso adecuado del lenguaje común.

Cambio en la comunicación entre profesor y estudiante durante el desarrollo de las pruebas

En las pruebas presenciales, si bien los estudiantes tenían la oportunidad de presentar los avances al profesor y recibir algún feedback, el tiempo total disponible es poco. Al enviar las pruebas por el fin de semana y contar con una comunicación por WhatsApp o correo electrónico, los estudiantes podían enviar una mayor cantidad y mayor detalle de su avance antes de comenzar a construir su libreto y/o grabar su video.

Este contacto, incluso, no termina con la entrega del video. Debido a diversas causas, el profesor debió contactarse con algunos estudiantes después de la entrega, como dificultades con el audio o el video, inconsistencias en la escritura, inconsistencia entre lo que se dice con lo que está escrito, pequeños errores que no cambian la comprensión del problema sino sólo el resultado.

Opinión de los estudiantes sobre el formato de registro audiovisual

Todavía no se ha recogido la opinión de los estudiantes en forma sistemática, sólo se han recibido algunos comentarios espontáneos. En general, la opinión de los estudiantes es positiva, solicitando el formato de video en cursos posteriores como Cálculo en Una Variable, Cálculo en Dos Variables y Ecuaciones Diferenciales. Pero cuando se llevó el formato a cursos para el Bachillerato en Ciencias, los estudiantes se manifestaron poco favorables, incluso después de ser aplicado. Entre los motivos dados es la falta de dominio de las TICs, a diferencia de los estudiantes de ingeniería que parecen ser más diestros en este aspecto.

CONCLUSIONES

El formato audiovisual genera un cambio en los objetivos y el tipo de preguntas que se pueden hacer en una prueba de desarrollo.

El formato audiovisual permite medir desempeños superiores, ya sea de manera directa o indirecta.

La retroalimentación es un factor importante en el desempeño de los estudiantes durante una evaluación.

Los estudiantes de ingeniería son más proclives a registrar sus evaluaciones en video.

REFERENCIAS

Arnold, S. (2012). *Assessing student learning online: overcoming reliability issues* [Conference]. IADIS International Conference on Cognition and Exploratory Learning in Digital Age CELDA.

Castillo-Olivares, J.M., y Castillo-Olivares, A. (2021). El impacto de la COVID-19 en el profesorado de educación superior y sus concepciones sobre la evaluación. *Campus Virtuales, 10*(1), 89-101.

Gajardo Espinoza, K., y Díez-Gutiérrez, E.J. (2021). Evaluación educativa durante la crisis por COVID-19: una revisión sistemática urgente. *Estudios Pedagógicos, 47*(2), 319-338.

González, C. (2018). *Evaluando desempeños a través del video en alumnos de pedagogía* [Ponencia]. XXXI Jornada de Matemática de la Zona Sur.

PROPUESTA DE CRITERIOS PARA FAVORECER EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO DE 0 A 2 AÑOS

José Meza

Independiente

mezaortizjosemiguel@gmail.com

En la actualidad, el desarrollo humano ha tenido la posibilidad de ampliar sus criterios de análisis en la medida en que las ciencias han trascendido. En esta línea, el aprendizaje matemático y la infancia temprana (0 a 3 años) han tenido posibilidades de encuentro tal que es posible explorar criterios para observar y llevar a cabo una gestión didáctica que favorezca aprendizajes matemáticos acordes a este rango etario. El presente trabajo propone criterios para observar y llevar una gestión didáctica que promueva aprendizajes matemáticos tempranos. Para esto, se ofrece una breve revisión epistemológica de los aprendizajes matemáticos para esta edad (Alsina, 2015; Rodríguez et al., 2003) y luego, algunos criterios que podrían dar cuerpo a una gestión didáctica que favorezca aprendizajes matemáticos tempranos (Alsina, 2015; Hernández, 2017; Bassedas et al., 2006).

Educación matemática infantil, Matemáticas tempranas, Formación inicial docente.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la didáctica de la matemática ha logrado ampliar sus objetos de estudios a aprendices y objetos matemáticos diversos. La literatura actual (Castro y Castro, 2016) (Martínez y Sánchez, 2011) (Chamorro, 2005) da cuenta de análisis profundos de los objetos matemáticos que se estudian en Educación Parvularia y dan cuenta de teorías que buscan desarrollar dichos aprendizajes. Esta expansión de la profundización de la didáctica de la matemática impacta fuertemente a la Educación Parvularia y en específico, este es el caso de los aprendizajes matemáticos desde los 0 a los 2 años, no obstante, los trabajos encontrados que abordan los aprendizajes matemáticos en estas edades, no en la misma cantidad que se encuentran para infantes de 4 a 6 años.

En la actualidad, existen investigaciones desde diversas disciplinas que buscan dar respuesta a los aprendizajes matemáticos de 0 a 2 años. Así, por ejemplo, en aprendizajes relativos al número, hay un alto consenso respecto a los y las bebés logran cuantificar cantidades de hasta 3 elementos y logran diferenciar conjuntos de elementos bajo determinadas diferencias proporcionales (Lago et al., 2012) (Rodríguez et al., 2003) (Dehaene, 2016), como también, se ha logrado elaborar propuestas teóricas que han permitido orientar formas de interpretar las conductas de los y las bebés.

En esta línea, otras propuestas institucionales han logrado sólidos esfuerzos en elaborar concreciones de propuestas teóricas-didácticas que buscan propiciar aprendizajes matemáticos tempranos (Meza, 2019). Ahora bien, en esta propuesta institucional, se plantean principios para orientar la mediación de aprendizajes matemáticos tempranos, no obstante, dichos principios orientadores son propuestos para toda la educación parvularia, es decir, para niños y niñas de 0 a 6 años, por lo que en este trabajo se proponen principios orientadores que más próximos y con mayor atingencia, para propiciar aprendizajes matemáticos en niños y niñas de 0 a 2 años.

Para elaborar esta propuesta, se utilizan ciertos contructos teóricos no solo que son propios de la didáctica de la matemática, sino que también se proponen considerar otras disciplinas y propuestas teóricas que no fueron elaboradas exclusivamente para la didáctica de la matemática. Algunos de estas líneas teóricas-investigativas que respaldan la propuesta, se basan en los trabajos de:

- Heinsen (2012) los que teorizan la noción de tacto pedagógico, el que también puede ser interpretado con una dimensión en lo didáctico.
- Godoy et al. (2021) hace referencia a criterios que orientan la mediación pedagógica y por tanto fortalece, amplía y profundiza la noción de tacto propuesta por Heinsen (2012)
- Bradford (2014) da orientaciones y criterios para observar las prácticas y la vida en las infancias, orientando en la forma en la que se podrían interpretar las conductas de los y las bebés.
- Palacios (2014) los que describen cómo se produce el desarrollo cognitivo durante los dos primeros años de vida y por tanto, sólidas aproximaciones a la forma en la que los y las bebés podrían interpretar el mundo.
- Narodowski y Snaider (2017), ponen en tensión la escolarización de los bebés, entendiendo que dicha escolarización responde principalmente a principios y criterios de cuidado, no obstante, la institucionalización podría poner en tensión las definiciones que están a la base de los aprendizajes en estas edades.
- Goldschmied y Jackson (2007) el que da contexto a la cultura y la vida en el jardín infantil, espacio privilegiado para observar prácticas didácticas-pedagógicas con una sólida intencionalidad.

METODOLOGÍA

El enfoque de investigación utilizado es de tipo cualitativo, con un diseño de investigación documental (Hoyos, 2010). Este tipo de diseño permite levantar categorías teóricas-empíricas que orientarían una forma de observar y mirar el fenómeno de la enseñanza en niños y niñas de 0 a 2 años.

La validación de estas categorías será mediante validación de expertos y socialización de estos a la comunidad científica especializada en el área, como son: investigadores/as en enseñanza y aprendizaje de la matemática, educadoras/es de párvulo, asistentes de párvulo, entre otros.

Se espera que estos principios sean insumos para realizar investigación en didáctica de la matemática, como también, análisis de prácticas de aula de niños y niñas de estas edades.

RESULTADOS: LA PROPUESTA

La propuesta se organiza en 4 principios o criterios, los que son:

1. *Diferenciar el aprendizaje lógico-matemático del aprendizaje cultural*: este principio busca que el adulto-educador reconozca con profunda claridad las características del episteme y/o del aprendizaje matemático que se quiere intencionar, de este modo, la intepretación de las conductas del niño/a serán mejor interpretadas. Este principio también tributa a que se

reconozca que lo matemático, aún cuando tiene un alto componente cultural, en las primeras edades son otros los aspectos que se consideran con mayor relevancia.

2. *Cuidar cuánta información decimos en la mediación*: Este principio se basa en velar y cuidar en la densidad de la mediación, es decir, en que el adulto evalúe cuán prudente y necesario es el nivel de profundización y/o de complejización de las tareas, y por tanto, de en cuánto del aprendizaje se está profundizando. Considérese que la comunicación, con bebés, no está centrada principalmente en la palabra oral, sino más bien en aspectos paraverbales de la comunicación, como también, en otros factores.

3. *Para mediar, es beneficioso conocer qué, cómo y con qué el niño/a ha elaborado los aprendizajes que trae*: Este principio se basa en conocer las trayectorias que ha tenido el/la bebé para enfrentar a diversos aprendizajes, de este modo, se podrá conocer los intereses, habilidades y conductas ya aprendidas por el/la bebé. En esta misma línea, se encuentra el conocer los intereses y gustos del párvulo.

4. *Mediar integradamente, priorizando y/o relevando lo matemático:* Es principio se relaciona con considerar que el desarrollo huano se produce de manera integral, esto es: emocional, cognitivo, motor, entre otras dimensiones. No obstante, en el contexto de una mediación con foco en lo matemático, la priorización de la mediación debe tender a todo aquello que, de forma cinérgica, tribute a la lógica, al aprendizaje o desarrollo de la lógica, a lo matemático y/o al aprendizaje matemático.

CONCLUSIÓN

Este trabajo, entonces, busca invitar a la comunidad didáctica a cuestionar y pensar en los criterios que se debiesen considerar para profundizar en los aprendizajes amtemáticos tempranos, considerando los diversos prismas del fenómeno de aprendizaje, es decir: el aprendiz, el aprendizaje y el enseñante. En este marco, es la comunidad didáctica de la matemática un espacio idóneo para caracterizar el/los aprendizajes (obras u objetos matemáticos) y las consideraciones que debiesen tener, bajo principios de vigilancia epistémica.

REFERENCIAS

Heinsen, M. (2012). *Autoestima y tacto pedagógico en edad temprana. Orientaciones para educadores y familias*. Narcea.

Palacios, J. (2014). Desarrollo psicológico en la primera infancia. En J. Palacios, Á. Marchesi, y C. Coll, *Desarrollo psicológico y educación. Psicología evolutiva* (pp. 80-176). Alianza.

Castro, E., y Castro, E. (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil*. Pirámide.

Goldschmied, E., y Jackson, S. (2007). *La educación infantil de 0 a 3*. Morata.

Dehaene, S. (2016). *El cerebro matemático.* Siglo XXI.

Lago, M., Rodríguez, P., Escudero, A., y Dopico, C. (2012). ¿Hay algo más que contar sobre las habilidades numéricas de los bebés y los niños? *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(1), 38-53.

Bradford, H. (2014). *Observación infantil y planificación educativa*. Narcea.

Narodowski, M., y Snaider, C. (2017). ¿Bebés en las escuelas? Infancias hiperescolarizadas en una cultura prefigurativa. *Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales, Niñez y Juventud, 15*(1), 45-57.

Rodríguez, P., Lago, M. O., y Jimenez, L. (2003). El bebé y los números. En I. Enesco, *El desarrollo del bebé. Cognición, emoción y afectividad* (pp. 134-157). Alianza.

Martínez, J., y Sánchez, C. (2011). *Desarrollo y mejora de la inteligencia matemática en Educación Infantil*. Wolters Kluwer España.

Meza, J. (2019). *Enfoque de matemática.* Fundación Integra.

Godoy, M., Cortes, J., Espinoza, R., y Rengifo, M. (2021). Diez reflexiones sobre mediación pedagógica. *Infancia, Educación y Aprendizaje (IEYA), 7*(2), 42-51.

Chamorro, M. d. (2005). *Didáctica de las matemáticas para Infantil*. Pearson Educación.

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS DE RAZONAMIENTO EN UN LICEO TÉCNICO PROFESIONAL

Lisset Benavides Ávila[1], Fabián Quiroga Merino[2]

[1]Liceo Industrial Metodista de Coronel, [2]Universidad de Concepción

lisbenavides@udec.cl, fquiroga@udec.cl

Se plantea la necesidad de idear una propuesta didáctica mediante articulación pedagógica interdisciplinar. Esto se justifica por la dificultad de los estudiantes de la especialidad Construcciones Metálicas en el logro de competencias matemáticas evidenciado en los resultados de pruebas internas y externas. Dicha articulación se realiza en geometría utilizando como referente teórico el Modelo de Razonamiento y de Fases de Van Hiele y el Aprendizaje Basado en Problemas. Con dicha propuesta se espera elaborar tareas que evidencien la integración de conocimientos entre subsectores, favoreciendo el trabajo en equipo y autonomía en la indagación de la información y adquisición de conocimientos.

Educación Media Técnico Profesional, Razonamiento Geométrico, Articulación, Modelo de Van Hiele, Aprendizaje Basado en Problemas.

MARCO TEÓRICO

La articulación pedagógica fortalece la integración y adquisición de conocimientos por parte de los estudiantes, pues como señala Franco (2004), esta permite unificar ideas y acciones, logrando una real integración de saberes entre subsectores, además la interdisciplinariedad puede entenderse como una estrategia que implica la interacción entre diversas disciplinas, originando un diálogo y colaboración entre las partes para cumplir el objetivo de crear un nuevo conocimiento (Van de Linde, 2007), razón por la cual, el enlace entre geometría y Construcciones Metálicas (en adelante CM) permitirá al estudiante crear conexiones que fortalezcan sus competencias de razonamiento.

Por otra parte, se aborda el eje de la geometría en la especialidad CM, enmarcado bajo el Modelo de Razonamiento Geométrico y de Fases de Van Hiele, ya que este brinda la posibilidad de identificar las distintas formas de razonamiento geométrico de los estudiantes (Vargas y Gamboa, 2013), además de plantear un modo de estructurar la enseñanza de la geometría mediante cinco niveles de razonamiento (Visualización, Análisis, Deducción informal, Deducción formal y Rigor) y cinco fases de aprendizaje asociadas a cada nivel (Información, Orientación dirigida, Explicitación, Orientación libre e Integración), esto con la finalidad de ayudar a los estudiantes a construir estructuras mentales que les permitan alcanzar un nivel mayor de razonamiento, luego de haber superado el anterior, pues el paso de un nivel a otro se produce de forma continua y lleva asociado un lenguaje específico, además de hacer explícitos los conocimientos del nivel anterior, aumentando así el grado de comprensión y dominio de conocimiento (Fouz, 2006).

Ahora bien, considerando que en su cotidianidad los estudiantes deben valerse de elementos de la geometría para dar solución a problemas y que Murillo (2013); citado en García y García (2020), establece que "el docente de matemática requiere propuestas con nuevos preceptos teóricos-prácticos a partir de situaciones cotidianas (p.4)", se considera relevante orientar las tareas matemáticas en cada

fase del Modelo de Van Hiele, dando énfasis a la resolución de problemas propios de la especialidad, dotando de sentido tanto a la geometría como a su formación en CM. Dicho lo anterior, se integran al diseño didáctico, las orientaciones de la metodología activa Aprendizaje Basado en Problemas (en adelante ABP), pues permite desarrollar la reflexión y análisis a partir de actividades que requieren dar solución a un problema real (Hincapié et al., 2018). Desde esta perspectiva se espera que los estudiantes experimenten la necesidad de recurrir a sus conocimientos en distintas disciplinas en la búsqueda de soluciones, utilizando esto como punto de partida para la adquisición e integración de nuevos conocimientos y competencias (Barrows, 1986; citado en Morales y Landa, 2004), con el fin de que puedan dar solución a determinados problemas de su entorno por sus propios medios (Fernández y Aguado, 2017).

Con relación a lo expuesto se evidencia que utilizar la teoría del Modelo de Van Hiele en una propuesta didáctica diseñada bajo ABP genera resultados positivos en el razonamiento de los estudiantes, tal como se refleja en la investigación de Remolina-Delgado (2021), en donde se concluye que planear, diseñar y aplicar la unidad didáctica utilizando este modelo y metodología permitió que los estudiantes se apropiaran de conceptos, términos y procesos de compleja comprensión, mejorando su razonamiento inicial, asimismo queda de manifiesto en Vargas (2021), en donde se específica que los resultados obtenidos fueron positivos bajo esta metodología respecto al nivel de razonamiento alcanzado por los estudiantes.

En conclusión, el planteamiento de esta propuesta dará la posibilidad de plantear un ejemplo concreto de tareas que impacten en el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes, integrando conocimientos de la geometría, didáctica de la geometría y construcción de estructuras metálicas.

CONTEXTO Y ESTRATEGIA METODOLÓGICA

El planteamiento de esta propuesta didáctica sentará sus bases en la articulación pedagógica interdisciplinar, por ende, es importante señalar que para hacer más situada la elaboración se ha considerado un establecimiento que cuenta con las especialidades de Electrónica, Mecánica Automotriz y Construcciones Metálicas de la Región del Bio-bío.

Ahora bien, aunque inicialmente no se considera la aplicación de la propuesta, su elaboración estará centrada en la especialidad de CM, conformada por un total de 73 estudiantes, quienes se han considerado como un referente para situar las tareas en un contexto real, esperando a posteriori poder ejecutar esta investigación mediante un muestreo no probabilístico intencional, debido a que la población es muy variable y la muestra muy pequeña (Otzen y Manterola, 2017).

Dicha especialidad se ha seleccionado, puesto que requieren el uso de diversos elementos de la geometría en su formación como futuros técnicos en CM, y hasta el momento reciben formación parcializada de matemática por un lado y por otra el aprendizaje del cálculo de estructuras metálicas.

En primera instancia, antes de ahondar en la estrategia, es importante recordar que la Pandemia de Covid 19 decretada por la Organización Mundial de la Salud el 30 de Enero de 2020, llevó a que el Mineduc decretara la suspensión de clases en Chile a partir del 16 de Marzo del mismo año, lo cual según el Centro de Estudios del Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2021), desencadenó una carencia de conocimientos requeridos para la adquisición de saberes futuros, ya que los estudiantes de Liceos TP no cuentan en la actualidad con los conocimientos necesarios para afrontar

su disciplina, debido a que el 54% de las horas de formación específica de los estudiantes (talleres prácticos) no pudieron llevarse a cabo, significando esto una pérdida importante de aprendizajes que repercutieron en las habilidades requeridas por parte de éstos para su desarrollo profesional (Informe N°52, pp.10-11).

A lo anterior, se suma la desconexión de la asignatura de matemática con las demás disciplinas científicas y técnicas, lo que conduce a que los estudiantes presenten dificultades para resolver problemas propios de su especialidad técnica, siendo evidente la necesidad de articulación entre subsectores, pues como menciona el National Council of Teachers of Mathematics (1991); citado en Monterrubio, et al. (2019):

> Establecer conexiones entre las matemáticas y otras áreas del currículo ayuda a los alumnos a ver la utilidad de las matemáticas lo que puede ayudar a mejorar la motivación y el interés por parte de los alumnos, aspectos que repercutirán en la mejora del aprendizaje (p. 444).

Por tanto, considerando lo expuesto y el hecho de que el Plan de Formación Diferenciada Técnico Profesional de 3° y 4° medio del Mineduc, reduce a partir de tercero medio las horas en las asignaturas de formación general, dando mayor énfasis a los módulos de especialidad (talleres prácticos), destinando 3 horas semanales para matemáticas y 22 horas semanales para el subsector técnico profesional, es crucial realizar una propuesta didáctica efectiva, que use a la articulación pedagógica como una herramienta que permita a los estudiantes adquirir e integrar sus conocimientos, con el fin de fortalecer su capacidad de razonamiento para hacer frente a problemas propios de su especialidad, tal como plantea Canese de Estigarribia (2020); citado en Ortiz y Cutimbo (2022, p. 169):

> …generar el razonamiento en el estudiante es construir un pensamiento reflexivo que le permita sustentar o validar sus respuestas entendiendo problemas de diversa índole y luego brindando una solución aceptable. Asimismo, pone énfasis especialmente en la importancia de considerar que los hechos deben ser interpretados, comprendidos y razonados.

Creación de la Unidad Didáctica

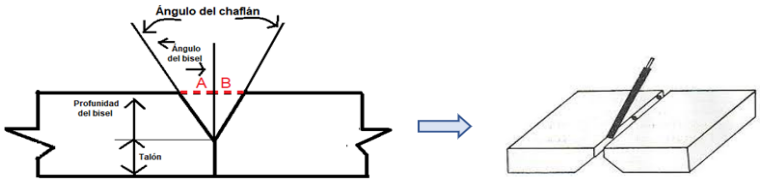
Considerando lo planteado, el punto de partida estará enfocado en el diseño y planeación de una unidad didáctica que permita a los estudiantes trabajar por el desarrollo del nivel 2 de razonamiento hacia el Nivel 3, según el Modelo de razonamiento de Van Hiele y considerando el ABP en cada una de sus fases.

Dicha unidad se centrará en el uso de Razones Trigonométricas en los módulos de CM, con el objeto de que los estudiantes puedan utilizar y profundizar en sus conocimientos matemáticos, desarrollando sus habilidades de análisis y cálculo, mediante una actitud que denote interés por resolver desafíos, trabajo en equipo y respeto hacia las normativas que rigen su especialidad, por ende, se ha dispuesto que dicha unidad constará de 20 sesiones que se distribuirán en las distintas fases del modelo. Se espera en cada una de ellas presentar a los estudiantes, problemáticas que manifiesten la integración de los conocimientos matemáticos y técnicos.

Cabe señalar que con la solución y posterior reflexión respecto a este tipo de situaciones se espera crear una propuesta didáctica que aporte desde la matemática hacia la especialidad de CM, en el desarrollo de competencias de razonamiento que fortalezcan las capacidades de los estudiantes en la

resolución de problemas que pueden acontecer en el quehacer de su profesión, usando conocimiento didáctico matemático como soporte, tal como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo de problemática de Nivel 2 y Fase 2:

Ejemplo: Calcular la medida de la abertura entre dos planchas de acero con biselado a tope que requiere ser soldada. **Nivel 2: Análisis.** **Fase 2: Orientación dirigida.**	**Objetivo:** Resolver problema planteado, utilizando trigonometría y conocimientos de soldadura.
Actividad Usted recibe para soldar dos piezas de una plancha de 10 mm con una unión a tope con talón de 3 mm y ángulo de 30° y se percata que una de ellas pareciera tener una abertura levemente mayor de ángulo de bisel, por lo que necesita comprobar la medida de A y B previo a realizar la soldadura, ¿Es posible realizar la soldadura de ambas piezas que ha recibido?. Analice y Justifique. 	

CONCLUSIONES

Finalmente, es importante mencionar que esta propuesta se encuentra en la fase de recopilación y confección de experiencias prácticas del área técnica, mediante el análisis del Programa de CM y el diálogo con docentes de la especialidad, tanto en aula como en talleres prácticos, con la finalidad de cumplir con los lineamientos teóricos planteados, además se espera llevar a cabo una validación de expertos que permita conocer las apreciaciones, juicios y valoraciones de especialistas en el área o personas con trayectoria en el tema (Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez, 2008), tanto del área técnica como de educación matemática a modo de validar o replantear lo elaborado.

REFERENCIAS

Alsina, Á., y Franco, J. (2020). Promoviendo la educación matemática inclusiva desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: el caso de las fracciones. *APEduC Revista-Investigação e Práticas em Educação em Ciências, Matemática e Tecnologia, 1*(2), 13-29.

Canese de Estigarribia, M. I. (2020). Percepción del desarrollo de las habilidades del pensamiento crítico en la Universidad Nacional de Asunción, Paraguay. *Perfiles Educativos, 42*(169), 21-35.

Escobar-Pérez, J., y Cuervo-Martínez, A. (2008). *Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización*. Avances en medición, 6, 27-36.

Fernández, C. L., y Aguado, M.ª I. (2017). *Aprendizaje basado en problemas como complemento de la enseñanza tradicional en Fisicoquímica*. Educación Química, 28, 154-162. http://www.revistas.unam.mx/index.php/req/article/view/63996

Fouz, F. (2006). Test geométrico aplicando el Modelo de Van Hiele. *Sigma Revista de Matemáticas 28*(5), 33-58.

Franco García, O. L. G. A. (2004). De la educación inicial y preescolar a la escolar. *Revista educación,* (106), 2-7.

García, R., y García, C. (2020). Metodología Steam y su uso en Matemáticas para estudiantes de Bachillerato en tiempos de pandemia Covid-19. *Revista Científica Dominio de las Ciencias, 6*(2), 163-180.

Hincapié, D. A., Ramos, A., y Chirino, V. (2018). Aprendizaje basado en problemas como estrategia de aprendizaje activo y su incidencia en el rendimiento académico y pensamiento crítico de estudiantes de medicina. *Revista Complutense de Educación,* 29(3), 665-681. https://doi.org/10.5209/rced.53581

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2021). *Efectos de la suspensión de clases presenciales en contexto de pandemia por COVID 19*. Autor.

Monterrubio, M., González, M., García, A., Rodríguez, P. y Rodríguez, M. (2019). ¿Existe desconexión en la enseñanza de las matemáticas y la física en Educación Secundaria? En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 443-451). SEIEM

Morales, P., y Landa, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas. *Theoría,* 13, 145-157.

Murillo, J. (2013). *La investigación sobre la eficiencia escolar en Iberoámerica*. Convenio Andrés Bello.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Ortiz, J. y Cutimbo, G. (2022). Aprendizaje basado en problemas: una metodología aplicada a la asignatura universitaria Matemática Básica. *Tecnología, Ciencia y Educación*, 22, 155-172. https://doi.org/10.51302/tce.2022.820

Otzen, T., y Manterola, C. (2017). Técnicas de muestreo sobre una población a estudio. *Int. J. Morphol*., *35*(1) 227-232.

Remolina-Delgado, E. (2021). Modelo Van Hiele Aplicado a la Geometría Descriptiva para el Fortalecimiento del Dibujo. *Revista Tecnológica-Educativa Docentes 2.0, 11*(2), 90-96. https://doi.org/10.37843/rted.v11i2.252

Van del Linde, G. (2007). *¿Por qué es importante la interdisciplinariedad en la educación superior? Cuadernos de Pedagogía Universitaria*, *4* (8) 11-13.

Vargas, G., y Gamboa, R. (2013). El Modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, *27*(1) 74-94.

Vargas, S. (2021). *Modelo de Van Hiele en un ambiente digital de aprendizaje basado en problemas para el fortalecimiento del componente espacial geométrico aplicando gamificación, estudiantes de grado noveno del colegio Marruecos y Molinos* [Tesis de Maestría, Universidad de Cartagena, Colombia].

GEOMETRÍA 3D. UN ESTUDIO DEL NIVEL DE HABILIDADES ESPACIALES Y PENSAMIENTO GEOMÉTRICO TRIDIMENSIONAL EN ESTUDIANTES DEL GRAN CONCEPCIÓN

Camilo Araneda Herrera, Scarlete Palma Rifo, Benjamín Vega Ojeda, Fabian Quiroga Merino

Universidad de Concepción

caraneda2018@udec.cl, spalmarifo2018@udec.cl, bevega2018@udec.cl, fquiroga@udec.cl

Basado en las investigaciones de Pittalis y Christou (2010), académicos de la Universidad de Chipre, se realizó un estudio cuyo objetivo fue caracterizar niveles de habilidades espaciales y pensamiento geométrico tridimensional en estudiantes de entre 12 y 15 años. El estudio consiste en una investigación transversal de análisis descriptivo, según Vara-Horna (2012), para la cual se aplicaron dos test a 251 estudiantes de octavo básico y segundo medio en cuatro establecimientos. Los resultados preliminares indican que un bajo porcentaje de estudiantes logra alcanzar un grado "óptimo" de habilidad espacial y pensamiento geométrico 3D, mostrando inicialmente que los alumnos podrían enfrentar cursos de Geometría 3D de mayor profundidad según el Curriculum escolar chileno, con una base de conocimiento insuficiente.

Habilidades espaciales, Geometría 3D, Pensamiento geométrico

INTRODUCCIÓN

En Chile, desde el año 2019 las bases curriculares para la asignatura de matemáticas en los niveles de tercero y cuarto medio incluyeron en su estructura una diversidad de cursos electivos enfocados en desarrollar nuevos conocimientos y competencias acordes a las necesidades de la sociedad actual y del futuro. Entre estos cursos electivos se encuentra el de Geometría 3D, el cual del cual emerge la interrogante de sí los estudiantes han desarrollado un nivel adecuado de pensamiento geométrico para iniciar correctamente el estudio en la asignatura. Muy ligado a este interés por el pensamiento geométrico de los estudiantes que inician su estudio en estos cursos, se encuentra el estudio de las habilidades espaciales, las cuales según Lohman (1996) son definidas como "la capacidad de generar, retener, recuperar y transformar imágenes visuales bien estructuradas" (p. 3). La importancia de dichas habilidades espaciales dentro de un contexto educativo es que "es una de las inteligencias cognitivas humanas que es interesante de estudiar porque tiene el potencial de optimizar el rendimiento de los estudiantes" (Buckley et al., 2018 citado en Rosjanuardi y Yuliardi, 2021, p. 175). Además, Buckley et al. (2018) indican lo siguiente:

> Recientemente, el interés en la capacidad espacial ha resurgido, ya que se vincula cada vez más a través de la evidencia correlacional con el desempeño educativo específicamente en las áreas de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (p. 948).

Teniendo en cuenta esto, es necesario definir la relación entre habilidad espacial y pensamiento geométrico. Es en este ámbito que Pittalis y Christou (2010) señalan que:

> La mayoría de las publicaciones sobre las relaciones entre la visualización espacial y las habilidades matemáticas de los estudiantes subrayan la importancia de promover el desarrollo de la habilidad espacial de los estudiantes en la enseñanza de la geometría 3D (p. 191).

Estos autores concluyeron también que:

> Existe un efecto directo entre las habilidades espaciales y los cuatro tipos de razonamiento en geometría 3D, indicando que las habilidades espaciales constituyen un fuerte predictor del desempeño de los estudiantes en los cuatro tipos de razonamiento en geometría 3D (Pittalis y Christou, 2010, p. 207).

Comprendiendo la relación entre estos conceptos y la necesidad de desarrollarlos como habilidades de forma paralela, es que el objetivo del presente estudio es caracterizar los niveles de habilidades espaciales y de pensamiento geométrico 3D en estudiantes del Gran Concepción; estudiando también el impacto del género, la edad y el tipo de establecimiento en los resultados obtenidos. Posterior a ello se espera estimar cómo se relacionan los resultados obtenidos con lo declarado en el curriculum escolar de la asignatura para efectos de caracterizar cómo es la preparación que muestran estos estudiantes antes de llegar a estas asignaturas electivas.

METODOLOGÍA

La investigación consiste en un estudio transversal de análisis descriptivo según Vara-Horna (2012), puesto que los datos se recolectaron en un sólo momento. La población está compuesta por estudiantes pertenecientes a establecimientos públicos y subvencionados de enfoque científico-humanistas del Gran Concepción, específicamente alumnos de 8º básico y 2° año de enseñanza media. La selección de estos cursos se fundamenta en que corresponde a niveles previos al electivo de geometría 3D (tercero y cuarto medio) y son cursos fundamentales en la trayectoria estudiantil ya que integran conocimientos fundamentales en geometría, como es el caso de 8° básico. La muestra utilizada para este estudio consta de 251 estudiantes para el primer test, de los cuales el 61.4% pertenece a 8º básico y el 38.6% a segundo medio y el segundo test consta de 192 estudiantes, de los cuales el 64.1% pertenece a 8° básico y el 35.9% a 2° medio. Las edades de los estudiantes fluctúan entre los 12 y 15 años. Los instrumentos fueron aplicados a los mismos estudiantes, pero en distintas fechas, esto debido al tiempo realización de cada test. Además, se decidió aplicar ambos test de manera anónima como un mecanismo para fomentar la participación de los estudiantes, ya que, esta era de carácter voluntaria. La muestra fue seleccionada por conveniencia según las características de cada establecimiento, quienes autorizaban la aplicación de los instrumentos. Ahora bien, debido a la finalización anticipada del semestre, la muestra entre el primer y segundo test sufrió leves cambios, dado que, para ciertos establecimientos las actas de notas ya estaban cerradas y, por lo tanto, los estudiantes no veían una obligación en asistir a clases.

Los instrumentos utilizados corresponden a dos pruebas traducidas del griego, autorizadas y validadas por Mario Pittalis. La prueba de pensamiento geométrico 3D evalúa 6 tipos de habilidades mediante 24 preguntas entre selección múltiple, verdadero/falso y desarrollo, mientras que la prueba de habilidades espaciales evalúa 3 habilidades mediante 31 preguntas separadas en 8 ítems que en su mayoría son de selección múltiple.

Las habilidades caracterizadas en este estudio son las mismas descritas por Pittalis y Christou (2010), para el pensamiento geométrico 3D se consideran las siguientes habilidades: Manipular diferentes modos de representación 3D, reconocer y reconstruir redes, estructurar matrices de cubos en 3D, reconocer y comparar las propiedades de las formas 3D y Calcular el volumen y el área de sólidos.

En cuanto a las habilidades espaciales, se consideran las siguientes: Visualización espacial, Orientación espacial y Relaciones espaciales.

Para evaluar cada habilidad se optó por realizar una pauta de evaluación numérica con respecto a cada pregunta, para luego asignar a las calificaciones próximas a un cierto nivel de desempeño descrito con más detalle en la Tabla 1.

Tabla 1.

Criterios de evaluación.

Niveles de Desempeño	Descriptores Generales
4 puntos - Óptimo	Se describe un desempeño sobresaliente a lo esperado en la resolución de preguntas de alternativas y de desarrollo, sin presentar errores.
3 puntos - Bueno	Se describe un desempeño adecuado en la resolución de preguntas de alternativas y de desarrollo, pero con errores mínimos.
2 puntos - Regular	Se describe un desempeño regular en la resolución de preguntas de alternativas y de desarrollo, presentando errores en la selección de múltiples alternativas o respuestas de desarrollo.
1 punto - Apenas aceptable	Se describe un desempeño poco aceptable, presentando una alta cantidad de errores y conocimiento mínimo para responder las preguntas de selección múltiple o desarrollo.
0 puntos - Deficiente	Se describe un desempeño deficiente, presentando una cantidad total de errores al momento de responder las preguntas de alternativas o de desarrollo.

Estas pautas se construyeron detalladamente, considerando las particularidades de cada tarea y abarcando las posibles respuestas de los estudiantes, como se muestra en la tabla 2. Cabe mencionar que, ambos instrumentos de evaluación fueron revisados por el autor original del texto mediante correo electrónico, indicando mejoras para los indicadores de algunos ítems y aprobando en general la validez y utilización del instrumento. Una de las retroalimentaciones recibidas fue la siguiente:

> In task 5, you could give a partial-credit of 2 points for a 1 deviation from the correct answer (12 or 14). In tasks 6, you could give a partial-credit of 2 points for a 1-2 deviation from the correct answer, in case that the student did some calculations and may conducted computational mistake (Pittalis, 2022).

Tabla 2.

Ejemplo de revisión para pregunta del test de pensamiento geométrico tridimensional.

N°	Ítem	Indicadores	Puntos	Valor
10	HABILIDAD Reconocimiento y construcción de redes.	Construye adecuadamente alguna red que permite construir el prisma triangular: sección rectangular más sección triangular	4	

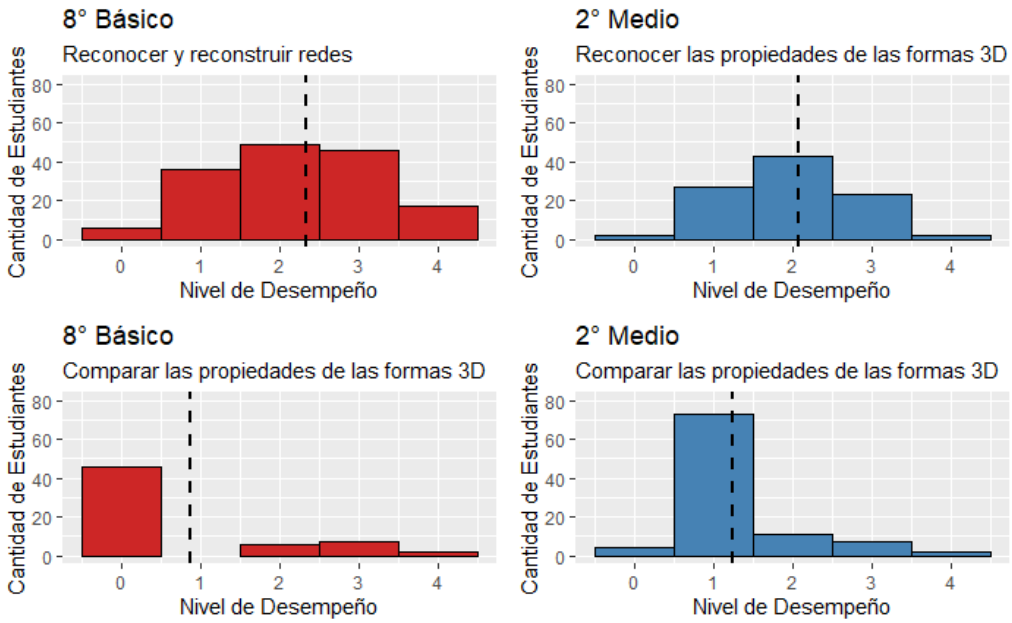
DESCRIPCIÓN DE LA TAREA Construcción de una red de prismas triangulares. INSTRUCCIÓN Completa la ampliación de abajo, para que al doblarla se construya el prisma triangular que se muestra a continuación.	Construye la red de manera incompleta, dibujando únicamente un triángulo o un rectángulo.	3
	Construye la red de manera completa o incompleta, sin embargo, la posición de las secciones añadidas no permite formar el prisma.	2
	Construye la red del prisma triangular con polígonos extras. Ejemplo: dibuja una red con cuatro rectángulos en vez de tres.	1
	No construye alguna red.	0

RESULTADOS

Por una parte, se aprecia preliminarmente que en promedio los estudiantes de 8° básico suelen estar en un nivel "Apenas aceptable" con respecto a las habilidades relacionadas con el pensamiento geométrico tridimensional, consiguiendo una media máxima de 2.325 al reconocer y reconstruir redes, posicionándose en un nivel de desempeño "Regular" para aquella habilidad, y una mínima de 0.8701 al comparar las propiedades de las formas 3D, mostrando un desempeño "Deficiente". Por otra parte, se aprecia preliminarmente que en promedio los estudiantes de 2° medio suelen estar a un nivel "Regular" con respecto a las habilidades relacionadas con el pensamiento geométrico tridimensional, consiguiendo una media máxima de 2.064 para la habilidad de reconocimiento de las propiedades de las formas 3D, y una mínima de 1.244 para la habilidad de comparación de las propiedades de las formas 3D, posicionándose en el nivel de desempeño "Apenas aceptable", tal y como se puede ver en la Figura 1.

Figura 1.

Comparación niveles de desempeño de estudiantes de 8° básico y 2° medio - Pensamiento geométrico 3D.



Basado en los resultados preliminares y su relación con la secuencia curricular para el eje de geometría en las bases del MINEDUC (2016), inicialmente se observa que los alumnos muestran un nivel de conocimiento y habilidades insuficientes para cursar la asignatura diferenciada Geometría 3D, tanto en 8° básico como en 2° medio. Es decir, no se observa una relación positiva entre los objetivos de aprendizaje supuestamente alcanzados en el currículum para el nivel educativo de ambos cursos y los resultados de los test aplicados. Se aprecia en los primeros análisis de resultados que la base necesaria respecto a las habilidades requeridas para el logro de los objetivos de aprendizaje en la asignatura Geometría 3D se encuentra incompleta, dificultando posiblemente el logro exitoso del plan de formación diferenciado en el eje de geometría.

REFERENCIAS

Buckley, J., Seery, N. y Canty, D. A. (2018). Heuristic Framework of Spatial Ability: a Review and Synthesis of Spatial Factor Literature to Support its Translation into STEM Education. *Educ Psychol Rev,* 30, 947–972.

Lohman, D. F. (1996). Spatial ability and G. In I. Dennis y P. Tapsfield (Eds.), *Human abilities: Their nature and assessment* (pp. 97–116). Lawrence Erlbaum.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2016). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio*. Autor.

Pittalis, M. (2022). Young Students' Arithmetic-Algebraic Structure Sense: an Empirical Model and Profiles of Students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-23.

Pittalis, M., y Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 191-212.

Vara-Horna, A. (2012). *Desde La idea hasta la sustentación: Siete pasos para una tesis exitosa*. Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias Administrativas y Recursos Humanos. Universidad de San Martín de Porres, Lima.

Yuliardi, R., y Rosjanuardi, R. (2021). Hypothetical Learning Trajectory in Student's Spatial Abilities to Learn Geometric Transformation. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education*, *6*(3), 174-190.

NIVELES DE LECTURA DE GRÁFICOS EN INFANTIL: UNA ACTIVIDAD EXPLORATORIA

Diego Navarro C[1]., Sandra Fuentes M.[2]

[1]Escuela Alborada, [2]Universidad de Granada

dnavarro@comunidadalborada.cl, sandrafuentesm@gmail.com

Los gráficos estadísticos forman parte de la vida cotidiana, de ellos podemos extraer información relevante para tomar decisiones informadas, la habilidad de leer datos y extraer información se debe desarrollar desde la primera infancia para tener niños y adultos estadísticamente competentes, es por esto que nos planteamos la interrogante ¿Pueden los niños pequeños extraer información de gráficos? y ¿De qué nivel es la información que pueden obtener? Esta investigación indaga en los niveles de lectura que evidencian alumnos de educación infantil. Enfrentamos a la lectura de dos gráficos de datos, a un grupo de alumnos de 4 y 5 años, les planteamos diversas preguntas sobre la información entregada en los gráficos, las cuales respondieron sin mayor dificultad. Las preguntas formuladas abarcan los niveles de lecturas propuestos por una reconocida taxonomía de comprensión gráfica.

Educación infantil, Niveles de lectura de gráficos, Gráficos estadísticos.

INTRODUCCIÓN

La estadística es una ciencia que nos ayuda a interpretar, recopilar y representar datos de nuestro entorno, es decir, está en todos los aspectos de nuestra vida y especialmente cuando debemos analizar el comportamiento de los datos para obtener información y tomar decisiones de manera consciente.

La enseñanza de la estadística parte en Chile desde los primeros niveles de educación básica, pero es posible trabajar actividades estadísticas con niños menores, con actividades desafiantes y contextualizadas. Sabemos que los gráficos estadísticos se utilizan para representar un conjunto de datos, de manera que este tipo de representación facilite su comprensión, comparación y análisis y nos permita responder preguntas estadísticas. La lectura de gráficos también es parte de la educación estadística, por lo que se debe incluir en nuestras actividades diarias. En esta experiencia, vincularemos la estadística y la enseñanza pre-escolar. Se les plantearán pictogramas, los cuales son llamativos y de fácil lectura para los niños pequeños, por como presentan la información. Si bien los participantes son parte de la muestra de en estudio, serán ellos mismos los analistas y constructores de las principales conclusiones de los planteamientos generados en la interacción de esta experiencia.

El objetivo de esta investigación es indagar en los niveles de lectura de gráficos que manifiestan los alumnos de 4 y 5 años, la capacidad de recopilación y análisis sobre lo que ellos mismos han recopilado. Cabe mencionar que al momento de esta intervención los niños no sabían que estaban realizando gráficos estadísticos, ya que las instrucciones estaban orientadas a conocer sus preferencias, respetar distintas decisiones y tratar de explicar o entender por qué se dan ciertas tendencias en las respuestas del grupo curso.

ANTECEDENTES

En la búsqueda de información sobre este tema, fueron muy pocas las investigaciones que se relacionaban específicamente con la lectura de gráficos en infantil o primeros cursos de primaria, las

que encontramos analizan los niveles de lectura de gráficos en los libros de textos. El trabajo de construcción de gráficos es lo que más se acerca al estudio de la estadística en educación infantil.

A continuación, presentaremos algunas investigaciones realizadas en educación infantil, o primeros cursos de primaria, relacionadas con los niveles de lectura de gráficos.

En la taxonomía de Curcio, se establecieron los siguientes niveles de lectura de gráficos: (a) Leer los datos: extraer información explícita presentada en el gráfico; (b) Leer dentro de los datos: extraer información implícita del gráfico, para encontrarla necesita hacer algún cálculo o comparación; (c) Leer más allá de los datos: realizar inferencias con la información obtenida del gráfico; (d) Leer detrás de los datos: cuestionarse sobre la obtención de los datos y analizar críticamente la lectura de estos. Esta taxonomía presenta los niveles de lectura de gráficos más completa y pertinente para todos los niveles escolares, ya que amplían niveles anteriormente descritos (Bertín, 1967; Curcio, 1987; Curcio, 1989; Friel et al., 2001; Shaughnessy, 2007).

Díaz-Levicoy et al. (2016), indagan en los niveles de lecturas que presentan futuras maestras de infantil, quienes llegan a los niveles de: (a) leer entre los datos y (b) leer dentro de los datos. Esto concuerda con los niveles de lectura más utilizados en los libros de textos, donde no se formulan preguntas de nivel 3 o 4, o son muy escasas en comparación con las de otros niveles (Díaz-Levicoy et al., 2015).

Las tablas y gráficos estadísticos se pueden trabajar desde infantil, es así que variados autores se han interesado en este nivel educativo (p.ej., Alsina, 2012; Fuentes et al., 2014), demostrando que la inmersión de este tópico es posible desde temprana edad, inclusive, que se realiza de forma espontánea al encontrarse frente a un conjunto de elementos desordenados (Alsina, 2012).

METODOLOGÍA

Este estudio es de carácter exploratorio y descriptivo (Hernández et al., 2010), ya que con la intervención pretendemos explorar en las respuestas de los alumnos los niveles de lectura de gráficos y hacer una descripción de estas intervenciones.

Se trabajó con un grupo combinado de 25 alumnos de prekínder (NT1) y kínder (NT2), con edades comprendidas entre los 4 y 6 años, de un colegio particular subvencionado de la Región de los Ríos. Fueron elegidos de forma intencionada por la disponibilidad del establecimiento.

Se diseñaron 3 tareas, cada una asociada a un gráfico distinto, (a) Tarea 1: ¿Cuál es tu mascota preferida de la película "La vida secreta de tus mascotas"?, (b) Tarea 2: ¿Qué fruta te gusta?, (c) Tarea 3: Animales de granja. Las cuales se detallan a continuación.

La primera tarea invitó a los alumnos a construir un gráfico con sus preferencias sobre las mascotas que aparecen en la película "La vida secreta de tus mascotas", para ello se les presentó una cartulina con los rótulos, y se le facilitó a cada alumno una cara en un círculo de papel con la instrucción de colocarla en la columna de su mascota favorita en esa película.

En la segunda tarea se presentó a los alumnos un gráfico con datos sobre las preferencias de frutas de un grupo de niños. En esta tarea se pretendía que los alumnos obtuvieran información del gráfico y pudieran contestar preguntas como, por ejemplo, ¿De qué trata este gráfico?, ¿Cuál es la fruta favorita? ¿Por qué creen que ésta fruta es la favorita?, ¿Cuántos niños eligieron las frutillas?, ¿Cuántos

niños tenía el curso?, entre otras. Se pretendía que los alumnos respondieran preguntas de los primeros tres niveles de la taxonomía, aunque igualmente se les plantean preguntas de nivel 4.

La tercera tarea correspondía a un gráfico con datos sobre animales de granja, en él queríamos explorar el nivel de inferencia sobre los datos entregados, por lo que nuestras preguntas fueron más que nada de la forma ¿Por qué crees tú que sucede esto? ¿Dónde puede estar ubicado este colegio? Aquí pretendemos llegar a los niveles más altos de la taxonomía.

Los criterios de análisis serán los niveles de lectura de gráficos de la taxonomía de Curcio. En la Tabla 1, categorizamos las preguntas realizadas a los alumnos según el nivel de lectura en el que se encuentran.

Tabla 1.

Categorización de preguntas.

	Nivel de lectura de gráficos	
	Tarea 2	Tarea 3
Leer los datos	¿De qué trata este gráfico? ¿Cuáles son las frutas elegidas? ¿Cuántos niños eligieron las manzanas? ¿Cuántos niños eligieron las frutillas?	¿De qué se trata el gráfico? ¿Qué título podría tener el gráfico? ¿Qué característica tienen en común los elementos presentes en el pictograma?
Leer entre los datos	¿Cuál es la fruta favorita? ¿Cuál es la fruta menos favorita? ¿Cuántos niños tenían el curso?	¿Cuál es el animal favorito de estos niños? ¿Cuál es el animal menos favorito de estos niños?
Leer más allá de los datos	¿Por qué creen que esta fruta es la favorita? ¿Por qué creen que esta fruta es la que menos personas prefieren? ¿Por qué creen que hay dos frutas con la misma cantidad de elecciones?	¿Por qué crees tú que sucede esto? ¿Por qué creen que los niños prefieren cada uno de los animales?
Leer detrás de los datos	¿Ustedes habrían elegido otra fruta? ¿Qué sucede con un niño que no le gustan las frutas?	¿Dónde puede estar ubicado este colegio?

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

En esta oportunidad analizaremos sólo la Tarea 2 y 3 que, apuntan específicamente a los niveles de lectura de gráficos y no a su construcción, como lo hace la Tarea 1.

Cuando se les plantea la Tarea 2, las opiniones giran en torno a sus preferencias individuales sobre las frutas, los alumnos asumieron que el grupo encuestado eran ellos mismos. Los investigadores les explican que este gráfico fue realizado en otro colegio, del mismo modo en que ellos realizaron el de la Tarea 1, y que debíamos tratar de obtener información de aquellos niños. El primer desafío fue saber qué se les preguntó a esos niños. Al respecto, todos los alumnos contestaron correctamente (se les había preguntado por su fruta favorita) y, también, identificaron las frutas del gráfico y la cantidad de niños que había elegido cada una de ellas. Así, el primer nivel de lectura fue logrado con éxito.

Para indagar en el segundo nivel, se pidió a los alumnos averiguar cuál era la fruta favorita y la menos favorita y, al igual que en el nivel anterior, todos contestaron correctamente. Cuando se les preguntó por el total de niños que tenía el curso, los alumnos presentaron dificultades relacionadas con el ámbito numérico. Sin embargo, más de la mitad de los alumnos pudo responder correctamente. Los alumnos que presentaron dificultades contrastaron sus respuestas revisando, nuevamente, los datos del gráfico. De esta manera, este grupo logró llegar a una respuesta correcta. Respecto al tercer nivel, se preguntó a los alumnos por qué hay frutas favoritas y otras que no lo son. En este sentido, la discusión se centró en las experiencias personales, en los sabores que tienen algunas frutas, y en la apariencia de éstas. Por último, las preguntas que consideramos en este nivel orientaron la discusión a la pertinencia de las frutas escogidas. Los alumnos argumentaron que faltaban algunas frutas que a ellos les gustaban mucho y que no podrían haberlas escogido, pues no eran parte de las frutas presentadas como opciones en el gráfico.

En la Tarea 3, el nivel 1 y 2 de lectura fue logrado por todos los alumnos de forma inmediata, descubriendo que se trataba de animales de granja. Aquí, los alumnos identifican los animales favoritos y los no tan favoritos, además de la cantidad de niños había en el curso. En el nivel 3, las opiniones de los alumnos estuvieron repartidas en torno a la utilidad de los animales de granja, por ejemplo, la vaca da leche, queso y yogurt, por eso es la favorita; la gallina da huevos; y, el cerdo da carne. Así, los alumnos categorizaron a los animales desde el que tenía mayor votación hasta el que tenía menos. Cuando se les preguntó a los alumnos por una posible ubicación geográfica de los niños que respondieron esta última encuesta, los alumnos respondieron que estos niños se encontraban en jardines infantiles y/o colegios cercanos a su comunidad, con una realidad similar a la de ellos.

CONCLUSIONES

En este estudio indagamos y describimos los niveles de lectura de gráficos estadísticos, de un grupo de alumnos con edades comprendidas entre los 4 y 6 años. A diferencia de las investigaciones consultadas (p.ej., con maestras de infantil en formación), el grupo de alumnos de este estudio evidenció distinto niveles de lectura de gráficos estadísticos. El trabajo a priori de elaboración de las preguntas fue un aspecto clave para generar la discusión entre los alumnos y para la extracción de la información requerida. En ese sentido, la contextualización de las situaciones permitió a los alumnos obtener datos de sus propias experiencias y, contrastarlos con los datos entregados en los gráficos.

Los resultados de este estudio sugieren que es necesario tanto con educadoras de párvulos, como con profesores, el trabajo que apunte a la generación de situaciones de aula desafiantes y motivadoras, pues el libro de texto no abarca todos los niveles de lectura de gráficos estadísticos.

La poca o casi nula información que encontramos en la bibliografía consultada, refuerza la idea de investigar en torno a este tema e implementar más situaciones donde se evidencien los niveles de lecturas de gráficos estadísticos desde los primeros niveles de escolarización.

Esta investigación no pretende generalizar sobre los niveles de lectura de gráficos, por lo acotada e intencionada de la muestra.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece el apoyo en la aplicación de la actividad en el aula y en el desarrollo del proyecto a los alumnos de Pedagogía Básica de la Universidad San Sebastián sede Valdivia.

REFERENCIAS

Alsina, A. (2012). La estadística y la probabilidad en Educación Infantil conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Didácticas Específicas*, *7*, 4-22.

Bertin, J. (1967). *Sémiologie graphique: les diagrammes*. Mouton.

Curcio, F. (1987). Comprensión de relaciones matemáticas expresadas en gráficas. *Revista de Investigación en Educación Matemática*, *18*, 382-393.

Curcio, F. (1989). Developing graph comprehension. N.C.T.M.

Díaz-Levicoy, D., Morales, R., y López-Martín, M. (2015). Tablas estadísticas en libros de texto chilenos de 1º y 2º año de educación primaria. *Revista Paranaense de Educação Matemática*. *4*. 10-39.

Díaz-Levicoy, D., Sepulveda, A., Vásquez, C., y Opazo, M. (2016). Lectura de tablas estadísticas por futuras maestras de Educación Infantil. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, *18*, 1099-1115.

Friel, S., Curcio, F., y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2) 124-158.

Fuentes, S., Arteaga, P., y Batanero, C. (2014). Gráficos estadísticos y tablas: una actividad exploratoria en Educación Infantil. En: F. España (Ed.), *Actas del XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 385-393). Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación* (5a. Ed.). McGraw Hill.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistical learning and reasoning. En F. K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1009). Information AGE publishing.

OBJETOS MATEMÁTICOS EN LAS TABLAS ESTADÍSTICAS: UN ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO CHILENOS DE EDUCACIÓN BÁSICA

Jocelyn D. Pallauta, María M. Gea, Pedro Arteaga

Universidad de Granada

jocelyndiaz@correo.ugr.es, mmgea@ugr.es, parteaga@ugr.es

Se caracteriza el significado institucional pretendido de la tabla estadística en una muestra de doce textos escolares chilenos, dirigidos de 5º a 8º curso de Educación Básica (10 a 13 años). A través de un análisis de contenido y basados en el Enfoque Ontosemiótico, se estudian las situaciones problema, lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos. Los resultados muestran un predominio de lenguaje verbal, y una gran variedad de situaciones problemas vinculadas a diferentes tipos de procedimientos, que varían su distribución conforme se avanza de curso.

Tablas estadísticas, Libros de texto, Estadística y probabilidad.

INTRODUCCIÓN

En el contexto de la pandemia generada por la COVID-19, fue posible apreciar en los diferentes medios de comunicación un alto volumen de información, presentado a través de gráficos o tablas estadísticas, en que el ciudadano común se vio en la necesidad de tomar decisiones en un escenario de incertidumbre (Rodríguez-Muñiz et al., 2020). En este sentido, la tabla estadística es un medio para representar y comunicar información, y también ampliamente utilizado en la ciencia y la tecnología.

Reconociendo la importancia de la tabla estadística, las directrices curriculares de distintos países consideran su estudio a partir de los primeros cursos de educación primaria (MINEDUC, 2018; NCTM, 2014). Dichos lineamientos, promueven el desarrollo de competencias ligadas al análisis de los datos, a través de la recolección, representación e interpretación de datos, para reforzar su comprensión del mundo actual. Sin embargo, Estrella y Estrella (2020) alertan de que su enseñanza se basa, principalmente, en la aplicación de técnicas rutinarias en lugar de la comprensión de aspectos fundamentales para su construcción o lectura.

También nos interesamos por el libro de texto, pues es un recurso didáctico ampliamente utilizado en la escuela (Fan et al., 2013), y que es un puente entre lo propuesto en el currículo y lo implementado finalmente en el aula. Por tanto, en este estudio se realiza un análisis semiótico de los objetos matemáticos vinculados al trabajo con tablas estadísticas considerados por el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), con el objetivo de caracterizar el significado institucional pretendido de la tabla estadística en una muestra de textos escolares chilenos dirigidos a la Educación Básica.

ELEMENTOS TEÓRICOS

En el EOS (Godino et al., 2007, 2019), el significado de un objeto matemático es considerado como el sistema de prácticas que desarrolla una persona (significado personal), o que se desarrollan en el seno de una institución (significado institucional), cuando se resuelve una situación problema, de las cuales emergen los objetos matemáticos, por ejemplo la tabla estadística. Las prácticas pueden ser

operativas, por ejemplo, completar la frecuencia relativa de un determinado valor de la variable en una tabla, o discursiva como argumentar la relación lineal entre las frecuencias absolutas y relativas.

El EOS distingue entre el significado de referencia, vinculado al significado del tema desde la matemática; Pretendido, significado planificado en el proceso de instrucción como el libro de texto; Implementado, el que es llevado al aula de clases; Y evaluado, el cual es considerado en el proceso de evaluación. En la práctica matemática se identifican seis tipos de objetos primarios: las situaciones problema (aplicaciones intra o extra-matemáticas); el lenguaje (símbolos, expresiones, etc.); conceptos (definiciones); proposiciones o propiedades (asociados a los conceptos); procedimientos (técnicas utilizadas en la resolución de una situación problema); y argumentos (deductivo, inductivo, etc.). Dichos objetos se relacionan entre sí, generando configuraciones, en este caso configuraciones epistémicas vinculadas al significado institucional pretendido de la tabla estadística.

METODOLOGÍA

El estudio es cualitativo de tipo descriptivo, a través de un análisis de contenido (Mayring, 2020) se seleccionan como unidades de análisis las tareas (ejemplos, resueltas o propuestas) vinculadas a la tabla estadística en la unidad de estadística y probabilidad de los textos escolares. Las categorías de análisis corresponden a los elementos primarios propuestos por el EOS. La muestra es intencional, y se compone de doce libros chilenos dirigidos de 5º a 8º curso de Educación Básica, y que se ajustan al marco curricular vigente (MINEDUC, 2015, 2018). Por cada curso se analizó: el libro del estudiante, el cuaderno de ejercicios, y la guía didáctica para el docente. Dichos textos pertenecen a dos editoriales (Santillana y SM), y fueron seleccionados porque son distribuidos gratuitamente por el MINEDUC, a los estudiantes y docentes del sistema público y particular subvencionado. Se analizaron un total de 990 tareas (5º: 139; 6º: 115; 7º: 418; 8º: 318), alcanzando un mayor número en 7º y 8º curso, pues en dichos cursos la tabla se utiliza como un medio para el estudio de variados temas asociados a la estadística y la probabilidad.

RESULTADOS

Situaciones problema

Las situaciones problema identificadas en los textos escolares son las siguientes:

SP1. Organización de los datos. Es un primer paso de un estudio estadístico, y consiste en recolectar datos con el propósito de analizarlos e interpretarlos. Por ejemplo, en los textos se pide al estudiante consultar a la clase sobre su color favorito, o la mascota que tienen en casa.

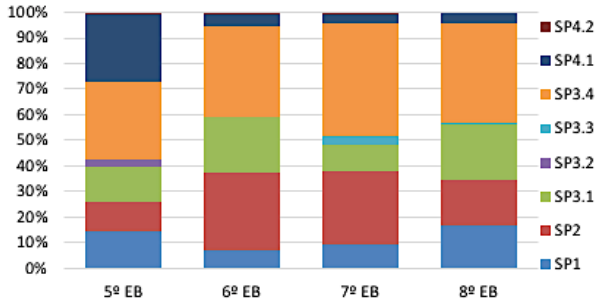
SP2. Construcción de la distribución de una variable estadística. Implica la organización y representación de un conjunto de datos asociados a una variable estadística unidimensional, a través de una tabla estadística que puede presentar diferentes tipos de frecuencias (ordinarias o acumuladas). Si el listado de datos es extenso, los valores de la variable se podrían distribuir en intervalos de clase.

SP3. Traducción entre representaciones. Requiere un cambio del tipo de registro de representación, para visualizar nueva información de los datos, lo que involucra un proceso de transnumeración (Wild y Pfannkuch, 1999). Para diferenciar los procesos de traducción asociados a la tabla estadística, se han clasificado en cuatro tipos: SP3.1: De tabla a gráfico o viceversa; SP3.2. De tabla a tabla; SP3.3. De tabla a texto o viceversa; SP3.4. De tabla a estadístico.

SP4. Realizar una clasificación cruzada de dos variables. Implica el resumen de los datos de una variable bidimensional por medio de una tabla de doble entrada. En dicho tipo de tabla se representa la frecuencia conjunta (absoluta, relativa o porcentual), así como las frecuencias marginales y condicionadas de acuerdo con la fila o la columna. Siguiendo a Gea et al. (2014) este tipo de situación se divide en dos tipos: SP4.1. Organización de la información de un conjunto de datos bivariados, utilizado para organizar y comparar la distribución de dos variables estadísticas relacionadas entre sí, facilitando el estudio de temas como la probabilidad, correlación y regresión; SP4.2. Análisis de las variables que conforman la variable estadística bidimensional, es el estudio descriptivo de cada variable junto a los procedimientos para completar una tabla conocida las medias marginales.

Figura 1.

Porcentaje de tipos de situaciones problema por curso.



En la Figura 1 se aprecia un mayor número de situaciones SP3.4 (traducción de tabla a estadístico), alcanzando un mayor porcentaje en 7º (44,5%) y en 8º curso (39%). SP2 (construcción de tablas de una variable), se presenta con mayor fuerza en 6º (30,4%) y 7º (28,9%) curso. Las situaciones SP4 (datos bivariados) son escasas, especialmente SP4.2 pues estos contenidos son considerados tangencialmente en el currículo del nivel educativo analizado (MINEDUC, 2015, 2018).

Lenguaje

El lenguaje, de acuerdo al EOS, media las prácticas en la resolución de situaciones problema debido a su carácter representacional y operativo (Godino et al., 2007; 2019). En los textos se detecta una variedad de lenguajes ligados a la tabla estadística, como: Verbal, predomina en los textos, independiente del curso y se utiliza para indicar etiquetas de la tabla (título, variables) o en modalidades de la variable cuando es cualitativa; Simbólico, varían dependiendo del curso, en 5º y 6º curso los son símbolos escasos y se centran en operadores (=, %), y el símbolo de la media aritmética ($\bar{x}$). En 7º y 8º curso aparecen símbolos para representar el número total de observaciones (N) y la variable junto a las frecuencias ordinarias y acumuladas (ni, fi, Ni), la mediana y moda (Me, Mo). En 8º curso se incorporan los intervalos de clase ([…), (…]), y los símbolos de las medidas de posición (Qn, Pn, Dn); Numérico, en el cuerpo de datos de la tabla aparecen diferentes tipos de números como enteros, decimales o fracciones para representar las diferentes frecuencias.

Procedimientos

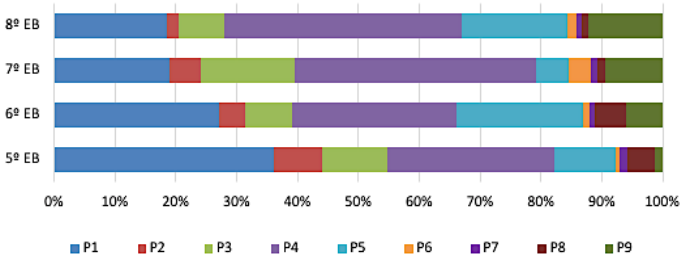
Los procedimientos son los algoritmos o estrategias aplicadas en una tabla, y que permiten resolver una situación problema. Se identificaron nueve tipos de procedimientos: P1. Leer una tabla, consiste en extraer información explícita o implícita a partir de la tabla; P2. Completar una tabla. Es terminar una tabla incompleta, incorporando valores de la frecuencia, totales o modalidades de la variable; P3.

Construir tabla. Es la organización de datos en una tabla de distribución de una variable o de doble entrada; P4. Calcular estadísticos a partir de la tabla. Son los cálculos realizados con los datos de la tabla como determinar medidas de centralización, posición, dispersión, así como el cálculo de probabilidades; P5. Construir un gráfico. Se representa gráficamente la información entregada a través de una tabla estadística o viceversa; P6. Describir variables. Se trata de identificar y describir el tipo de variables representada en una tabla estadística; P7. Inventar un problema o tabla. Es crear un contexto o una tabla para que la información aportada cobre sentido; P8. Recoger datos. Consiste en la recolección de datos por el propio estudiante; Y P9. Argumentar. Es la acción de justificar decisiones o procedimientos en torno a la información presentada en la tabla estadística.

En la Figura 2 se aprecia que P1 (leer tabla) decrece conforme se avanza de curso, y lo contrario ocurre con P9 (argumentar) que se incrementa su presencia en cada curso, mientras que P4 (calcular) aparece en todos los cursos, alcanzando su mayor porcentaje en 7º (39,7%) seguido de 8º (39%) curso.

Figura 2.

Porcentaje de tipos de procedimientos por curso.



Conceptos y propiedades

Los conceptos identificados para este nivel educativo son vinculados a la construcción de tablas (variables, valores, intervalos de clase, extremos y marca de clase), y tipos de frecuencias (absoluta, relativa, porcentual, acumulada), en la tabla de doble entrada se consideran las frecuencias: dobles, marginales, condicionales. Además, se incorporan otros conceptos como la probabilidad, y las medidas de centralización, posición y dispersión. Las propiedades describen características de los conceptos, en este caso las principales propiedades describen las relaciones entre los diferentes tipos de frecuencias que se pueden representar en la tabla estadística.

Argumentos

Cuando se justifica un enunciado o procedimiento se emplean conceptos y propiedades, en este sentido las argumentaciones consideran no sólo las demostraciones formales deductivas, sino que cualquier enunciado utilizado para justificar. En los textos se plantean, por ejemplo, situaciones que requieren justificar la veracidad de una serie de afirmaciones sobre la información expuesta en una tabla, así como justificar la elección de una medida como la más representativa de una distribución presentada en una tabla, a partir del estudio de las medidas de tendencia central.

CONCLUSIONES

El análisis de los objetos matemáticos muestra diferentes niveles de formalización conforme se avance de curso. En este sentido, se observa una amplia presencia de situaciones problema de traducción de tabla a estadístico (39.7%), seguido de la construcción de la distribución de una variable

(23%), siendo escasas las situaciones ligadas a la recolección de datos (12.2%) y recomendadas por los lineamientos curriculares (MINEDUC, 2018). La mayoría de los procedimientos son de cálculos (36.3%) para determinar estadísticos. Se observó un predominio del lenguaje verbal, mientras que los símbolos, se centraban en operadores en 5º y 6º curso, y símbolos para representar los tipos de frecuencias y medidas de tendencia central en 7º y 8º curso. Consideramos que el análisis de los elementos primarios del EOS (Godino et al., 2007; 2019), es una herramienta metodológica útil para profundizar e identificar la configuración de los diferentes objetos matemáticos en torno a la tabla estadística, de los cuales los profesores encargados de su enseñanza, en ocasiones, no son conscientes.

AGRADECIMIENTOS

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 (MICIN), Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía) y Beca ANID Folio: 72190280.

REFERENCIAS

Estrella, S., y Estrella, P. (2020). Representaciones de datos en estadística: De listas a tablas. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(1), 21-34.

Fan, L., Zhu, Y., y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 45*(5), 633–646.

Gea, M. M., Batanero, C., Fernandes, J. A., y Gómez, E. (2014). La distribución de datos bidimensionales en los libros de textos de matemáticas de Bachillerato. Quadrante, *23*(2), 147-172.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

Mayring P. (2020). Qualitative Inhaltsanalyse. En Mey G., y Mruck K. (Eds.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie* (pp. 495-511). Springer.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2015). *Bases curriculares 7º básico a 2° medio*. Autor.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2018). *Bases curriculares Primero a Sexto Básico*. Autor.

National Council of Teacher of Mathematics [NCTM]. (2014). Principles to actions: Ensuring mathematical success for all. Autor.

Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L., Vásquez Ortiz, C. A., y Alsina, Á. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y de datos en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Secundaria. *Números*, 104, 217-238.

Wild, C. J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-248.

COMPRENSIÓN DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO BÁSICO A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Francisca Ossandón, Maudi Tapia, Nielka Rojas, Ricardo Guerrero

Universidad Católica del Norte

francisca.ossandon01@alumnos.ucn.cl, maudi.tapia@alumnos.ucn.cl, nrojas03@ucn.cl, rguerrero@ucn.cl

Se presenta una propuesta de enseñanza que se orienta a la comprensión de las Medidas de Tendencia Central en estudiantes de 7° Básico a partir de la resolución de problemas en contexto. En esta fase del estudio se presenta el diseño de las situaciones que intenciona la inferencia para la toma de decisiones, en el cual los datos se ajustan para analizar los significados de las Medidas de Tendencia Central, los cuales fueron evaluados para su posterior análisis.

Medidas de Tendencia Central, Educación media, Didáctica de la estadística.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La estadística es un área que está presente en el diario vivir, por ejemplo, en los medios de comunicación y en las redes sociales, en el cual se presentan datos condensados y organizados en tablas, diagramas, entre otros (Núñez, 2019). Esto implica el análisis, comprensión y toma de decisiones en situaciones, usando intuiciones auxiliares que son parte del desarrollo del pensamiento estocástico (López–Mojica et al., 2018). Este pensamiento se apoya en la teoría de la probabilidad y en la estadística inferencial, así como en la estadística descriptiva y la combinatoria (León y Pérez, 2019), estableciendo un medio provechoso para desarrollar parte importante del desarrollo cognitivo de las personas. Así, la alfabetización estadística es parte de la formación integral de un estudiante y ciudadano (Batanero, 2000), debido a que incluye las habilidades básicas para entender información estadística (Zapata, 2011), tales como "argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información, evaluar diferentes representaciones, de acuerdo con su pertinencia con el problema por solucionar, argumentar inferencias acerca de parámetros o características de una población" (MINEDUC, 2019, pp. 263). Ayudándonos este pensamiento a desarrollar la capacidad de leer e interpretar de manera crítica la información presentada a diario, y en base a esto tener una opinión fundada al momento de tomar decisiones. De esta manera, es fundamental para el desarrollo del pensamiento estocástico comenzar a trabajar la estadística desde una edad escolar temprana, conforme a un aprendizaje constructivista para que el conocimiento pueda evolucionar hacia construcciones teóricas más complejas.

La matemática en el Currículum Nacional está dividida por distintos ejes, siendo uno de estos el eje de Datos, Probabilidad y Estadística el cual se presenta desde 1° Básico hasta 4° Medio. El Currículum Nacional explica la importancia del eje de Datos y Probabilidad para niveles de 1° a 6° Básico, con la necesidad de que todos los estudiantes registren, clasifiquen y lean información dispuesta en tablas y gráficos, y que se inicien en temas relacionados con las probabilidades (MINEDUC, 2018). Para niveles de 7° Básico a 2° Medio, el eje de Probabilidad y Estadística busca formar estudiantes críticos que puedan utilizar la información para validar sus opiniones y decisiones; que sean capaces de determinar situaciones conflictivas a raíz de interpretaciones erróneas de un

gráfico y de las posibles manipulaciones intencionadas que se pueden hacer con los datos (MINEDUC, 2015). Para 3° y 4° Medio la asignatura de Matemáticas busca que los estudiantes continúen desarrollando su capacidad de análisis, estudio y resolución para favorecer su tránsito al mundo laboral y profesional, y promover su contribución a la comunidad local, nacional y global, es así como el objetivo del área de la estadística sea tomar y fundamentar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis crítico de datos estadísticos.

La estadística por ser un área de la matemática ha adoptado el mismo carácter determinista que ésta. Sin embargo, esta área tiene por naturaleza un carácter no determinista, debido a su variabilidad (Zapata, 2011), lo que hace fundamental en la enseñanza escolar que los temas de las Medidas de Tendencia Central (MTC) se trabajen en relación con la naturaleza de las variables. En particular, dentro de las Bases Curriculares de 7° Básico, se busca que los estudiantes comprendan las MTC y el rango (MINEDUC, 2015); que los estudiantes sean capaces de utilizar estas medidas estadísticas para comparar características y realizar inferencias acerca de los datos presentados en base a la Resolución de Problemas (RP).

Debido a lo mencionado anteriormente, trabajar la RP sobre las MTC es complejo, ya que la información no se presenta como un conjunto de datos ordenados, y es aquí cuando los estudiantes se ven obligados a inferir el procedimiento que se debe seguir para llegar a la respuesta del problema propuesto. En la literatura se reportan dificultades de comprensión del significado de estas medidas estadísticas, siendo necesario una enseñanza de forma progresiva (Estrella, 2008). Esto lleva a plantearnos ¿qué significados otorgan los estudiantes de 7° Básico a las Medidas de Tendencia Central a partir de la resolución de problemas en contexto? considerando que estos conceptos son complejos de aplicar en algunas situaciones y que no se tiende a discriminar estas medidas.

Al desarrollar una educación basada en problemas en contexto, en que se busque potenciar la participación del estudiante, amerita el análisis previo de las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las MTC con el fin de prevenir estos posibles fenómenos (Estrella, 2008). Sin embargo, esta tarea asignada al profesor no termina con presentar problemas contextualizados, sino que debe propiciar un segundo momento que permita una discusión sobre el problema planteado, una reflexión de las respuestas obtenidas y finalmente un balance de lo aprendido. Por lo tanto, es una tarea que se profundiza desde la planificación, la gestión en el aula y la evaluación de este proceso. Asimismo, es tarea docente instigar al estudiante para propulsar la reflexión sobre lo desarrollado; es más, según Onuchic y Gomes (2014) en la práctica el profesor plantea a los estudiantes (o viceversa) nuevas problemáticas, relacionadas con el problema inicial, con el objetivo de distinguir si se logró la comprensión de los elementos matemáticos presentados durante la clase – las Medidas de Tendencia Central en nuestro caso – y así profundizar e incrementar la comprensión sobre el contenido, generando un ciclo continuo entre la construcción de nuevos conocimientos y la resolución de nuevos problemas.

Dificultades de las Medidas de Tendencia Central

Las Medidas de Tendencia Central si bien pueden presentarse de manera intuitiva, enmascaran una complejidad cuando no son bien comprendidas (Mayén, 2009). Esta complejidad nos invita a trabajar en profundidad las MTC desde los primeros niveles de la educación de manera progresiva, adaptando las tareas a un contexto cercano y con diseños de situaciones didácticas que favorezcan un aprendizaje significativo.

Tabla 1.

Facilidades y dificultades de las MTC.

MTC	Facilidades	Dificultades
Media Aritmética	Puede considerarse como la mejor estimación posible. Se puede emplear para conseguir una distribución uniforme. Es representativa cuando el conjunto de datos es simétrico. Es útil para comparar dos poblaciones. Una serie de datos solo tiene una Media. Todos los valores son incluidos en el cálculo de la Media.	Si alguno de los valores es extremadamente grande o extremadamente pequeño, la Media no es apropiada para representar la serie de datos. Los estudiantes sueles excluir los valores nulos de la cantidad total de datos. En vista que los estudiantes recurren habitualmente al algoritmo, la comprensión de este concepto es deficiente.
Moda	No se afecta por valores extremos. Puede no existir o no ser única.	Puede haber confusión a la hora de afrontarse a un conjunto de datos en el cual todos sus datos tengan los mismos valores, estando ante una distribución amodal.
Mediana	La Mediana de un conjunto de datos es única. El valor de la Mediana no es sensible a la presencia de datos extremos. Fácil de determinar en datos no agrupados.	Los estudiantes no evidencian que la Mediana se refiere a un conjunto ordenado de datos. Cuando los datos son pares, se les complica el cálculo de la Mediana. Puede no pertenecer al conjunto de datos.

Considerando lo anterior, esta experiencia de aula, por medio de problemas en contexto, busca generar una disyuntiva en los estudiantes al momento de determinar qué medida resulta ser la más representativa según el problema enunciado, para lograr una comprensión más profunda de las MTC en vista de que éstas pueden interpretarse de distintas formas en el contexto de resolución de problemas de planteo. A partir de ello, analizar cómo los estudiantes comprender las tres principales medidas de tendencia central (Media Aritmética, Moda y Mediana) de acuerdo a los aprendizajes para 7° año básico.

PROPUESTA DE ENSEÑANZA

El estudio general sigue la metodología de investigación de enfoque mixto, con el fin de demostrar si se cumple el objetivo de la propuesta de enseñanza, que presenta un diseño transversal de tipo descriptivo no experimental (Hernández et al., 2010). Para efecto del diseño del material de enseñanza se consideran las dificultades asociadas al tema de MTC, la progresión curricular y el contexto. La propuesta, se orienta a 7° Básico, considerando cuatro situaciones sobre la Media Aritmética, la Moda y la Mediana, correspondiente al eje temático de Probabilidad y Estadística (OA 17). Además, contempla los indicadores de logros propuestos para este objetivo.

Las situaciones van modificando los datos, para que los estudiantes puedan ir analizando el comportamiento de las MTC y sus características. El problema inicial se plantea en contexto de las Redes Sociales (RR.SS.) en vista de que solo en Chile, el 78% de los niños, niñas y adolescentes usuarios de internet tienen un perfil creado en Redes Sociales o en un juego (Cádiz et al., 2017).

Problema en contexto
Se sabe que hoy en día existen los llamados *influencers* quienes ganan dinero a través de las Redes Sociales, como por ejemplo los *streamers* en *Twitch*, los *tiktokers* en *TikTok*, los *youtubers* en *YouTube*, entre otros. Para una campaña de recaudación de fondos por el cambio climático, se quiso juntar a un grupo de 20 *influencers* divididos en dos "casas de *influencers"*, con 10 personas cada casa, para que puedan donar un porcentaje de los ingresos que reciben en el mes. La "Casa 1" tiene un ingreso promedio de 2600 USD (dólares estadounidenses) durante el primer mes de recaudación y la "Casa 2" tiene un ingreso promedio de 5600 USD (dólares estadounidenses) durante el mismo periodo de tiempo.

En este problema acercamos a los estudiantes a la Media Aritmética, para que en base a ella logren tomar decisiones, generando un análisis sobre la medida y sus características, esto se presenta en la Situación 1 "Las dos casas mencionadas buscan un rostro nuevo y joven que pueda aportar con un contenido innovador. Si recibieras la invitación de unirte a una de las dos casas, ¿Cuál casa elegirías?, ¿por qué?". Con esta situación se busca que los estudiantes tomen una decisión influenciada por la diferencia presentada en la Media Aritmética de ambas casas.

Luego, la Situación 2 entrega el conjunto de datos de ambas poblaciones para que evalúen si la decisión tomada en la situación anterior era la más representativa, buscando que los estudiantes puedan argumentar que los promedios por si solos no son suficientes para la toma de la decisión y que para lograr esto deben recurrir a la Moda y la Mediana. Esto debido a que estos dos estadísticos no son fuertemente influenciados por los valores extremos, y la Media Aritmética si es sensible a la presencia de valores extremos como en esta situación. Además, en esta situación, cuando los estudiantes recurran a calcular la Mediana, deberán aplicar el cálculo para cantidad de datos pares, que, mencionado anteriormente, es una dificultad presentada por los estudiantes.

Para la Situación 3, modificamos los valores para que la Media Aritmética varíe. En esta ocasión trabajamos con valores nulos para poder evaluar si los estudiantes lo incluyen dentro de la cantidad total de datos o lo dejan fuera, como una las dificultades mencionadas. La intención de esta situación es que los estudiantes vean cómo el promedio se ve afectado al incluir en valor nulo.

Finalmente, la Situación 4 aborda el concepto de Moda. En este caso, presentamos una alteración de los datos de tal manera que los estudiantes se vean afrontados a trabajar con distribuciones amodales y plurimodales. En esta situación, la Casa 1 representaría una distribución de datos amodal, debido a que para poder concluir que existe una Moda, la frecuencia de este valor debería poder ser comparada a otros valores distintos a él. Sin embargo, como todos los datos tienen el mismo valor, estos no pueden ser comparados. Para el caso de la Casa 2, tenemos cuatro valores distintos, los cuales pueden ser comparados entre ellos, donde tres de ellos tienen la misma frecuencia, por lo tanto, es una distribución de datos plurimodal.

No obstante, puede que existan estudiantes que identifiquen la Moda de la Casa 1 como 2600 USD, debido a que para ellos la Moda puede representar el valor que más se repite. Sin embargo, no se comprende que es el valor que más se repite con respecto a otros valores del conjunto de datos. Por otro lado, en la Casa 2 puede que no identifiquen Moda debido a que no hay solo un dato que se repite, sino, en este caso, tres valores; es decir, la Casa 2 es plurimodal.

El material de enseñanza diseñado se implementa en dos clases, en que se sigue la secuencia de problemas planteados, en contexto sobre las MTC en que los estudiantes deben analizar el comportamiento de las MTC, infiriendo cuál medida utilizar para la toma de decisiones. Finalizando la secuencia de situaciones, se implementa un cuestionario, el cuál será el instrumento del que se extraerán las respuestas para los respectivos análisis.

RESULTADOS PRELIMINARES

La propuesta de enseñanza fue aplicada en dos cursos de 7° básico, participando un total 81 estudiantes. Respecto de la situación que buscaba que los estudiantes tomarán una decisión influenciada por la diferencia presentada en la Media Aritmética de las casas, un 34,72% contestó correctamente, 11,11% medianamente y un 54,17% estuvo incorrecta la respuesta. Esto llevó a indicar a los estudiantes que, si al conjunto de datos se le agregan valores extremos, ¿qué sucede con la Media Aritmética?, señalando “se va ordenando de mayor a menor”, “no funciona mucho porque hay que dividir”, “no da un promedio”, entre otras, no recociendo que la Media Aritmética cambia al considerarse más datos.

Para el caso de la moda se obtuvo mejores resultados, contestado los estudiantes correctamente un 45,83%, medianamente 16,67% y no logrado un 37,50%. Los estudiantes argumentaron que los promedios por si solos no son suficientes para la toma de la decisión y que para lograr esto deben recurrir a la Moda o la Mediana en algunos casos.

Las preguntas relacionadas con la Mediana presentaron mayores dificultades un 13,89% contestó correctamente, un 6,94% mediamente y un 79,17% no respondió de manera correcta. Los estudiantes en su mayoría para el cálculo consideraron el dato central.

Nos encontramos en fase de análisis de la información obtenida, que esperamos discutir a la luz de la teoría y presentar conclusiones en la jornada.

REFERENCIAS

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las Medidas de Posición Central. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 25,* 41-58.

Estrella, S. (2008). Medidas de tendencia central en la enseñanza básica en Chile. *Revista Chilena de Educación Matemática, 4*(1)*,* 20-32.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (5a. ed.). Interamericana Editores.

León A., y Pérez C. (2019). Análisis estadístico en investigaciones positivistas: Medidas de tendencia central. *Revista Orbis, 43*, 50-60.

López-Mojica, J., Ojeda, A., y Salcedo, J. (2018). Ideas fundamentales de estocásticos en libros de texto de educación primaria: una alternativa de enseñanza. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH*, *9*(17), 87-102.

Mayén, S. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato* [Tesis doctoral, Universidad de Granada, España].

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2015). *Bases Curriculares*. *7° Básico a 2° Medio*. Autor.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2018). *Bases Curriculares. 1° Básico a 6° Básico*. Autor.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2019). *Bases Curriculares. 3° Medio a 4° Medio*. Autor.

Nunes, C. y Santana, E. (2017). Resolução de problemas- um caminho para fazer e aprender matemática. *Acta Scierntiae*. *19*(1), 2-19.

Núñez, J. (2019). *Análisis del conocimiento de las medidas de tendencia central que emplean los niños de quinto grado* [Tesis de Maestría, Universidad del Norte, Colombia].

Onuchic, L., y Gomes, N. (2014). Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? *Resolução de problemas: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial*, (35), 35-52.

Zapata, L. (2011). ¿Cómo contribuir a la alfabetización estadística? *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 33,* 234-247.

EL EXPERIMENTO DE LA CAJA NEGRA: UNA APP DIGITAL QUE APOYA EL RAZONAMIENTO INFERENCIAL DESDE KÍNDER

Soledad Estrella, Brahiam Ramírez

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Soledad.estrella@pucv.cl, Brahiam.ramirez@pucv.cl

Las tecnologías son indispensables para hacer y aprender estadística. Este estudio busca contribuir a la investigación sobre procesos de modelado estadístico temprano respaldados por tecnología, específicamente, con una aplicación digital que apoya la comprensión conceptual en aspectos del razonamiento inferencial informal, RII, que permite explorar muestras y razonar sobre ellas. A través de una situación lúdica, se indaga en los conceptos de muestra, muestreo repetido, distribución de frecuencia y distribución muestral; mediante una entrevista clínica a una niña de 5 años y 6 meses, del grado K, en la que detectamos desafíos en la promoción del RII en Kínder.

TIC, Estadística temprana, Inferencia estadística informal.

INTRODUCCIÓN

Las tecnologías digitales permiten a los estudiantes construir modelos estadísticos y usar estos modelos para simular datos de muestreo y, por lo tanto, ofrecen medios para el razonamiento estadístico con datos (Biehler et al., 2017). Algunos investigadores proponen un enfoque de modelado estadístico para la inferencia que se basa en las intuiciones de los alumnos sobre los factores que influyen en los fenómenos y que requiere que los estudiantes construyan modelos, incluso desde los primeros años escolares (Estrella et al., 2022a; Patel y Pfannkuch, 2018).

Las tecnologías para el modelado estadístico tienen el potencial de profundizar la comprensión conceptual de los estudiantes sobre estadística y probabilidad, las que permiten la exploración de datos mediante el despliegue de técnicas al usar la herramienta (van Dijke-Droogers et al., 2021). Asimismo, ofrecen posibilidades para visualizar conceptos que antes no se podían ver, como el comportamiento aleatorio (Pfannkuch et al., 2018). Tales herramientas digitales educativas, brindan oportunidades para el razonamiento estadístico con datos, ya que los estudiantes construyen modelos estadísticos y los usan para simular datos de muestras (Biehler et al., 2017).

¿Qué es el experimento físico de la caja negra?

La constitución y estructura de la caja (botella en nuestro estudio) es irrelevante, lo que se tiene en cuenta es el comportamiento del sistema (entradas y/o salidas, bolitas de dos colores en nuestra propuesta) y el sistema es negro en tanto el observador no lo puede abrir y conocer su contenido.

Un experimento de caja negra es considerado una herramienta de enseñanza para introducir el método científico en la resolución de problemas, puesto que son situaciones que plantean un misterio hipotético. El experimento propuesto es fácil de investigar, observable y sencillo (obtener muestras de bolitas de colores de tres botellas), y los estudiantes pueden usar lo que observan para crear una hipótesis/conjetura, recopilar datos, explorar las muestras y llegar a realizar una inferencia que expresa la fuerza de la evidencia.

Se reconoce que el enfoque basado en el muestreo repetido de una caja negra con bolitas de colores parece ayudar a los estudiantes a desarrollar conceptos estadísticos (Estrella et al., 2022b; Van Dijke-

Droogers et al., 2021). Algunas formas de mejorar el nivel de comprensión de los estudiantes sobre el modelado estadístico incluyen técnicas para explorar muestras, y comparar cómo el comportamiento de la muestra imita el comportamiento de la población con la herramienta digital (Chance et al., 2004). Como tal, la comprensión conceptual del modelado estadístico implica la construcción, la aplicación y la interpretación de modelos estadísticos independientes del contexto (en nuestro estudio, la distribución muestral del muestreo repetido) para responder a problemas de la vida real en una situación lúdica.

METODOLOGÍA

Este estudio es parte de un estudio de diseño más amplio sobre RII, centrado en el diseño de una trayectoria de aprendizaje, y cuyas actividades de aprendizaje introducen los conceptos claves de muestra, muestreo repetido, distribución de frecuencia y distribución muestral.

La presente comunicación se centra en el papel de una aplicación digital, centrada en el experimento de la caja negra bajo un modelo de urnas, en la comprensión conceptual de la inferencia estadística informal. El applet de GeoGebra, integrada dentro de una página web que la dota la interactividad, fue diseñada por la autora principal y construida por el coautor. A nivel de piloto de la aplicación digital (app), se analiza cómo una niña de 5 años y 6 meses, de grado K, -quien ha trabajado anteriormente con material concreto (botellas con bolitas de dos colores)- interactúa con la app digital y expresa su razonamiento a través de una entrevista clínica semiestructurada.

Situación

El experimento de la caja negra se presenta con tres botellas, cada una contiene 100 bolas de dos colores diferentes (morado y amarillo). Las 100 bolas de cada botella, 1-2-3, están en distinta proporción de bolas de color amarillo, de 15-25-35% respectivamente, en las que no se puede ver su contenido en totalidad debido a que están tapadas por una gran etiqueta. En este experimento, los estudiantes interactúan con la app, pudiendo "revolver" cada botella y solo viendo a través de una pequeña ventana (parte inferior de la botella) que permitiría ver 10 bolas.

El supuesto base de la historia se circunscribe a piratas, y plantea las perlas de oro (bolas amarillas) como valiosas, por tanto, es necesario reconocer aquella botella cuyo contenido tiene más bolas amarillas. Para ello, el estudiante puede investigar el contenido de cada botella (caja negra) mediante la extracción de muestras y comparar la cantidad de "perlas de oro" de la muestra. La app permite recopilar los resultados de las muestras, botella con más perlas de oro, mediante un diagrama de puntos que se va generando.

Los conceptos clave en juego son muestra, variabilidad del muestreo, muestreo repetido y distribución muestral. La tarea se enfoca en hacer inferencias sobre poblaciones desconocidas a partir de muestras observadas sin usar técnicas formales y en predecir el número de bolas amarillas en la caja negra a pesar de que solo "algo se ve" a través de la ventana.

Aplicación digital

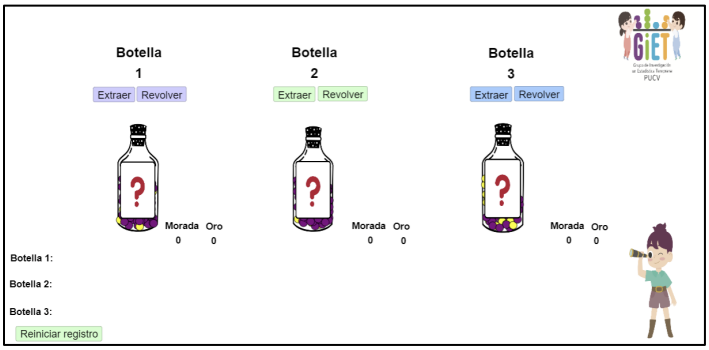
El recurso fue elaborado por medio de la plataforma de GeoGebra disponible desde cualquier navegador web. La app digital está basada en la simulación de extracción de bolas (perlas) de dos colores (morada y oro) y, la situación valora la extracción de perlas de oro existente dentro de botellas. La Figura 1 representa la pantalla para quien accede por primera vez a esta app, la cual dispone de

una interfaz interactiva por medio de botones en pantalla, los que permiten ejecutar una extracción aleatoria de una de las perlas que están dentro de cada una de tres botellas.

Luego, al realizar una extracción en cualquier botella (presionando el botón de extraer en la botella respectiva), se inicia un contador con el resultado de la extracción (en la Figura 1 todos los contadores están en 0), y la bola extraída aleatoriamente queda sobre la botella representando la extracción realizada (lo que eventualmente va cambiando en cada extracción realizada). Asimismo, la frecuencia absoluta de cada categoría de la variable (color de bola) es representada por medio de bolas al costado de la botella, generándose un diagrama de puntos que permite visualizar tanto la altura como el número que representa tal frecuencia.

Figura 1.

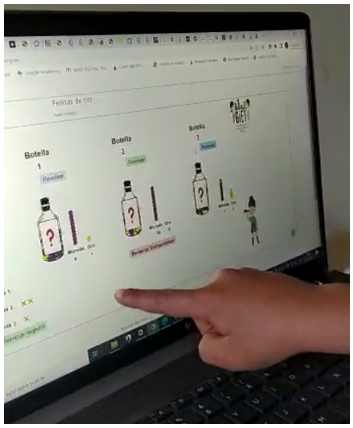
App de extracción de perlitas de oro antes de iniciar la interacción.



La app se ha configurado para realizar 10 extracciones por botella, por lo que una vez que la suma de los dos contadores de bolas llegue a 10, se ocultará el botón de extracción inhabilitando dicha acción sobre la botella en la cual se interacciona. En la Figura 2, se aprecia que está habilitada la acción de extraer, además de aparecer un nuevo botón de interacción que permite volver a realizar extracciones.

Figura 2.

Momento de la entrevista clínica en que la niña interactúa con la App tras realizar muestreo repetido.



También se observa en la Figura 2 el botón Revolver, este tiene como finalidad la simulación del uso de una botella para el experimento que permite "revolver" las bolas (tal como se podría hacer con material concreto), cuya acción fue configurada como la reagrupación de puntos dentro de un polígono delimitado por el contorno de la botella. Por último, cuando se procede a realizar 10

extracciones por cada una de las tres botellas, se registra en un marcador qué botella ha obtenido la mayor cantidad de bolas de color amarillo (perlas de oro en la situación), cuyo marcador también tiene un límite de registro de 10 marcas por botella, solicitando al estudiante reiniciar el contador (botón habilitado en la parte inferior izquierda).

Recopilación de datos

Los datos se recolectaron mediante grabaciones de video y audio en dos sesiones de una entrevista clínica semiestructurada de 15 minutos. En la primera sesión, se pidió que la niña manipulara el material concreto, y en la segunda sesión, que se aborda en esta comunicación, que interactuara con la app. Específicamente, se le solicitó a la niña que expresara sus razonamientos mientras resolvía la situación y se le instó a pensar en voz alta a través de preguntas como: ¿qué crees?, ¿por qué?, ¿me puedes decir lo qué piensas? La entrevista clínica semiestructurada fue conducida por uno de los investigadores, quien la condujo con un computador portátil en cuya pantalla se mostraba la app.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

La app permite visualizar el muestreo repetido, explorar dichas muestras e interpretar la distribución muestral. El análisis de la entrevista clínica consistió en la detección de componentes propios del RII: la inferencia más allá de los datos, la integración de la evidencia basada en los datos y la expresión del lenguaje probabilístico.

La niña obtuvo muestreos repetidos, en que aleatoriamente una de las tres botellas presentaba más bolas amarillas. La expresión del razonamiento de la niña, aunque breve y con uso de sus dedos para indicar y contar, permitió detectar que ella no valoraba que ganará repetidamente la botella 3 (con mayor proporción de “perlas de oro”), sino que ganaran las demás botellas (quizás en el sentido del sesgo de equiprobabilidad o de cierto espíritu de justicia, todos pueden ganar). Ella eligió la botella 1 “porque aún no ha ganado”, “ahora le toca” (en el sentido de la falacia del jugador), y señaló que la botella 2 no la elegiría porque era la botella verde (explicando que el color del botón era verde, el botón que le permitía extraer bolas de la botella, y al parecer ese color no es de su gusto). Solo eligió la botella 3, al señalarle, “¿si tu mamá tiene que elegir la botella con más perlas de oro, la botella que más veces gana, cual le indicarías que eligiera?”.

RESULTADOS

La entrevista clínica ha permitido revelar con más detalle el funcionamiento de la app, en tanto la situación es comprendida con facilidad, y se observó la emergencia de técnicas digitales en el cliqueo con sentido (obtener muestra y comparar muestras), mientras que las extracciones y los resultados toman sentido para la niña. También, la niña comprendió el diagrama de puntos que se iba generando simultáneamente, puesto que comprende los números hasta el 10, los números cardinales, y distingue aquellas alturas mayores, y a veces cuenta los puntos graficados (bolas). Sin embargo, al presionarle por un consejo de ganador, efectivamente, la niña elige la botella ganadora fijando su vista en la mayor frecuencia del diagrama de puntos e indicándola con el dedo, aunque no aparece una inferencia completa, puesto que no se expresa mediante un lenguaje que denote la incertidumbre de la situación.

DISCUSIÓN

Los resultados de la investigación en curso tienen implicaciones para el diseño de materiales y herramientas digitales, y para futuras investigaciones en estadística temprana. Aunque al diseñar materiales para la enseñanza-aprendizaje, hemos tenido en cuenta la relación bidireccional entre las

técnicas digitales emergentes y la comprensión conceptual, se requieren más experiencias a nivel grupal puesto que es un desafío detectar el pensamiento en estas edades, con menor expresión oral del razonamiento y presencia de distintos e incipientes niveles de comprensión numérica.

La app desarrollada para la educación estadística temprana permite ingresar opciones específicas de proporción de bolitas de dos colores en cada botella, lo cual flexibiliza las decisiones docentes y amplía su uso exploratorio, fortaleciendo la comprensión conceptual de los aprendices y su RII. Al diseñar la app "El tesoro de las perlas de oro", la relación entrelazada entre la app y la comprensión conceptual exige una consideración atenta de cómo este recurso se relaciona con los conceptos asociados al RII, ello requiere de precisión de las preguntas docentes a los estudiantes (Isoda et al., 2021). La app ha sido diseñada en consenso por 4 investigadores, junto con ciclos de mejora y rediseño y, esperamos que sea un recurso más en el monitoreo temprano y desarrollo del RII.

Asimismo, proyectamos seguir indagando respecto a la confusión común entre muestra y distribución muestral, ya que la visualización distinta de la muestra y los resultados del muestreo dentro la app digital permitiría a los estudiantes distinguir entre ambas distribuciones.

AGRADECIMIENTOS

Proyecto Fondecyt N° 1200346.

REFERENCIAS

Biehler, R., Frischemeier, D., y Podworny, S. (2017). Editorial: Reasoning about models and modeling in the context of informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal, 16*(2), 8–12.

Chance, B., DelMas, R., y Garfield, J. (2004). Reasoning about sampling distributions. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 295–323). Kluwer Academic.

Estrella, S., Méndez-Reina, M., Olfos, R., y Aguilera, J. (2022a). Early statistics in kindergarten: Analysis of an educator's pedagogical content knowledge in lessons promoting informal inferential reasoning. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 11*(1), 1-13.

Estrella, S., Méndez-Reina, M., Salinas, R., y Rojas, T. (2022b). The mystery of the black box: An experience of informal inferential reasoning. En G. Kaiser y B. Sriraman, *Student's Interactions with Data in Teaching Statistics: International Perspective*. Springer.

Isoda, M., Estrella, S., Zakaryan, D., Baldin, Y., Olfos, R., y Araya, R. (2021). Digital competence of a teacher involved in the implementation of a cross-border lesson for classrooms in Brazil and Chile. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 10*(4), 362-377.

Patel, A., y Pfannkuch, M. (2018). Developing a statistical modeling framework to characterize year 7 students' reasoning. *ZDM-Mathematics Education, 50*(7), 1197–1212.

Pfannkuch, M., Ben-Zvi, D., y Budgett, S. (2018). Innovations in statistical modeling to connect data, chance and context. *ZDM-Mathematics Education, 50*(7), 1113–1123.

Van Dijke-Droogers, M., Drijvers, P., y Bakker, A. (2020). Repeated sampling with a black box to make informal statistical inference accessible. *Mathematical Thinking and Learning, 22*(2), 116–138.

Van Dijke-Droogers, M., Drijvers, P., y Bakker, A. (2021). Statistical modeling processes through the lens of instrumental genesis. *Educational Studies in Mathematics, 107*(2), 235-260.

APROXIMACIONES INTUITIVAS A LA PROBABILIDAD SUBJETIVA. UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES DE 12-13 AÑOS DE UN SÉPTIMO BÁSICO

Teresita Méndez Olave[1], Ismenia Guzmán Retamal[2]

[1]Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, [2]Universidad de Los Lagos

teresita.mendez@umce.cl, ismenia.guzman@lagos.cl

Presentamos una experiencia realizada con alumnos de séptimo básico. El propósito es motivar la modificación de sus creencias personales ante un suceso aleatorio. El diseño de la situación es adidáctica, basada en las fases de acción y formulación, las nociones de Contrato y Medio Didáctico de la Teoría Situaciones Didácticas, Brousseau y principios de la Probabilidad subjetiva. El diseño metodológico considera algunas fases de la ingeniería didáctica, Artigue (1990-95). Los resultados permitieron identificar criterios de decisión mediante los cuales los estudiantiles se relacionaron con la incertidumbre, estos criterios podrían generar en la enseñanza, aproximaciones intuitivas a la probabilidad subjetiva.

Creencias, Criterios de decisión, Apuestas, Contrato y Medio Didáctico, Probabilidad subjetiva.

INTRODUCCIÓN

Expresiones del lenguaje cotidiano, tales como: ‘es probable que’, ‘es poco probable’, ‘es muy probable que’ son alocuciones que parecen representar las primeras ideas sobre el azar que generan niños y adultos al decidir el grado de confirmación de sucesos inciertos, (Batanero, 2005. Vásquez y Alsina 2014, 2017). Estas expresiones corresponderían en la enseñanza a una aproximación a esta noción y a la asignación de una medida de probabilidad.

Batanero (2005) identifica cinco significados de la probabilidad especialmente el intuitivo y el subjetivo, caracterizados por generar un lenguaje particular a partir de expresiones cotidianas utilizando términos propios de la probabilidad para la toma de decisiones. Fischbein (1985), ha puesto en evidencia la influencia de la intuición en la reconstrucción de concepciones de los alumnos desde vagas intuiciones primarias a intuiciones secundarias desarrolladas por la instrucción escolar, citado en Batanero et al. (2001), con el fin de desarrollar el razonamiento probabilístico desde la perspectiva de una teoría formalizada.

En este estudio consideramos investigaciones como la de Huber y Huber (1987) que, plantea:

> los niños pueden utilizar sus conocimientos o creencias personales al comparar las probabilidades de eventos aleatorios en contextos de deportes y de apuestas y que sus evaluaciones de probabilidad subjetiva tienden a ser más estables en contexto de juego porque las probabilidades objetivas pueden evaluarse mediante las características del dispositivo aleatorio utilizado en la tarea (citado por Kazak, 2015, p.701).

La investigación de Di Bernardo (2019) ha relevado la importancia de integrar el significado subjetivo de la probabilidad en la enseñanza del razonamiento sobre la incertidumbre, al respecto ella plantea que:

> …prestar atención a los aspectos psicológicos… del concepto de probabilidad, a partir del punto de vista subjetivo (De Finetti, 1931) puede ser una dirección necesaria y útil en la enseñanza (p. 182).

Kazak (2015) experimenta, con cuatro parejas de estudiantes de 10 y 11 años, una situación diseñada en un enfoque subjetivo – bayesiano, relacionado con la equidad de un juego de azar para razonar sobre la incertidumbre. Al respecto, el autor sostiene que el razonamiento inferencial informal de los estudiantes, sobre la equidad de estos juegos, está estrechamente asociado con su grado personal de confianza. Estos hallazgos sobre el razonamiento probabilístico intuitivo y subjetivo nos han motivado a diseñar y experimentar situaciones de enseñanza con niños de séptimo básico para desarrollar el pensamiento probabilístico en la escuela, considerando el enfoque subjetivo de la probabilidad.

Hemos experimentado una situación adidáctica con niños de 12 a 13 años de un séptimo básico, de la cual presentamos el episodio correspondiente a la puesta en común. Confrontamos a los alumnos con una situación de apuestas y esperábamos que la interacción de los niños con la situación los llevara a tomar decisiones para apostar y poner en evidencia sus grados de creencia personal.

Planteamos dos preguntas que orientan nuestra investigación: ¿A qué tipo de apuestas da lugar este juego? y ¿qué criterios de decisión emergen al apostar?

MARCO DE REFERENCIA

Nuestro marco de referencia integra dos marcos teóricos, el de la probabilidad Subjetiva y el de la Teoría de Situaciones Didácticas.

Probabilidad. Significado Subjetivo

La Probabilidad Subjetiva se basa en el supuesto de que toda persona ante una toma de decisión, intuitivamente ajusta sus estimaciones a las reglas del cálculo de probabilidad. Bruno De Finetti y Frank Ramsey, describieron la probabilidad como grados de creencia personal. Para de Finetti la probabilidad es un atributo de nuestras opiniones subjetivas y su valor numérico mide el grado de creencia en la ocurrencia del suceso percibido (Bernardo, 1997). De Finetti plantea que la frase *es probable que* representa el grado de creencia en la ocurrencia de un suceso, el cual corresponde a una probabilidad subjetiva, Bernardo (1997, p. 4). Esta probabilidad procede directamente de la intuición y según Koopman "es la experiencia la que se interpreta en términos de probabilidad", citado en Mateos y Morales (1985, p. 131). Según De Finetti "La probabilidad de que un suceso $\boldsymbol{E}$ ocurra en unas condiciones determinadas H corresponde al máximo precio que un individuo $\boldsymbol{i}$ pagaría por un boleto de apuesta y obtendría un premio, si y solo si el suceso $\boldsymbol{E}$ ocurre ". Esta probabilidad se anota "$P_i(E \ / H)$" (Bernardo,1997), donde P_i representa la probabilidad que una persona $\boldsymbol{i}$ expresa ante la ocurrencia del suceso $\boldsymbol{E}$ según una condición establecida, $\boldsymbol{H}$. La condición $\boldsymbol{H}$ se refiere a las experiencias a priori del sujeto sobre el suceso $\boldsymbol{E}$. Él establece la relación 'más probable que' y demuestra que la condición necesaria y suficiente para que un sujeto $\boldsymbol{i}$, tome decisiones coherentes, y no contradictorias, es que los grados de creencia, satisfagan los postulados de la probabilidad. Para la relación 'más probable que', De Finetti enuncia los postulados siguientes.

1. Un suceso incierto puede ser igualmente probable, más probable o menos probable que otro.

2. Sea A un suceso incierto, A es siempre más probable que un suceso imposible y menos probable que un suceso seguro.
3. Si A, B y C son sucesos cualesquiera tales que A es más probable que B y B es más probable que C entonces A es más probable que C.
4. Si A es más probable que B y A' es más probable que B', se cumple que $A\ U\ A'$ es más probable que $B\ U\ B'$ con tal que A sea incompatible con A' y B sea incompatible con B', citado en Mateos y Morales (1985, p. 189), Torretti (2002), Méndez (2019, p. 126).

Considerando la teoría de la decisión, Ramsey y De Finetti construyeron un sistema de apuestas, basado en tres principios: Coherencia, Intercambiabilidad y Consistencia y estos les permitieron inferir valores de las probabilidades subjetivas (citados en Batanero, 2005; Bernado, 1997).

Teoría de Situaciones Didácticas.

El diseño de la situación experimental está basado en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau 1986a, 2004b; Perrin-Glorian y Hersant, 2003; Margolinas, 1995), enfatizando la noción de situación adidáctica, caracterizada por privilegiar las interacciones de los alumnos con una situación problema; la noción de medio porque proporciona las condiciones en que se sitúa el problema y provee herramientas a disposición de los alumnos, para que realicen la actividad en forma autónoma, de acuerdo con el contrato didáctico. En este caso el medio son las apuestas.

La noción de contrato didáctico juega un rol fundamental al establecer responsabilidades de los actores en la gestión de la clase para la búsqueda de la solución del problema, para que esto ocurra la situación debe contener implícitamente el conocimiento matemático previsto, de manera que en la interacción entre los actores surja ese conocimiento en un ambiente adidáctico (Brousseau, 2004). En este caso el contrato consistió en que había que apostar en dos momentos y los conocimientos previstos son la noción de incertidumbre, la de apuesta y la necesidad de tomar una decisión. También se enfatiza la responsabilidad del profesor en los procesos de devolución e institucionalización. El primero cobra importancia en la interacción de los actores con el problema y el segundo en la toma de conciencia del profesor, y los alumnos, del aprendizaje del conocimiento previsto.

METODOLOGÍA

La metodología de investigación es cualitativa, basada en algunas fases de la ingeniería didáctica: Concepción y análisis a priori de la situación, experimentación, análisis a posteriori y conclusiones (Artigue, 1990, 1995). La muestra son 30 estudiantes de un séptimo básico de un colegio municipal de Molina – Chile.

La situación

Diseñamos una situación adidáctica cuyo medio es un juego de apuesta, el video de una carrera de cuatro caballos, dinero ficticio para apostar y una tarjeta de apuestas. Se propone a los alumnos apostar a un caballo ganador en dos momentos de la carrera. En la primera apuesta los caballos están en la partida y se pide a los alumnos apostar; en la segunda apuesta los alumnos miran el video, este se detiene antes de finalizar la carrera y se pide a los alumnos volver a apostar.

En la gestión de la clase la profesora propone al curso que hagan apuestas en parejas. El contrato didáctico en la clase consiste en acordar con los alumnos que hagan dos apuestas, y también que anoten sus decisiones en la tarjeta de apuestas entregada. En esta situación subyace el enfoque

subjetivo de la probabilidad, pues en la segunda apuesta los alumnos deciden confirmar o cambiar la apuesta, de acuerdo a informaciones relacionadas con las opciones de los caballos en la carrera, estas informaciones corresponden a los a priori de los alumnos y al ***H*** propuesto por de Finetti para una apuesta condicionada en que ***H*** es la condición.

Análisis a priori

Hemos previsto criterios de decisión y tipos de apuestas. Los criterios de decisión son: Apuesta Intuitiva (I), apuesta a un Fetiche (F), apuesta mirando la carrera (D).

I: Es una apuesta al azar, se manifiesta en creencias o en suposiciones categóricas.

F: Es una apuesta en la que se menciona el fetiche, amuleto, color, número u otro.

D: Es una apuesta que refleja las posiciones de los caballos en la carrera.

Los tipos de apuesta son los siguientes.

1. Apuesta genuina, corresponde a apostar todo el dinero a un solo caballo.
2. Apuesta ingenua equitativa corresponde a apostar a más de un caballo en forma equitativa.
3. Apuesta ingenua no equitativa, corresponde a apostar a más de un caballo con preferencia a uno de ellos.

Pensamos que los criterios I y F se manifiesten en la primera apuesta, los caballos están en la partida.

Cuando los caballos están corriendo, la profesora detiene el video y pide a los alumnos apostar nuevamente. Prevemos que los alumnos apostaran a los caballos que van en los primeros lugares y que decidirían su apuesta en base a lo que están mirando.

El criterio previsto para la segunda apuesta es Mirando la carrera (D).

Experimentación: La puesta en común

En la fase de experimentación la profesora explica a los alumnos las reglas del juego y la forma en que se usa la tarjeta de apuestas. Ella juega a apostar con los alumnos para ejemplificar las reglas, utilizando para ello el video de una competencia de atletas.

La profesora establece el contrato didáctico: formar parejas para apostar, primero cuando los caballos están en la partida y luego cuando están corriendo, además escribir las razones de sus apuestas en una hoja de respuesta. Luego presenta un video que muestra una carrera de cuatro caballos.

La puesta en común se produce una vez que las parejas de alumnos han mirado el video y realizado sus dos apuestas. En la descripción de este episodio **P** designa a la profesora, y $\mathbf{A_i}$, i = 1, ..., 30 a los alumnos. Los intercambios después del juego de apuestas son los siguientes:

1. **P**: Cuándo apostaron, ¿estaban seguros de que ganarían la apuesta? ¿Por qué?
2. **A3:** *No, Porque no se sabía si iba a ganar, era algo incierto.*
3. **P:** ¿Qué estaban haciendo al apostar?
4. **A6:** yo y mi compañero estábamos anticipándonos a ver quién iba a ganar y apostamos a quién creímos que ganaría… después las cosas cambiaron y apostamos a otros
5. **P**: Algunos de ustedes ¿Por qué apostaron a un solo competidor?

6. **A7**: *Porque pensamos que iba a ganar;*
7. **A12:** *Se veía confiable.*
8. **P:** Los que cambiaron la apuesta, ¿Por qué lo hicieron?
9. **A2:** *La cambiamos por la posición de quién iba ganando.*
10. **A9 y A18**: *Porque los competidores cambiaron de posición.*
11. **P**: Los que no cambiaron la apuesta, ¿Por qué no lo hicieron?
12. **A5***: Porque confiábamos en él, pero al final igual cambiamos*
13. **A12**: *Por confianza en el competidor.*
14. **A15:** *Por la velocidad que llevaba el caballo.*
15. **P:** ¿Hay alguna estrategia para ganar?
16. Algunos niños: *¡síii!*
17. **A6:** *Apostar $1000 a cada uno, es imposible perder, porque si gana cualquier caballo, gano.*
18. **A8:** *Ganas a la vez que pierdes. Porque ganas con un caballo y con los otros pierdes. Y si ganas vas a perder porque es la misma plata que apostaste.*

En la institucionalización, la profesora señala que el juego de apuestas consiste en una situación de incertidumbre y un desafío; concluyen que "en toda apuesta se toma una decisión frente a un resultado que es impredecible y se corre un riesgo. Así, al apostar equitativamente, como dice A8, se pierde".

Análisis a posteriori

En este episodio A3 y A6, implícitamente, han considerado que en el juego de apuestas hay una situación de incertidumbre y otra de anticipación. En el instante 8, P pregunta ¿por qué modificaron su apuesta? A2, A9, A15 y A18 explican que modificaron su apuesta porque han recibido información mirando el video lo que corresponde al criterio D prevista en el análisis a priori.

En el instante 11, A5, A7 y A12 no modificaron la apuesta, *por confianza*. Estas parejas no respetaron el principio de coherencia de la probabilidad subjetiva, pues no consideran en sus decisiones las posiciones de los caballos en la carrera, corresponde al Criterio I (intuitivo), la apuesta es ingenua.

En el instante 17, A6 ha realizado una apuesta ingenua equitativa y explica *"Apostar $1000 a cada uno, es imposible perder, porque si gana cualquier caballo, gano*". Para A6 apostar es ganar y no se da cuenta que pierde $3000 y obtiene solo $1000. A8 le señala. *"Ganas a la vez que pierdes..."*. Para A8, aparece el significado del juego de apuestas el cual consiste en tomar una decisión y correr un riesgo.

DISCUSIÓN

Una vez que se realizó el juego de apuesta, nuestro diseño experimental permitió recoger el aprendizaje esperado, en el lenguaje de los estudiantes,

- La apuesta es un juego en el que se toma una decisión donde se anticipa un resultado. Es una situación de incertidumbre.

- Al apostar se toma una decisión (anticipada) que implica un riesgo porque es una situación de incertidumbre.
- En la apuesta equitativa, "ganas con un caballo y con los otros pierdes. Y si ganas vas a perder porque es la misma plata que apostaste".

Las primeras decisiones de los alumnos fueron intuitivas y luego consideraron las posiciones de los caballos en la carrera, condición H en la segunda apuesta.

La situación planteada es un ejemplo que introduce la enseñanza de la probabilidad, involucrando a los alumnos a poner en evidencia sus grados de creencia personal, preparando el camino para determinar una cuantificación de estos.

Estos resultados nos motivan a sugerir un enfoque de enseñanza de la probabilidad que tenga en cuenta el planteamiento de situaciones adidácticas como el juego de apuestas experimentado, que refiere una situación de incertidumbre con foco en la interacción de los alumnos con ella. Este juego funciona como medio provocador y les permite, a los alumnos, encontrarse con la noción de incertidumbre, tomar decisiones y enfrentar el riesgo, generando espontáneamente un lenguaje relacionado con el suceso incierto, lo que prepara el terreno para posteriormente aproximarse a la noción de probabilidad.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1990). Ingiénierie Didactique. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 9*(3), 31.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-49). Grupo editorial Iberamérica.

Batanero, C., Ortiz, J., Serrano, L., y Cañizares, M. (2001). Una perspectiva de síntesis de las tendencias actuales en la educación estadística. En P. Gómez y L. Rico (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Editorial Universidad de Granada.

Batanero, C. (2005). Significados de probabilidad en educación secundaria. *Relime,8*(3), 247 – 263.

Bernardo, J. 1997. Bruno de Finetti en la Estadística Contemporánea. *Revista de la Academia de Ciencias de Madrid,* 63-80.

Brousseau, G. (2004). *Théorie des Situations Didactiques*. La Pensé Sauvage éditiores.

Di Bernardo, R., Mellone, M. Minichini, C., y Ribeiro, M. (2019). Subjective approach to probability for accessing prospective teachers' specialized knowledge. En M. Graven, H. Venkat, A. Essien y P. Vale (Eds.). *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 177-184). PME.

Kazak, S. (2015). A Bayesian inspired approach to reasoning about uncertainty: How confident are you? *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (pp. 700-706). ERME.

Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. *Recherches en didactique des mathématiques* (pp. 89-102). La pensée sauvage.

Mateos, A., y Morales, G. (1985). *Teoría Subjetiva de la Probabilidad: Fundamentos, evolución y determinación de probabilidades* [Tesis de Doctorado, Universidad Complutense, España].

Méndez, T. (2019). *Nociones Intuitivas de Probabilidad en Educación Básica: Estudio Psicogenético en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas* [Tesis de Doctorado, Universidad de Los Lagos, Chile].

Perrin-Glorian J., y Hersant M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en didactique des mathematiques, 23*(2), 217–276.

Vásquez, C., y Alsina, A. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en educación primaria. Un desafío para la formación inicial y continua del profesorado. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *85*, 5-23.

Vásquez, C., y Alsina, A., (2017). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. *BOLEMA*, *31* (57), 454-478, https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a22

USO DE MODELOS EN EL AULA DE ESTADÍSTICA: VOCES DEL ESTUDIANTADO UNIVERSITARIO

María Cristina Kanobel, Lorena Belfiori, Mariana García

Universidad Tecnológica Nacional

mkanobel@fra.utn.edu.ar, lbelfiori@fra.utn.edu.ar, mgarcia@fra.utn.edu.ar

Se describe la experiencia del uso de modelos en el aula de Probabilidad y Estadística para evaluar el desarrollo de competencias disciplinares y otras habilidades blandas. Participaron 360 estudiantes de Probabilidad y Estadística en la Universidad Tecnológica Nacional (Facultad Regional Avellaneda- Argentina) en 2020 y 2021. Para relevar información se utilizó un cuestionario autoadministrado y las calificaciones obtenidas. Se observó alto nivel de aprobación con gran motivación del estudiantado y dificultades relacionadas con la propuesta. El trabajo puede aportar información relevante sobre propuestas centradas en el aprendizaje del estudiantado.

Modelos, Enseñanza de estadística, Modelización, Universidad.

INTRODUCCIÓN

El mundo en el que vivimos es Volátil, Incierto, Complejo y Ambiguo (VICA), tal como afirma Bauman (Palazzi, 2014), en continuo cambio, marcado por la tecnología. Las prácticas pedagógicas deben ser repensadas con una mirada distinta sobre el estudiantado y sobre la educación universitaria, para promover el desarrollo de competencias, disciplinares y blandas. Se hace necesario propiciar propuestas didácticas que ayuden al alumnado a desarrollar una comprensión que sea más coherente, flexible, sistemática y especialmente crítica (Justi, 2006). En este sentido, este trabajo describe los resultados de una experiencia sobre una instancia de evaluación integradora desarrollada en cursos de Probabilidad y Estadística de carreras de Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Avellaneda, centrada en una actividad que involucra el uso de modelos para la resolución de un problema sobre inferencia estadística. La intervención tuvo como propósito evaluar el nivel de desarrollo de competencias disciplinares y soft skills necesarias para formar el perfil de egreso de estudiantes de carreras de Ingeniería.

MARCO TEÓRICO

La modelización y los modelos tienen gran importancia en diversos contextos de la Ciencia. Permiten describir, explicar o predecir situaciones y hechos (Adúriz-Bravo, 2012) y responder preguntas o poner a prueba las teorías.

Aunque aún resulta ambiguo el significado de modelo, la concepción más aceptada en la actualidad es aquella que asocia un modelo con una representación de un objeto, un proceso, una idea, un sistema o un acontecimiento, que es creada con un propósito específico (Gilbert et al., 2000). Dicha representación puede ser un tipo de "exhibición de aspectos visuales de la entidad modelada, sino también como una representación parcial que al mismo tiempo «abstrae de» y «traduce de otra forma» la naturaleza de esa entidad" (p.175). En particular, para el aprendizaje de la Estadística, es necesario que el estudiantado logre construir un conocimiento integrado que esté anclado en el contexto de donde surgen los datos y sea aplicado a la vida real (Accorinti et al., 2016). Este planteo excede el conocer reglas matemáticas, desarrollar fórmulas y colocar números en una expresión (Giere, 1999). En este sentido, la enseñanza basada en modelos es un puente para lograr dicho objetivo.

Por otro lado, es necesario que desde los primeros años de las carreras de ingeniería se fomente el desarrollo de las competencias de egreso requeridas al estudiantado. Entre ellas, se destacan (CONFEDI, 2018): identificar, formular y resolver problemas de Ingeniería, utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de aplicación en la Ingeniería, desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo; comunicarse con efectividad, aprender en forma continua y autónoma. En este sentido, la enseñanza basada en modelos puede contribuir al desarrollo de dichas competencias.

Además, el acceso a la información y la posibilidad que ofrecen diversos programas para simplificar tiempos dedicados a la algoritmia en favor de procesos de análisis e interpretación de datos, la mediación tecnológica puede favorecer también el pensamiento crítico. Por otro lado, respecto de la competencia digital, se hace necesario generar cambios que incluyan, entre otros, el uso de dispositivos móviles en las actividades del aula. Con ellos se puede abordar una introducción al análisis exploratorio de datos y a la inferencia estadística. Así, el alumnado, al resolver tareas académicas, adquiere el dominio de diversos recursos tecnológicos y desarrolla nuevas habilidades (Sánchez Acevedo y Ruiz Hernández, 2017).

MÉTODO

La experiencia se llevó a cabo durante los ciclos lectivos 2020 y 2021 en los 11 cursos de la cátedra de Probabilidad y Estadística de la Regional Avellaneda de la Universidad Tecnológica Nacional. Para relevar información se utilizó un cuestionario de ocho ítems, semi estructurado y autoadministrado, que fue compartido con el alumnado vía Google Forms®. El instrumento fue respondido por 195 estudiantes en 2020 y por 165 en 2021. Para el análisis de información se utilizó una metodología descriptiva. Los datos fueron procesados con el software Infostat 2018.

UNA EXPERIENCIA DE AULA

Durante 2020 y 2021, la cursada se presentó en formato virtual complementando asincronía y sincronía. A lo largo del curso, se utilizaron modelos para el estudio de distribuciones de probabilidad de variables aleatorias, así como también para el trabajo con pruebas de hipótesis. Después de varias instancias de evaluación implementadas durante el año, quienes hubieron aprobado dichas instancias debían abordar la resolución de un problema asignado al azar como último requisito para la acreditación de la asignatura.

Luego de una semana de asignado el tema, debían subir a la plataforma Moodle la resolución del caso de estudio en formato incluyendo voz con explicación junto a una presentación. Luego de la devolución del equipo docente, se realizaba un coloquio en pequeños grupos, con quienes habían aprobado la primera instancia. En dicho coloquio cada estudiante explicaba brevemente a sus pares el contexto del problema y el modelo utilizado para resolver el problema. Mientras tanto, el resto debía tomar nota de los datos obtenidos de las exposiciones. Luego, el equipo docente realizaba preguntas sobre los distintos problemas propuestos a cada integrante para analizar la validez y condiciones necesarias para la aplicación de los modelos estadísticos elegidos para abordar las resoluciones. Al final de estas instancias, cada estudiante recibía una devolución y la calificación que le posibilitaba acreditar la asignatura o bien, volver a realizar la presentación oral en otra fecha asignada a partir de la resolución de una nueva situación problemática.

Uso de modelos

Los enunciados de los problemas resueltos por el alumnado en la etapa inicial de la experiencia plantean el uso de saberes relacionados con la temática central de prueba de hipótesis. En esta unidad, mediante el uso de modelos, se apela no sólo a la construcción de aprendizajes significativos, sino también a la transferencia de saberes a nuevas situaciones.

De este modo, se presenta en la clase un modelo general para la resolución de una prueba de hipótesis en cinco etapas. Así, se espera que cada estudiante desarrolle la capacidad de aplicar dicho modelo para el abordaje de un problema asignado al azar y donde se hace necesario evaluar condiciones y datos para aplicar alguno de los distintos tipos de pruebas. Para ello, cada estudiante, trabajando en forma autónoma, debe analizar el problema dado, efectuando los ajustes necesarios para cada parámetro analizado. Esta propuesta posibilita el desarrollo de competencias a partir de la resolución de problemas situados (Tobón et al., 2010).

En forma sintética, la estructura del modelo general para las pruebas de hipótesis requiere que el alumnado logre aplicar las etapas del modelo: plantear la hipótesis nula y la alternativa, definir el nivel de significación de la prueba, establecer el estadístico de prueba, definir la región de rechazo o el p-valor, tomar una decisión estadística adaptada al contexto de la situación problemática abordada.

RESULTADOS

Del relevamiento realizado posteriormente al coloquio final, se obtuvieron algunos resultados.

Por un lado, se observó un alto rendimiento académico en ambos años observados. En 2020, del grupo de 227 estudiantes en condiciones de acceder a la actividad final integradora, un 78% logró acreditar la asignatura mientras que el resto, regularizó la cursada y quedó en condiciones para rendir el examen final. En 2021, de 215 estudiantes en condiciones para abordar el trabajo final integrador, un 80,5% aprobó la asignatura y el resto regularizó la cursada quedando en condiciones para rendir el examen final.

Sobre las percepciones del grupo cursante en 2020 respecto de la actividad descripta, el 88,4% respondió que les podría ayudar a desarrollar algunas habilidades necesarias en su futura vida profesional. Respecto del nivel de dificultad de la tarea en función de los contenidos desarrollados en la asignatura, solo un 16,1% afirmó que le resultó difícil o muy difícil. En cuanto a la preparación de la presentación un 13,6 % lo consideró difícil o muy difícil. Sobre la elaboración del formato video, un 20,8% sostuvo que le resultó dificultoso o muy demandante. Sobre el coloquio realizado en grupos vía Zoom, solamente un 9% consideró difícil haber atravesado dicha instancia.

En el ciclo 2021, las respuestas reflejan una situación aún más favorable, dada por los siguientes resultados: solo un 8% consideró difícil abordar la resolución del problema, un 8,6% afirmó que le resultó difícil preparar la presentación mientras que solamente un 17,1% afirmó que le resultó difícil explicar el problema incluyendo su voz en un video. En cuanto al coloquio, los datos señalan que un 11% le asignó un alto nivel de dificultad a dicha instancia.

Cabe destacar que una gran parte del alumnado consideró un desafío el requisito de presentar un parcial en formato video. Este tipo de experiencia les resulta nueva ya que no han tenido actividades de este tipo en prácticamente ninguna otra materia.

De las respuestas obtenidas sobre aspectos positivos percibidos respecto a la modalidad de evaluación de la tarea descripta, se seleccionaron algunas que caracterizan las distintas opiniones vertidas en ambos ciclos:

"Algo positivo sería que da espacio a reforzar expresarse oralmente, y como algo negativo no encuentro ningún aspecto más que los nervios que te puedan jugar una mala pasada"

"…como teníamos que resolver un ejercicio solos que capaz no conocíamos tanto como los otros, o por lo menos en mi caso tuve que buscar información de varios lugares eso hizo que algunas ideas se me aclaren más todavía"

"Me gustó la idea de tener un tema para investigar y aprender muchas cosas sobre temas y tener que explicar con video y tener la libertad expresar"

"Algo positivo, es que la aplicación de estos temas abarca distintos rubros en la vida cotidiana y cuando se empieza a entender los ejemplos por ese lado el aprendizaje es mucho más divertido. y sinceramente no encuentro aspectos negativos. ¡Gracias!"

Sobre la modalidad de la cursada y la motivación, gran parte del estudiantado destaca:

"Comenzando por la cursada, fue una de las pocas materias que disfrute de presenciar las clases a distancia. Aprecie mucho todos los PowerPoint y videos que se nos dan, con el objetivo de brindarnos distintas herramientas para consultar. Por otro lado, la dinámica que tenían las clases se volvía entretenida y para nada aburrida, por ende, se volvió más sencillo comenzar a estudiar la materia. ¡En fin... no tengo un comentario malo, todo de 10!"

En cuanto a algunos aspectos negativos, si bien la mayoría de las respuestas afirma no haberlos encontrado, se rescataron algunas expresiones que caracterizan la generalidad de las opiniones vertidas al respecto en ambos años de la experiencia:

"Un aspecto negativo fue que en la instancia de coloquio a las personas más tímidas nos cuesta más participar".

"Considero como aspecto negativo solo poder conocer a pocos de mis compañeros, sin embargo, entiendo que, de no ser así, sería muy difícil evaluar".

"Como aspecto negativo puede ser la cantidad de días entre la entrega de la presentación y el coloquio".

"Negativo podría ser el enunciado del ejercicio que al ser de otro tema me resultó al principio un poco difícil plantearlo, pero gracias a la ayuda de los profesores pude encararlo de la manera correcta".

CONCLUSIONES

Enseñar utilizando modelos como estrategia exige un cambio de paradigma donde las tareas académicas cobran deben colaborar en el desarrollo de competencias disciplinares y blandas. Así, el uso de modelos permite evaluar competencias en formatos no tradicionales, mediante el diseño de instancias donde el alumnado pueda socializar su aprendizaje y transferir sus saberes. Las percepciones del alumnado sobre la evaluación integradora han sido favorables y los resultados académicos han sido muy buenos teniendo en cuenta el contexto de virtualidad forzada por la pandemia de COVID-19. A raíz de los resultados obtenidos, se propone continuar con esta metodología para los cursos de Probabilidad y Estadística en las carreras de Ingeniería, en contextos de presencialidad plena, perfeccionando las actividades, siempre considerando los aciertos y teniendo en cuenta la valoración dada por el alumnado.

REFERENCIAS

Accorinti, H., y Martínez, J. (2016). Acerca de la independencia de los modelos respecto de las teorías. *Theoria, 31*(2), 225-245. https://doi.org/10.1387/theoria.15235

Adúriz-Bravo, A. (2012). Algunas características clave de los modelos científicos relevantes para la educación química. *Educación Química*, *23*, 1-9.

Consejo Federal de Decanos de Ingeniería. CONFEDI (2018). *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de Ingeniería en la República Argentina. Libro Rojo de CONFEDI*. Autor.

Gilbert, J.K., Boulter, C.J., y Elmer, R. (2000). Positioning Models in Science Education and in Design and Technology Education. En J.K. Gilbert, y C.J. Boulter (Eds) *Developing Models in Science Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0876-1_1

Justi, R. (2006). La enseñanza de ciencias basada en la elaboración de modelos. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(2), 174.

P alazzi, C. (2014). *Zygmunt Bauman: Reflexiones sobre la modernidad líquida*. Editorial UOC.

Sánchez Acevedo, N., y Ruiz Hernández, B. (2017). La inferencia informal en la enseñanza de la Estadística. Una propuesta por medio del estudio de clases. En Rosas, A. (Ed.). *Avances en Matemática Educativa, Tecnología y matemáticas* (pp. 117-133). Editorial Lectorum, S. A.

Tobón, M., y Arbeláez, M. (2010). La formación docente al incorporar las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En *Congreso Iberoamericano de Educación*. Universidad Tecnológica de Pereira.

CONFLICTOS SEMIÓTICOS EN PRÁCTICAS DE VALIDACIÓN EN ESCUELAS SECUNDARIAS DE ARGENTINA

María Elena Markiewicz, Silvia Catalina Etchegaray, Natalia Cuenya

Universidad Nacional de Río Cuarto

mmarkiewicz@exa.unrc.edu.ar, setchegaray@exa.unrc.edu.ar, ncuenya@yahoo.com.ar

Este trabajo tiene como objetivo poner al descubierto y explicar algunas dificultades que evidencian estudiantes de escuelas secundarias de Argentina en prácticas vinculadas a la validación de proposiciones matemáticas, particularmente en la construcción de pruebas intelectuales. Considerando como marco teórico de esta investigación el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, realizamos un estudio de casos a fin de identificar los objetos y procesos presentes en dichas prácticas e intentamos explicar ciertas dificultades de los estudiantes en términos de conflictos semióticos ligados a dichos procesos.

Validación, Objetos matemáticos, Procesos, Conflictos semióticos, Pruebas intelectuales.

INTRODUCCIÓN

La validación de proposiciones matemáticas es una actividad inherente y fundamental del quehacer matemático y, como tal, debe tener un lugar en la enseñanza de la matemática. En este sentido, son numerosas las investigaciones en el campo de la Educación Matemática que abordan diferentes aspectos relacionados a la validación y la prueba (Balacheff, 2000; Hanna, 2000; Mariotti, 2006; Boero et al., 2010; Stylianides et al., 2016, entre otros).

Los diseños curriculares de Argentina destacan la importancia de ofrecer a los estudiantes de la escuela secundaria situaciones donde tengan la posibilidad de validar las proposiciones a las que se enfrentan y de avanzar desde argumentaciones empíricas hasta otras más generales. Sin embargo, la validación de proposiciones y, particularmente, la justificación de las mismas a través de pruebas de tipo intelectuales (Balacheff, 2000) reviste ciertas dificultades para los estudiantes.

En este trabajo mostramos algunos resultados de un estudio de casos, realizado a partir de un trabajo exploratorio en tres escuelas secundarias de la ciudad de Río Cuarto, Argentina. Se propusieron a los estudiantes dos problemas que exigen la validación de proposiciones matemáticas (en un caso también su elaboración). Para el análisis de sus producciones utilizamos herramientas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), determinando objetos primarios disponibles y emergentes de estas prácticas, así como también procesos cognitivos duales por los que transitan y, que nos permitieron explicar ciertas dificultades de los estudiantes en el paso de pruebas pragmáticas a pruebas intelectuales en términos de conflictos semióticos.

MARCO TEÓRICO

El EOS (Godino et al., 2007) introduce la noción de *práctica matemática* para sintetizar las características de la actividad matemática y de *significado* (personal e institucional) de un objeto matemático como un emergente de los sistemas de prácticas (que realiza una persona o compartidas en el seno de una institución) donde este objeto es determinante para su realización. Estos sistemas de prácticas están constituidos por redes de relaciones en las que intervienen diferentes tipos de

objetos primarios: situaciones-problemas, procedimientos, conceptos-definiciones, proposiciones, argumentos y *lenguaje*.

Por otra parte, los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas pueden ser considerados, según el juego de lenguaje en el que participan, desde diferentes facetas duales, que dan lugar a *procesos cognitivos/epistémicos duales* que se consideran fundamentales en la actividad matemática, entre los que destacamos los siguientes: *proceso de materialización-idealización* (asociado a la dualidad ostensivo-no ostensivo), *proceso de particularización-generalización* (dualidad extensivo-intensivo), *proceso de descomposición-reificación* (dualidad sistémico-unitario) y proceso de *representación-significación* (dualidad expresión-contenido). Estos procesos pueden ser fuente de *conflictos semióticos*, es decir, de disparidades o discordancias entre significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) y pueden constituirse en explicaciones de las dificultades que podrían surgir (o las que efectivamente surgen) en el transcurso de los procesos de instrucción.

Cabe destacar que la metodología adoptada en este trabajo es inherente al EOS. En particular, realizamos un estudio de casos, aplicando la técnica de análisis ontosemiótico en sus dos primeros niveles: análisis de objetos primarios y análisis de procesos duales y conflictos semióticos.

Dentro de nuestro marco teórico hemos considerado también la tipología de pruebas propuesta por Balacheff (2000) quien distingue entre *pruebas pragmáticas* (basadas en la acción y en la experiencia) y *pruebas intelectuales* (donde se ponen en juego propiedades y relaciones entre los objetos) y su categorización de las pruebas (*empirismo ingenuo, experiencia crucial, ejemplo genérico y experiencia mental*).

DESARROLLO

De los dos problemas presentados a los estudiantes de tres escuelas secundarias de nuestra ciudad vamos a retomar en este trabajo el problema 2:

> Si se suman tres números naturales consecutivos cualesquiera, ¿el resultado es siempre múltiplo de 3?, ¿el resultado es siempre múltiplo del número que aparece en el medio de la secuencia?, ¿cómo puedes asegurar que son válidas tus afirmaciones?

Debido a la situación de pandemia vivida en el año 2021, este problema fue presentado vía classroom por el profesor de cada curso. Los estudiantes lo resolvieron y enviaron sus producciones por el mismo medio al profesor. Se seleccionaron resoluciones en las que se detectaron dificultades reiteradas en torno a la validación y se realizaron entrevistas a estos estudiantes para profundizar en las mismas. Vamos a compartir, en este trabajo, dada su extensión, la producción de un estudiante para el Problema 2 (Figura1) y el tipo de análisis realizado a su producción escrita desplegado en una tabla (Tabla 1).

Figura 1.

Resolución del Estudiante A al Problema 2.

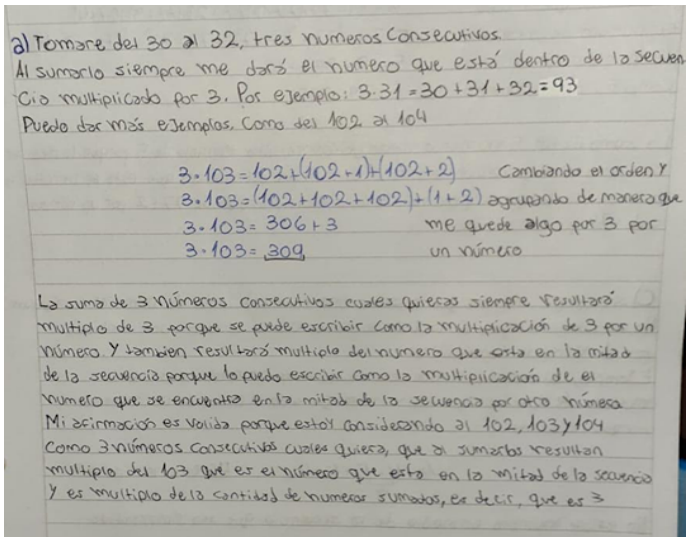


Tabla 1.

Análisis ontosemiótico de la práctica del Estudiante A.

Objetos primarios	**Procesos duales**
Procedimientos -Propone un caso particular de tres números consecutivos del 30 al 32 verificando que 3•31 = 30+31+32. -Toma los números del 102 al 104 y expresa la igualdad: 3•103=102+(102+1)+(102 + 2). -Reescribe el segundo miembro como (102+102+102) + (1+2), y luego realiza las sumas obteniendo 306 + 3, y finalmente 309.	Particularización-generalización (P-G) A partir de la verificación realizada para el caso particular del 30 al 32, y del ejemplo del 102 al 104, se realiza una generalización dando lugar a la Conjetura 1.
Definiciones (disponibles) Números naturales. Secuencias de números naturales. Número del medio de la secuencia. Suma de números naturales. Consecutivo de un número natural como el número más 1. Definición de múltiplo de un número como producto de este número por otro natural.	Materialización-idealización (M-I) -Se materializa el consecutivo del 102 como 102+1, y el consecutivo del consecutivo como 102+2. - Se evoca la propiedad que se quiere validar como 3•103 = 102+ (102+1)+(102+2), es decir colocando en el primer miembro de la igualdad el producto de 3•102. - Se evocan las propiedades de la suma (propiedad asociativa y conmutativa) con las expresiones "agrupar" y "ordenar" respectivamente. - La expresión 3•103 materializa la idea de un múltiplo de 3 y de un múltiplo de (102 + 1), que es el número que está en el medio de secuencia.
Proposiciones Disponibles: Propiedad conmutativa y asociativa de la suma. Emergente: "La *suma de tres números consecutivos cualesquiera siempre resultará múltiplo de 3...", "y también resultará múltiplo del número que está en la mitad de la secuencia...".* (Conjetura 1)	Representación-significación (R-S) -Se atribuye un contenido al consecutivo de 102 como 102 + 1 y el consecutivo del consecutivo de 102 como 102 + 2, otorgando
Argumentos	

Se argumenta a través de la verificación de la proposición en casos particulares (empirismo ingenuo). Se intenta desarrollar una argumentación más general a partir de la igualdad 3•103 = 102+(102+1)+(102+2), se trabaja con el miembro derecho de la igualdad aplicando propiedades de la suma y obteniendo (102+102+102) + 3 y se escribe el resultado de 102+102+102 cómo 306, que, al sumarlo al 3 da 309, lo que le permite corroborar la igualdad planteada. Se argumenta la proposición expresando que la suma es múltiplo de 3 porque se puede escribir como la multiplicación de 3 por un número, y que es múltiplo del número que está en el medio de la secuencia porque la suma se puede escribir como dicho número por 3. Y que esto es válido porque lo comprobó con el 102, 103 y 104 que son números cualesquiera.	significado a la propiedad de ser consecutivo como ser suma del número más uno. -A la igualdad 3•103= 102+(102+1)+(102+2) se la significa como que la suma de los tres consecutivos a partir del 102 es múltiplo de 3 y de 103. - Significa a un múltiplo de 3 como un número multiplicado por 3. - Significa al 309 (resultado de la suma) como múltiplo de 3 y múltiplo de 103.
<u>Lenguaje</u> Coloquial, al expresar las conjeturas/propiedades y parte de su argumentación. Aritmético, cuando se argumenta a través de los casos particulares.	<u>Descomposición-reificación (D-R)</u> Se reifican la verificación con casos particulares y las diferentes argumentaciones planteadas para dar lugar a la emergencia de las conjeturas/ propiedades emergentes como objetos unitarios

A continuación, transcribimos un fragmento de la entrevista, cuyo propósito fue, no sólo indagar sobre las decisiones que sostienen la producción escrita, sino también movilizar las transformaciones esperadas para avanzar hacia la construcción de una prueba intelectual.

P: ¿Podrías haber expresado la suma de 102+102+102 de otra manera?
A: Eh… Como 3 por 102, otra manera no encuentro.
P: Bueno, coloquemos esto que vos decís en el renglón 10. ¿Cómo lo reescribirías teniendo en cuenta lo que expresaste?
A: 3x103=3x102+3. Pero,... profe... esto lo hice mentalmente por eso coloqué el 306 directamente que es el resultado de 3x102...
P: Está bien lo que decís pero vos resolvés y yo te preguntaba: ¿de qué manera podrías haber llegado a probar que se cumple tu afirmación, sin necesidad de resolver, solo observando el 3x103=3x102+3?
A: Sin hacer la cuenta...mmm... Y... podría no haber resuelto el 3x102+3... porque...por...porque si observo los términos de la suma son divisibles por 3 o múltiplos de tres, entonces si saco factor común 3, me queda...3 por .....(102 +1), que es igual a... 103 que es justamente el número del medio.
P: Esto que hiciste para el 102,103 y 104, ¿te basta para decir que la propiedad vale para cualquier número?
A: Si, porque he intentado varios ejemplos y siempre ocurrió lo mismo.
P: ¿Qué entendés vos por un número cualquiera?
A: Un número totalmente aleatorio.
P: ¿El 102 o 77 son un número cualquiera?
A: Sí, porque los tome un número aleatorio dentro del conjunto de números.
P: ¿Podrías representar de manera más general un número cualquiera?
A: Si, con otro número elegido aleatoriamente y escribiendo sus consecutivos.

El análisis ontosemiótico realizado, junto con algunos aspectos mencionados por el estudiante en la entrevista, nos permitió identificar ciertos conflictos ligados al proceso de particularización-generalización cuando no se alcanza a recurrir a una argumentación más general a partir de un caso particular representativo (ejemplo genérico) o de un número particular general. Además, al no evocar, en un principio, la expresión 102+102+102 como 3•102, no se avanza completamente en la materialización pretendida de una argumentación de tipo ejemplo genérico que, luego se pueda generalizar a cualquier número natural (conflictos ligados a los procesos de materialización-idealización y de particularización-generalización). También se manifiestan dificultades vinculadas al contenido otorgado a la expresión "número cualquiera", dado que significa un número tomado "aleatoriamente" pero que sigue siendo particular (conflicto ligado al proceso de representación-significación) y para materializar un número natural cualquiera con un ostensivo que permita evocar de manera simbólica a un número natural (materialización-idealización).

PRIMEROS RESULTADOS Y CONSIDERACIONES FINALES

Los resultados presentados a continuación tienen en cuenta todas las prácticas analizadas de los dos problemas. En las mismas pudimos observar los siguientes conflictos semióticos, estrechamente vinculados entre sí, que permiten explicar dificultades de los estudiantes en sus procesos de validación:

-Si bien algunos estudiantes argumentan a través de un caso particular representativo (ejemplo genérico), no llegan a generalizar la argumentación dada para el número representante. La mayoría de los estudiantes no parte de un "número particular arbitrario" para argumentar las propiedades generales (conflictos ligados al proceso de particularización-generalización).

-Algunos estudiantes atribuyen significado a la expresión "número cualquiera" como un número aleatorio o tomado al azar pero que sigue siendo particular. Esta dificultad radica en no identificar la propiedad que lo caracteriza, ser un representante de una clase de números (conflicto ligado al proceso de representación-significación).

-Se vio reflejado en algunas producciones el problema de buscar la forma de materializar un "número natural cualquiera" con un ostensivo adecuado, dado el tipo de significado atribuido a dicha expresión. Esto obstaculizó también, en el problema 2, la forma de evocar la suma de tres números consecutivos cualesquiera (conflictos ligados al proceso de materialización-idealización).

-Se observó falta de reificación de los objetos y propiedades puestos a funcionar en las producciones escritas y en las entrevistas, lo que obstaculizó la emergencia de una validación de tipo ejemplo genérico generalizable a números cualesquiera (proceso de descomposición-reificación).

En este sentido, observamos que los procesos de particularización-generalización transitados por los estudiantes estuvieron obstaculizados por conflictos asociados a los procesos de materialización-idealización y de representación-significación, dado que estos últimos son fundamentales para lograr la transformación de un objeto particular en uno general.

Consideramos que este trabajo proporciona una nueva interpretación de las dificultades de los estudiantes, desnaturalizando la complejidad ontosemiótica de sus prácticas de validación. Esto nos permite pensar en estrategias superadoras que tengan en cuenta el tipo de objetos y procesos que serían necesarios tensionar y movilizar en el aula, a través de nuevos problemas, para que los estudiantes avancen en la construcción de argumentaciones de tipo intelectual, más cercanas a la demostración.

REFERENCIAS

Balacheff, N. (2000) *Procesos de prueba en los estudiantes de matemáticas*. Una empresa docente.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., y Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En M. M. Pinto, y T. F. Kawasaky (Ed.), *Proceedings of the 34th Conference of the InternationalGroup for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 179-204). PME.

Godino, J. D. Batanero, C., y Font, V. (2007) The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 127-135.

Hanna, G. (2000) Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1), 5-23.

Mariotti, M. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En En A. Gutierrez, G. Leder, P. Boero. (Ed.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future,* (pp.173-204). PME.

Stylianides, A., Bieda, K., y Morselli, F. (2016). Proof and Argumentation in Mathematics Education Research. En A. Gutierrez, G. Leder, P. Boero (Ed.), *Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: the journey continues*, (315-351). PME.

ERRORES AL RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON INFINITAS SOLUCIONES

Elizabeth Rozas-Torres[1], Andrea Cárcamo[1], Josep M. Fortuny[2]

[1]Universidad Austral de Chile, [2]Universidad Autónoma de Barcelona

elizabeth.rozas@uach.cl, andrea.carcamo@uach.cl, JosepMaria.Fortuny@uab.cat

En este trabajo, nos enfocamos en identificar y categorizar los errores que cometen los estudiantes al determinar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones. Para ello, 23 estudiantes de primer año de ingeniería desarrollaron una tarea escrita sobre la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Luego, analizamos sus protocolos escritos e identificamos tres tipos de errores: (1) cálculo erróneo del número de parámetros necesarios para escribir el conjunto solución (2) uso errado de las propiedades algebraicas y (3) escritura imprecisa del conjunto solución.

Álgebra lineal, Sistemas de ecuaciones lineales, Errores de estudiantes, Conjunto solución, Educación universitaria.

INTRODUCCIÓN

Los errores son parte del proceso de aprendizaje de cualquier concepto matemático y es importante que el docente identifique la naturaleza del error matemático que puede estar interfiriendo con el proceso de aprendizaje. Lo anterior, con la finalidad de que pueda ser utilizado productivamente como un recurso para la enseñanza (Mutambara y Bansilal, 2021).

Un concepto central del Álgebra Lineal que presenta dificultades para los estudiantes del nivel universitario es el concepto de sistemas de ecuaciones lineales (SELs). En particular, los estudiantes no solo presentan dificultades en su resolución, sino que también en su conceptualización, comprensión y visualización de su conjunto solución (García et al., 2006; Rodríguez et al., 2019).

Recientemente, Mutambara y Bansilal (2021) realizaron un estudio con el fin de estudiar los errores relacionados con combinaciones lineales de un grupo de docentes en servicio. Los resultados de este estudio mostraron que los errores eran principalmente de tipo fundamental. En concreto, errores vinculados con malas interpretaciones de las soluciones de los SELs y errores de cálculo relacionados con los procesos de reducción de filas.

Considerando lo expuesto, el objetivo de este estudio exploratorio es identificar y categorizar los tipos de errores que cometen los estudiantes al determinar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales (SEL) con infinitas soluciones. Con esto, queremos contribuir a que el docente tenga información que pueda usar al momento de planificar este contenido matemático.

MARCO TEÓRICO

Consideramos la clasificación de errores propuesta por Mutambara y Bansilal (2021) para analizar los errores que cometen los estudiantes de nuestro estudio al determinar el conjunto solución de un SEL con infinitas soluciones.

Mutambara y Bansilal (2021) clasifican los errores como: (1) errores conceptuales, (2) errores de procedimiento y (3) errores fundamentales. Los errores conceptuales son errores que comete el estudiante cuando no comprenden los conceptos involucrados en el problema o las relaciones

involucradas. Por su parte, los errores de procedimiento se producen cuando el estudiante realiza un procedimiento de forma incorrecta o aplica un enfoque inadecuado, habiendo comprendido los conceptos principales detrás del problema. Por último, los errores fundamentales ocurren cuando el estudiante presenta un conocimiento previo deficiente o por errores de cálculo.

METODOLOGÍA

Participantes

Este estudio exploratorio, de tipo cualitativo, involucra 23 estudiantes de primer año de ingeniería de una universidad chilena que cursaban Álgebra Lineal. Estos estudiantes serán etiquetados como E1, E2 hasta E23. Estos estudiantes ya han estudiado ecuación lineal, SELs de $m \times n$, operaciones elementales fila, matriz escalonada reducida por filas, rango de una matriz y el teorema de Rouché-Frobenius.

Instrumento de recolección de datos

Con el objetivo de indagar sobre los tipos de errores que pueden cometer los estudiantes cuando determinan el conjunto solución de un SEL, diseñamos un cuestionario de evaluación escrita compuesto por 4 tareas sobre resolución de SEL de $m \times n$. En este estudio, mostraremos el análisis de resultados de una de dichas tareas (ver Figura 1), en la cual se le pedía al estudiante determinar el conjunto solución de un SEL de 3×4 representado matricialmente y donde la matriz de coeficientes asociada al SEL dado, se entrega en la forma escalonada reducida por filas.

Figura 1.

Tarea de la evaluación escrita, sobre un SEL de 3×4 *dado matricialmente.*

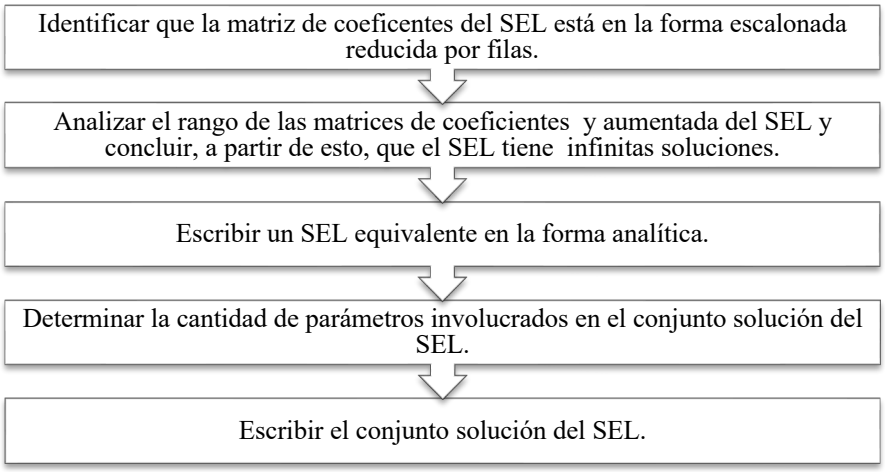
Determine el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Una posible resolución para dar respuesta a la tarea de la evaluación se presenta en la Figura 2.

Figura 2.

Posible resolución para dar respuesta a la tarea de la Figura 1.



Análisis de datos

El proceso de análisis de datos constó de tres fases. En la primera fase, agrupamos las respuestas de la tarea como: omitidas, correctas e incorrectas (ver Tabla 1). En la Tabla 1, observamos que el 61% de los estudiantes entregó una respuesta incorrecta.

Tabla 1.

Clasificación de las respuestas de los estudiantes a la tarea.

Tipo de Respuesta	**Frecuencia Absoluta**	**Frecuencia porcentual**
Omitida	4	17%
Correcta	4	17%
Incorrecta	15	65%

En la segunda fase, identificamos y categorizamos los errores que cometieron los estudiantes que tenían su respuesta incorrecta. Finalmente, en la tercera fase contrastamos nuestra categorización con la propuesta por Mutambara y Bansilal (2021).

RESULTADOS

Del análisis de los datos recopilados, identificamos los siguientes tipos de errores: (1) cálculo erróneo del número de parámetros necesarios para escribir el conjunto solución; (2) uso errado de las propiedades algebraicas; y, (3) escritura imprecisa del conjunto solución. A continuación, ejemplificamos estos con los protocolos escritos de algunos estudiantes.

(1) Cálculo erróneo del número de parámetros necesarios para escribir el conjunto solución

El error referente al cálculo erróneo del número de parámetros necesario para escribir el conjunto solución, observamos que se manifestó cuando los estudiantes no determinaron correctamente la cantidad de parámetros involucrados en el conjunto solución. En concreto, los estudiantes que cometieron este error identificaron que el SEL tiene infinitas soluciones, pero asignaron un parámetro a la incógnita w y otro a la incógnita z. Sin embargo, el conjunto solución del SEL depende de un solo parámetro. Un ejemplo de esto, lo vemos en la resolución del estudiante E7 que escribió: $w = \alpha, z = \beta/\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y luego, el estudiante E7, anotó como conjunto solución

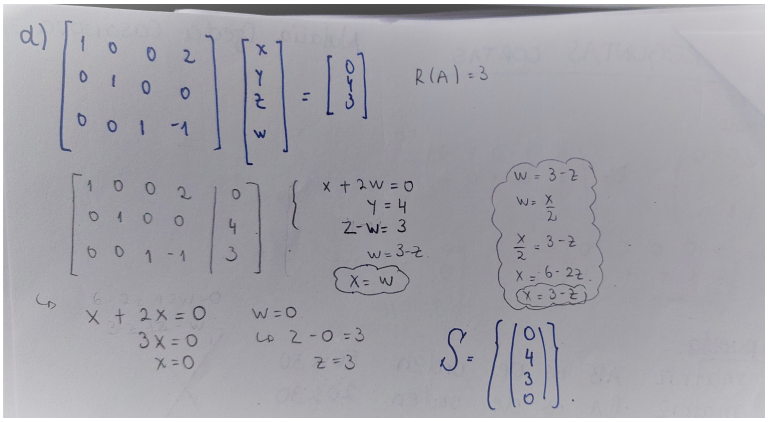
$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in M_{4\times 1} \middle| x = -2\alpha, y = 4, \beta - \alpha = 3, w = \alpha, z = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

(2) Uso errado de las propiedades algebraicas

El error referente al uso errado de las propiedades algebraicas involucra errores por omisión de paréntesis, errores algebraicos al trabajar solo un lado de una igualdad y otros similares. Inferimos que estos errores ocurrieron porque los estudiantes eligieron un método alternativo para determinar el conjunto solución. En concreto, ellos recurrieron a conocimientos previos como el método de sustitución o reducción para resolver SELs. Un ejemplo de esto es lo que escribió el estudiante E16 (Figura 3). Él anotó un SEL de tres ecuaciones lineales, en forma analítica, equivalente al dado. A continuación, E16 escribió $w = -3 + z$ que obtuvo de la tercera ecuación lineal ($z - w = 3$). En tanto, de la primera ecuación lineal ($x + 2w = 0$), él obtuvo $w = \frac{x}{2}$. Así, concluyó que $\frac{x}{2} = 3 - z$, y de esto que $x = 6 - 2z$. Luego, dividió por 2 solo al lado derecho de la igualdad anterior de lo que obtuvo que $x = 3 - z$ y así, concluyó que $x = w$. Por lo tanto, tuvo como resultado una única solución para el SEL, es decir, un conjunto solución incorrecto.

Figura 3.

Protocolo escrito del estudiante E16 a la tarea.



(3) Escritura imprecisa del conjunto solución

El error referente a la escritura imprecisa del conjunto solución, se produjo cuando los estudiantes no escribieron el vector genérico del conjunto solución del SEL o cuando los estudiantes no escribieron los valores o condiciones para alguna de las componentes del vector genérico de dicho conjunto. Un ejemplo de este error se muestra en el protocolo que escribió el estudiante E6. Él identificó que el SEL tiene infinitas soluciones, pero al escribir el conjunto solución omitió la escritura del vector genérico del conjunto y en su lugar, escribió $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Así, el estudiante E6 escribió como conjunto solución del SEL: $S = \{x, y, z, w \in \mathbb{R} \,|x = -2z, x = 4, w = z - 3, z = z\}$.

CONCLUSIONES

El presente estudio tuvo como objetivo identificar y categorizar los tipos de errores que cometen los estudiantes al determinar el conjunto solución de un SEL. Los resultados dan evidencia de que estos errores, generalmente, corresponden a los errores de procedimiento que describen Mutambara y

Bansilal (2021). En concreto, porque los estudiantes realizaron un procedimiento de forma incorrecta (no determinaron correctamente la cantidad de parámetros involucrados en el conjunto solución) o aplicaron un enfoque inadecuado para resolver el SEL (aplicaron innecesariamente métodos de sustitución o reducción) lo que los llevó a cometer errores algebraicos.

Con la finalidad de minimizar los errores que comenten los estudiantes al determinar el conjunto solución de un SEL representado matricialmente, nosotros proponemos lo siguiente:

- Introducir los conceptos de variables principales y variables libres porque esto le permitirá al estudiante visualizar, a partir de la matriz escalonada por filas asociada al SEL, qué variables corresponden a parámetros y de esta manera, evitará el error que se refiere al cálculo del número de parámetros y también, realizar pasos algebraicos innecesarios.
- Previo a estudiar SEL, se debe cautelar que los estudiantes tengan los conocimientos previos respecto a la representación de conjunto tanto por comprensión como por extensión y las propiedades algebraicas, porque esto contribuiría a minimizar los errores que se refieren al uso errado de las propiedades algebraicas y a la escritura imprecisa del conjunto solución.

Considerando los resultados de este estudio exploratorio, creemos que es necesario seguir profundizando en los errores que cometen los estudiantes sobre este contenido matemático. Para esto, en una próxima investigación pretendemos ampliar el número de participantes, así como realizar entrevistas para profundizar en las resoluciones de los estudiantes.

Finalmente, con este estudio exploratorio esperamos contribuir a mejorar la enseñanza de los SELs.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Facultad de Ciencias de la Ingeniería de la Universidad Austral de Chile por el apoyo y a la ANID-Fondecyt de iniciación N° 11190284.

REFERENCIAS

García, C., Oktaç, A., y Ramírez, C. (2006). Dificultades que presentan los estudiantes en los modos geométrico y analítico de sistemas de ecuaciones lineales. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol.19, pp. 413-418). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Mutambara, L., y Bansilal, S. (2021). A case study of in-service teachers' errors and misconceptions in linear combinations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-19. https://doi.org/10.1080/0020739x.2021.1913656

Rodríguez, M., Mena, A., Mena, J., Vásquez, P., y del Valle, M. (2019). Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 71-92.

CREENCIAS Y MOTIVACIÓN DE LOS ESTUDIANTES: UN OBSTÁCULO EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Freddy Aburto, Ignacio Arriagada, Yerko Bórquez, Sebastián Cárdenas, Nixon Molina, Anahí Huencho

Universidad Católica de Temuco

freddy.aburto2018@alu.uct.cl, iarriagada2018@alu.uct.cl, yborquez2018@alu.uct.cl, scardenas2018@alu.uct.cl, nmolina2018@alu.uct.cl, ahuencho@uct.cl

Esta investigación analiza como obstáculo la relación entre las creencias de los estudiantes y el nivel de motivación como dificultad en las clases de matemáticas. La muestra consistió en 178 estudiantes de tercer año medio de un establecimiento municipal de la comuna de Lautaro, Región de La Araucanía. La metodología se enmarca en un enfoque cuantitativo descriptivo, desarrollado por medio de una encuesta tipo Likert, la cual se enfoca en las creencias y motivación de los estudiantes. Los resultados preliminares muestran que los estudiantes con creencias negativas tienden a tener una menor motivación, y los estudiantes con creencias positivas tienden hacia una mayor motivación.

Motivación escolar, Creencias de estudiantes, Educación media, Asignatura de matemática.

INTRODUCCIÓN

La asignatura de Matemática es una de las materias centrales del sistema educacional chileno, el cual se imparte en un alto número de horas semanales (Decreto 876 EXENTO, 2019). Presenta una alta exigencia, lo que provocaría que los alumnos presenten actitudes negativas hacia la matemática (Tella, 2007). Esta alta demanda, incita a que se genere un alto índice de fracaso escolar, causando repercusiones en la motivación (Carrasco, 2018), y en las creencias que los estudiantes generan hacia a la asignatura (Malvasi y Gil-Quintana, 2022).

Dentro de las principales causas del fracaso escolar se encuentran afianzadas la motivación y las creencias, impactando directamente en el rendimiento académico. La generación de creencias afecta el proceso de enseñanza y aprendizaje, ocasionando repercusiones en la motivación de los estudiantes (Fernández et al., 2019; Viale, 2012). Por lo tanto, las creencias y la motivación de los estudiantes pueden llegar a tener implicaciones educativas. Al respecto, estudios realizados suponen un fuerte vínculo entre ambas, presentando resultados en donde los estudiantes menos motivados, y con creencias menos favorables, revelan un menor rendimiento académico (Madariaga, 2020).

El tercer año de secundaria es donde se presenta la mayor cantidad de creencias negativas de los estudiantes hacia sus profesores (Madariaga, 2020). De esta manera, nuestro objetivo es analizar la relación de las creencias de los estudiantes de tercer año medio de Lautaro sobre sus profesores de matemática y el nivel de motivación en sus clases.

LAS CREENCIAS Y LA MOTIVACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICAS

Las creencias de un individuo son conocimientos generados a través de verdades personales originadas de una experiencia, o incluso de la fantasía, de carácter poco elaborado, y creado con la finalidad de explicar y justificar gran parte de sus acciones y declaraciones. Así, el proceso de decisiones depende de las creencias (Escudero, 1996; Pajares, 1992; Solis, 2015). Lo anterior juega un papel fundamental en las acciones y actitudes de las personas hacia la matemática, y se puede

concluir que, las construcciones sociales o mitos que generan un rechazo hacia la matemática son creadas por sujetos que creen, y divulgan, que las matemáticas son aburridas y difíciles de aprender (Martínez, 2013).

De la misma manera, la motivación es un factor importante en la educación, pues los estudiantes motivados a aprender sobre un tema tienden a participar activamente en el aprendizaje, y si esto sucede, seguirán motivados por continuar su proceso de aprendizaje (Fernández y Silveira, 2012; Chen et al., 2020). Los alumnos que se encuentran altamente motivados son propensos a trabajar más en obtener resultados que los estudiantes que no se encuentran motivados. Además, los estudiantes que no presentan motivación se caracterizan por no esforzarse para lograr su aprendizaje (Bryan et al., 2011; Meece et al., 2008; Pintrich y Schunk, 1996).

Por ende, se puede afirmar que estas dos variables son un factor determinante en el rendimiento académico de los estudiantes (Fernández et al., 2019). De igual modo, existe una relación entre las creencias de los estudiantes sobre sus profesores de matemática, y el nivel de motivación que presentan en sus clases, en donde los estudiantes con creencias más negativas están acompañados de los peores niveles de motivación (Madariaga, 2020).

MÉTODO

La investigación se abordó en el marco de un paradigma cuantitativo de tipo experimental, con un enfoque cuantitativo descriptivo. Los participantes son 178 estudiantes de tercer año medio de la comuna de Lautaro, región de la Araucanía, de los cuales 96 son mujeres y 82 son hombres. Los cursos seleccionados son los seis terceros medios del establecimiento, ya que, como se menciona anteriormente, este nivel educacional presenta mayor porcentaje de creencias negativas hacia sus profesores de matemática (Madariaga, 2020). Además, los estudiantes en este nivel seleccionan su plan diferenciado.

El instrumento fue piloteado y posteriormente implementado en las aulas de clases, de forma individual, en un periodo de tiempo máximo de 45 minutos. La participación de los estudiantes fue voluntaria, previo asentimiento de estos y consentimiento de sus apoderados.

Los estudiantes completaron una encuesta de tres partes. La primera contenía 8 afirmaciones de creencias sobre sus profesores de matemática; la segunda 13 afirmaciones de motivación sobre las clases de matemática; y, la tercera parte consta de dos preguntas de respuesta abierta relacionadas a su nivel de motivación, la primera dice "¿Con qué nivel de motivación te sientes más identificado en clases de matemática? Ejemplo: "no me siento motivado", "estoy poco motivado", "estoy motivado", "estoy muy motivado". ¿Por qué?", la segunda pregunta dice "¿Crees que los profesores de matemática podrían influir en tu nivel de motivación en las clases de matemática? ¿Por qué?". Las primeras dos etapas están dispuestas en escalas tipo Likert de cinco niveles (Ver Tabla 1), en donde 0 corresponde a estar totalmente en desacuerdo y 4 totalmente de acuerdo con las afirmaciones planteadas.

Tabla 1.

Análisis preliminar, creencias de los estudiantes sobre sus profesores de matemáticas.

	Totalmente en desacuerdo (0)	En desacuerdo (1)	Ni de acuerdo, ni en desacuerdo (2)	De acuerdo (3)	Totalmente de acuerdo (4)	Media
1. He tenido buenos profesores de matemáticas	1,1%	9,6%	21,3%	43,3%	24,7%	2,81
2. Las dificultades que tengo en matemáticas se deben a la falta de ayuda de los profesores	10,7%	14,6%	30,3%	25,3%	19,1%	2,28

Para efecto del análisis, las respuestas hacia el 0 representan creencias negativas o nivel de motivación más bajo. Por el contrario, las respuestas hacia el 4 representan creencias positivas o nivel de motivación más alto. No todas las afirmaciones tienen el mismo sentido, como la afirmación 1 y afirmación 2 de la tabla anterior, lo que se tuvo en cuenta al momento de procesar la información, invirtiendo los resultados de manera que concuerde con lo descrito anteriormente.

Dado que los datos fueron levantados recientemente (segundo semestre del año 2022), se realiza un análisis preliminar descriptivo, con apoyo de promedios, porcentajes y las apreciaciones dadas por los estudiantes de forma escrita en la etapa 3 del instrumento (en el marco de sus creencias y motivaciones). En esta etapa, se cuantifica la parte dicotómica de la pregunta y analiza el argumento que la acompaña. Con estos elementos de base se genera la descripción general de los participantes.

RESULTADOS PRELIMINARES

En cuanto a las creencias de los estudiantes sobre sus profesores de matemáticas, estos presentan una leve tendencia positiva, pues se obtuvo entre todas las afirmaciones un promedio de 2,35. Un ejemplo de esto es que los estudiantes creen que los profesores de matemáticas siempre están dispuestos a aclarar dudas y dificultades en el aula, siendo la creencia más positiva con un promedio de 3,09, además de tener un 76,04% de estudiantes de acuerdo con esta afirmación. Asimismo, un 67,98% están de acuerdo en que han tenido buenos profesores de matemática, siendo esta una afirmación positiva con un 2,8 de promedio. Por otro lado, la creencia más negativa hace referencia a que la metodología utilizada por los profesores de matemáticas es más aburrida que las usadas por los demás profesores, con un promedio de 1,61. En cuanto al género de los estudiantes y sus creencias hacia los profesores, los hombres tienen una leve tendencia hacia creencias positivas con una media de 2,36, al igual que las mujeres con un promedio de 2,34.

Por otra parte, con relación a los resultados sobre el nivel de motivación de los estudiantes en las clases de matemáticas, estos presentan una leve motivación, ya que se obtuvo un promedio total de 2,45 entre todas las afirmaciones de motivación. Los estudiantes consideran que es importante saber matemáticas, siendo uno de los promedios más altos referentes a motivación, presentando un promedio de 3,1. Mientras que el hacer más de lo solicitado, en el curso de matemáticas, es uno de los puntos con menor promedio por los estudiantes, presentando una media de 1,7. Otro aspecto a

destacar de acuerdo a la motivación es la relación al género de los estudiantes, pues los hombres tienen como promedio una motivación de 2,42 y las mujeres una motivación 2,48.

Al analizar los datos de los estudiantes con creencias únicamente positivas sobre sus profesores (118 estudiantes con promedio mayor a 2) se observa un promedio de 2,73, estos igual tienen una motivación más elevada que el resto, con un promedio de 2,64. A su vez, al analizar los estudiantes con creencias negativas (50 estudiantes con promedios menor a 2), se observa un promedio de 1,52 y en las afirmaciones de motivación una media de 2,01.

En cuanto a las preguntas de respuesta abierta, respecto a qué tan motivados se sienten los estudiantes, los resultados arrojaron que 83,52% de los estudiantes (154), concuerdan con lo obtenido por el formulario de afirmaciones sobre su motivación. Ejemplo de lo anterior es el P104 (Participante N°104) con un nivel alto de motivación, según el formulario, y un promedio de 3,53, el cual responde que: "Estoy motivado, porque considero que las matemáticas es una materia desafiante y divertida. Además, me resultan fáciles de comprender la mayoría de los contenidos". De manera similar, el P42, el cual posee un nivel bajo de motivación, con un promedio de 1,38, responde "Me siento muy poco motivado porque no entiendo nada y no me atrevo a preguntar".

Por último, sobre la segunda pregunta de carácter abierto, un 91,01% de los estudiantes considera que sus profesores de matemática si influyen en el nivel de motivación que tienen en las clases de matemática, como comenta el P103 "Si, anteriormente he tenido profesores que no han sabido enseñar, lo que bajó mi rendimiento y mi motivación, también he tenido profesores que enseñan bien, pero su forma de enseñar no es atractiva o dinámica y hace difícil motivarse o disfrutar de las clases". El P165 dice "Sí, ya que según sus tratos hacia uno lo motiva y le da la confianza para preguntar cosas y seguir aprendiendo".

CONCLUSIONES

Los resultados sugieren que, al presentarse un promedio menor en la afirmación "Los métodos utilizados por los profesores de matemáticas son más aburridos que los que usan los profesores de otras asignaturas", se ratifica lo dicho por Madariaga (2020). Así, los estudiantes presentan una peor visión de la metodología empleada por los profesores en estos niveles de estudio. De manera opuesta, la afirmación "Los profesores de matemáticas siempre están dispuestos a aclarar dudas y dificultades en el aula" presenta el mayor promedio, entonces se concluye que, a pesar de que los profesores presentan metodologías que a los estudiantes no les gustan, éstos presentan una disponibilidad hacia los alumnos elevada con respecto a sus necesidades, lo cual concuerda con lo mencionado en Chacón (2000), y revela la importancia de la comunicación alumno profesor para poder aclarar estas dificultades y mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Por otro lado, dado el alto porcentaje de estudiantes que coincide en sus respuestas sobre el nivel de motivación, se puede concluir que estas si son fiables para un análisis. Igualmente, podemos decir que al presentarse un promedio mayor en la afirmación de motivación "Es importante para mí ser alguien que sepa de matemáticas", los estudiantes saben que la asignatura de matemáticas es importante. La afirmación con el promedio más bajo es "Hago más de lo que me piden en el curso de matemática", lo que puede indicar que, a pesar de tener motivación elevada y creencias positivas sobre sus profesores, el sistema de objetivos de aprendizajes está tan arraigado en ellos que no consideran necesario esforzarse más allá de lo que le demandan.

En relación con el género de los estudiantes, y su relación con la motivación y creencias hacia los docentes, se concluye que no existe una diferencia significativa entre ambos, es decir, las creencias hacia los profesores de matemáticas y el nivel de motivación en clases de matemáticas entre hombres y mujeres son iguales para contextos similares.

Por último, dado que los estudiantes con creencias negativas también tienen una menor motivación que la media de los encuestados, y los estudiantes con creencias positivas tienen una mayor motivación que el promedio general, se concluye que existe una relación entre las creencias de los estudiantes hacia sus profesores de matemáticas y, el nivel de motivación de estos en las clases de matemáticas. Sin embargo, queda pendiente un análisis más exhaustivo mediante la estadística inferencial para confirmar de mejor manera lo anterior.

REFERENCIAS

Bryan, R.R., Glynn, S.M., y Kittleson, J.M. (2011). Motivation, achievement, and advanced placement intent of high school students learning science. *Sci. Ed., 95*(1), 1049-1065. https://doi.org/10.1002/sce.20462

Carrasco, F. (2018). *Factores que influyen en el bajo rendimiento académico y poca disposición hacia las matemáticas en un 2° EM de un colegio particular subvencionado de la comuna de Los Ángeles: un estudio de caso.* [Tesis de grado, Universidad de Concepción, Chile].

Chacon, I.M.G. (2000). *Matemática emocional: Los efectos en el aprendizaje matemático*. Narcea Editorial.

Chen, S., Dhir, A., y Seetee, N. (2020). Validation of the Science, Mathematics, and English Task Value Scales Based on Longitudinal Data. *Springer Science and Business Media B.V. 19*(3), 443-460. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10081-x

Decreto 876 EXENTO. (2019, 12 de septiembre). Ministerio de Educación. https://www.bcn.cl/leychile/navegar?idNorma=1136650

Escudero, I., García, M., Llinares, S., y Sanchez, V (1996). *La formación de profesores de matemáticas de secundaria y bachillerato: algunas consideraciones para el futuro*. Kronos.

Fernandes, D., y Silveira, M. (2012). Evaluación de la motivación académica y la ansiedad escolar y posibles relaciones entre ellas. *Psico-USF 17*(3), 447-455. https://doi.org/10.1590/S1413-82712012000300011

Fernandez, R., Prada, R., y Rincón, G. (2019). ¿Se relacionan las creencias sobre las matemáticas con el rendimiento académico en matemáticas en estudiantes de contexto vulnerable? *Eco Matemático, 10*(2), 6–15. https://doi.org/10.22463/17948231.2588

Malvasi, V., y Gil-Quintana, J. (2022). Beliefs, performance, and applicability of mathematics in learning for life: The multi-case study at secondary education institutes in Italy. *Journal on Mathematics Education*, *13*(1), 51–68. https://doi.org/10.22342/jme.v13i1.pp51-68

Madariaga, J., Robas, V., yVillaroel, J. (2020). Secondary Education Students' Beliefs about Mathematics and Their Repercussions on Motivation. *Mathematics, 8*(3), 368. https://doi.org/10.3390/math8030368

Martínez, O. (2013). Las creencias en la educación matemática. *Educere*, *17*(57), 231-239.

Meece, J. L., Pintrich, P. R., y Schunk, D. H., (2008). *Motivation in education: Theory, research, and applications.* (3rd ed.). Pearson/Merrill Prentice Hall.

Pajares, M. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62*(3), 307-332.

Pintrich, P. R., y Schunk, D. H. (1996). *Motivation in education: Theory, research, and applications.* Merrill.

Solis, C. (2015). Creencias sobre enseñanza y aprendizaje en docentes universitarios: Revisión de algunos estudios. *Propósitos y Representaciones, 3*(2), 227-260. http://dx.doi.org/10.20511/pyr2015.v3n2.83

Tella, A. (2007). The Impact of Motivation on Student's Academic Achievement and Learning Outcomes in Mathematics among Secondary School Students in Nigeria. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 3*(2), 149–156.

Viale, H. (2012). The motivation and its importance as a vehicle in the teaching of the math. *Revista Digital de Investigación en Docencia Universitaria, 6*(1), 1-2.

FORMADORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICA: NIVELES DE INTEGRACIÓN DE TECNOLOGÍA Y CREENCIAS

Monika Dockendorff, Dany López

Pontificia Universidad Católica de Chile

mdockend@uc.cl, dxlopez@uc.cl

La integración de la tecnología digital (TD) se ha convertido en un aspecto central de la Formación Inicial Docente (FID), donde los Formadores de Profesores de Matemáticas (FPM) son responsables del desarrollo de estas competencias en futuros docentes. Dado que sus prácticas docentes dependen en parte de las creencias que sostienen hacia el uso de la tecnología digital para la enseñanza de la disciplina, este estudio busca comprender la relación entre los niveles de integración tecnológica reportados por los FPM chilenos y sus creencias sobre la enseñanza con tecnología digital. Los resultados sugieren que las creencias explican el 49% de los niveles informados por los FPM.

Educación matemática, Formadores de profesores, Tecnología digital, Creencias.

INTRODUCCIÓN Y LITERATURA

En educación matemática existe un amplio consenso sobre el potencial transformador que tienen las TD para la enseñanza y el aprendizaje. Desafortunadamente, los resultados esperados han sido esquivos, lo que sugiere que el potencial de la integración de la tecnología no es fácil de explotar en el aula de matemáticas. En este sentido, su integración en la FID es una prioridad, donde los FPM, un grupo poco estudiado en este campo, tienen la responsabilidad de desarrollar tales habilidades en los Futuros Profesores de Matemáticas de Secundaria.

Considerando la complejidad de integrar la TD para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, no sorprende que el impacto en los resultados del aprendizaje haya sido poco claro y sujeto a debate hasta hace poco. Los informes de la OCDE han encontrado muy poca evidencia sobre los beneficios de la integración e innovación de las TIC en la educación matemática (OECD, 2015). Pero recientemente, investigaciones han establecido estándares rigurosos para analizar experiencias de aprendizaje cada vez más heterogéneas utilizando TD, incluidas varias variables para una mayor aclaración: diferenciar por tipo de herramienta, nivel educativo, materia, método de instrucción, apoyo al estudiante y capacitación docente, permite comprender mejor los efectos informados, que parecen ser positivos (Hillmayr et al., 2020).

Para lograr buenos resultados de aprendizaje, la FID es crucial en el modelamiento docente donde los estudiantes desarrollen actitudes positivas para el uso de la TD y son guiados para obtener los máximos beneficios posibles de estas herramientas cognitivas (Gokdas y Torun, 2017). En consecuencia, la mayoría de los países han emprendido reformas curriculares para educar a los futuros docentes a fin de incluir la capacidad de integrar herramientas tecnológicas en la instrucción (Rizza, 2011). Los estándares internacionales para la preparación de profesores de matemáticas de secundaria en todo el mundo incluyen la capacidad de enseñar matemáticas utilizando TD. “Usadas estratégicamente, las tecnologías matemáticas específicas del contenido ayudan a los estudiantes a explorar e identificar conceptos y relaciones matemáticas” (NCTM, 2015, p. 1). A pesar del reconocimiento casi universal de la importancia de una competencia digital entre los docentes de aula, aún no ha surgido un consenso sobre cómo garantizar dicha competencia (Trgalová y Tabach, 2018).

Por su parte, las estrategias para integrar la TD en la FID aún son muy heterogéneas y se basan en el comportamiento y el conocimiento de los FP, a quienes se considera "guardianes" en la preparación de futuros docentes para la integración de la tecnología (Tondeur et al., 2019). Una de las deficiencias en esta área es que no existe un cuerpo de estándares ampliamente aceptado para los formadores de docentes. Además, como conjunto, los FPM no son un grupo homogéneo. Los matemáticos y los educadores de matemáticas comunican diferentes perspectivas de la disciplina a los futuros profesores en la FID (Marshman y Goos, 2018) y tienen diferentes creencias, valores, epistemologías, experiencia y estilos de enseñanza (Mohn, 2018). Estos aspectos son muy relevantes para comprender la integración de la TD, en particular elementos afectivos como las creencias.

MARCO TEÓRICO

Niveles de integración tecnológica: Bajo la premisa de que, para una integración tecnológica exitosa, los alumnos se benefician del modelamiento de sus formadores y de las oportunidades que les ofrecen para usar la TD durante FID, evaluar los niveles de integración tecnológica que exhiben los FPM en su docencia es clave para comprender su grado de preparación para formar futuros docentes. De los múltiples modelos reportados en la literatura para comprender la adopción de tecnología por parte de los docentes, el más utilizado es el marco teórico denominado Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK). Este modelo surge como una extensión del concepto acuñado por Shulman en 1986 conocimiento pedagógico del contenido (PCK), incluyendo la tecnología como una tercera dimensión. TPACK ha ganado popularidad por su sencillez y generalidad, pero también ha sido criticado por ser considerado una herramienta muy espesa, incapaz de recoger especificidades disciplinarias, y por ignorar aspectos afectivos en el estudio del fenómeno en cuestión. En esta línea, la propuesta de Niess et al. (2009) representa un esfuerzo por adaptar el marco TPACK al campo de las matemáticas mediante la generación de estándares e indicadores de desempeño específicos. Afortunadamente, el *modelo de desarrollo* que acompaña a este marco describe el crecimiento progresivo hacia la consecución de estos estándares diferenciando cinco niveles de integración de TD.

Creencias sobre la enseñanza con tecnología digital: Para abordar la falta de aspectos afectivos medidos con el *modelo de desarrollo* TPACK, se incluyeron en este estudio las creencias que sostienen FPM sobre la enseñanza con tecnología digital. Dado que las creencias se forman tempranamente, son relativamente inflexibles, perseveran incluso a la luz de las contradicciones (Pajares, 1992), y actúan como bases estancadas que determinan el comportamiento, se espera que en FPM las creencias operen como un factor altamente determinante para la integración de TD, más que otras orientaciones personales como las actitudes, la autoeficacia y la motivación.

Las creencias sobre la enseñanza con TD en educación matemática se refieren al papel que ésta juega en el proceso educativo, y comprenden los efectos perjudiciales o beneficiosos que su uso puede tener en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Estas creencias han sido recientemente sistematizadas en una *Escala de Creencias* para evaluar su presencia, y estudiadas y reportadas por Thurm y Barzel (2022). La especificidad temática de este instrumento permite un análisis detallado y sugiere perspectivas sobre las seis creencias específicas reportadas: 1. *Múltiples representaciones*: el valor de la tecnología para vincular dinámicamente diferentes formas de representación. 2. *Aprendizaje por descubrimiento:* el valor de la tecnología para apoyar la exploración de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes. 3. *Tiempo requerido*: la idea de que enseñar con tecnología requiere tiempo adicional. 4. *Pérdida de habilidades*: consecuencias negativas del uso de la

tecnología en las habilidades manuales básicas de los estudiantes. 5. *Perjuicio que provoca en el razonamiento*: el uso de la tecnología conducirá a "pulsar botones" sin sentido y es más un sustituto del pensamiento que un apoyo para la comprensión. 6. *Dominio de conceptos y procedimientos antes*: creencias sobre si la tecnología solo debe usarse después de que los estudiantes hayan logrado el dominio de las matemáticas sin tecnología.

DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

La presente comunicación corresponde a la fase cuantitativa de un estudio doctoral más amplio de métodos mixtos titulado “Niveles de integración tecnológica de Formadores de Profesores de Matemáticas: relación con sus creencias y caracterización de su aprendizaje”. Esta primera fase tiene como objetivo responder las siguientes preguntas de investigación: 1. ¿En qué medida las creencias explican los niveles de integración tecnológica reportados por FPM? y 2. El tipo de FPM ¿actúa como variable moderadora de la relación entre creencias y niveles de integración de tecnología?

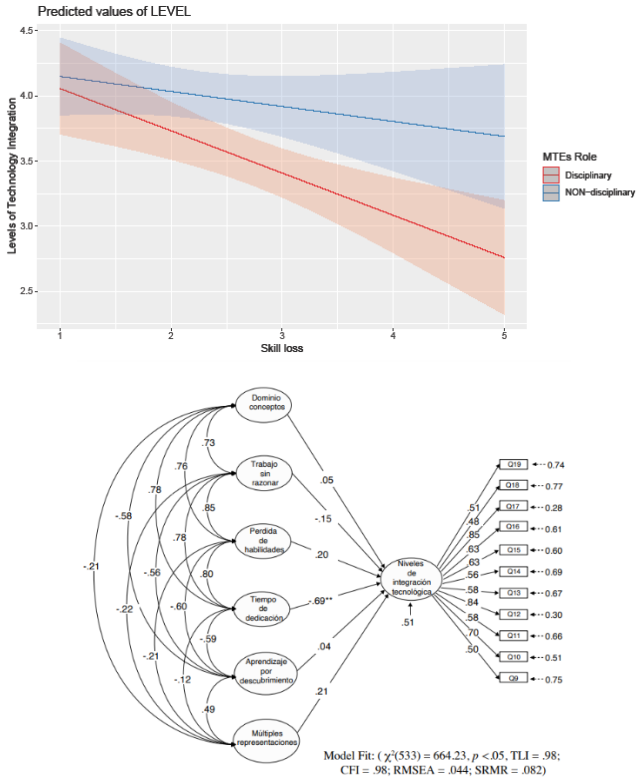
Para examinar los niveles de integración tecnológica reportados por FPM y sus creencias sobre la enseñanza con TD se elaboró un cuestionario en línea que incluye las escalas descritas anteriormente: 1. *Modelo de desarrollo* TPACK (11 ítems) y 2. *Escala de Creencias* (6 ítems). Además, el cuestionario incluyó 7 ítems para caracterizar a las FPM en sus aspectos sociodemográficos y en su rol como FPM, recopilándose datos sobre su edad, género, nivel académico, experiencia, afiliación universitaria, tipo de FPM (clasificándolos en una o dos de las siguientes categorías: a) Disciplinar; b) Didacta; c) Supervisor de práctica o d) Profesor de tecnología educativa -indicando rol principal y secundario cuando corresponda-) y estrategia de integración de tecnología en el programa donde se desempeña. El cuestionario lo recibieron más de 400 FPM de 21 universidades del país, obteniéndose 92 formularios completos entre junio y agosto de 2022.

RESULTADOS

En términos descriptivos se puede señalar que la mitad de los FPM en Chile tienen entre 31 y 40 años. 2/3 de ellos son hombres. Un 50% tiene grado de magíster y la otra mitad doctorado. La mayoría tiene menos de 10 años de experiencia. Respecto de la tipología de FPM, la mitad de los participantes tienen un perfil mixto, es decir que se identifican con más de un rol. El 50% de los PFM reportan estrategias transversales para integrar la tecnología en sus programas.

Modelo Estructural: Para responder la primera pregunta de investigación se ajustó un modelo de ecuaciones estructurales MES, que vincula las creencias y los niveles de integración tecnológica reportados por FPM. Como se observa en el modelo de la Figura 1, las creencias explican un 49% de la variabilidad de los niveles de integración reportados por FPM, lo que es consistente con la hipótesis de que las creencias actúan como un factor determinante de las prácticas docentes de FPM en su dimensión tecnológica.

Figura 1. *Modelo Estructural Niveles-Creencias.*



Modelo de Moderación: Para responder la segunda pregunta de investigación, se realizaron análisis de regresión múltiple con interacción para dos subgrupos: FPM disciplinares (matemáticos) y no-disciplinares (didactas, supervisores y profesores tecnológicos). Los hallazgos muestran que FPM disciplinares integran menos tecnología que los formadores no-disciplinares, y el impacto que tienen las creencias en sus niveles de integración tecnológica es más fuerte (pendientes más pronunciadas). Ilustraremos estos hallazgos presentando el efecto moderador por tipología para dos creencias: *pérdida de habilidades* (Figura 2) y *aprendizaje por descubrimiento* (Figura 3).

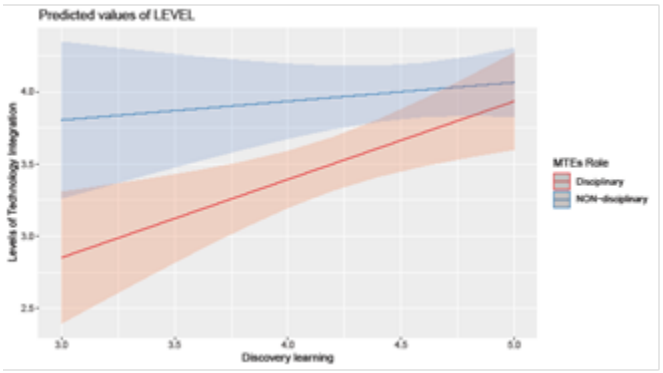
Figura 2.

Moderación (PH-Niveles).

Para la creencia de *pérdida de habilidades PH*, obtuvimos pendientes negativas, lo que es consistente con la naturaleza perjudicial de esta creencia. Comparando ambas curvas, verificamos que, para cada nivel de la creencia *PH*, los formadores disciplinares (curva roja) exhiben niveles más bajos de integración tecnológica que los formadores no disciplinares (curva azul). Además, la curva roja es más pronunciada que la azul, mostrando que el efecto decreciente en los niveles de integración de la tecnología al sostener la creencia *PH* es más fuerte que para los formadores disciplinares.

Figura 3.

Moderación (AD-Niveles).



Para la creencia de *aprendizaje por descubrimiento AD* se obtuvieron pendientes positivas, lo cual es consistente con el carácter benéfico de esta creencia. Al comparar ambas curvas, verificamos que para cada nivel de creencia AD que se sostiene, los formadores disciplinares (curva roja) exhiben niveles más bajos de integración tecnológica que los formadores no-disciplinares (curva azul). Además, la curva roja es más pronunciada que la azul, mostrado que el efecto creciente sobre los niveles de integración de la tecnología al sostener la creencia AD es más fuerte que para los formadores disciplinares.

CONCLUSIONES

Aplicando modelos de ecuaciones estructurales MES encontramos que, un 40% de la variabilidad de los niveles reportados de integración tecnológica se explican por creencias. Para los formadores disciplinares, las creencias son más determinantes en su comportamiento que para formadores no-disciplinares, e impactan más fuerte en sus niveles de integración tecnológica, reduciéndolos o aumentándolos más rápido, dependiendo de la naturaleza perjudicial o beneficiosa de la creencia en cuestión. La escasa evidencia sugiere que las creencias más maleables son las relacionadas con el uso de la tecnología para el aprendizaje, lo que resulta prometedor para las iniciativas de DP en este campo, a la luz de los resultados obtenidos.

REFERENCIAS

Gokdas, I., y Torun, F. (2017). Examining the impact of instructional technology and material design courses on technopedagogical education competency acquisition according to different variables. *Kuram ve Uygulamada Egitim Bilimleri*, *17*(5), 1733–1758. https://doi.org/10.12738/estp.2017.5.0322

Hillmayr, D., Ziernwald, L., Reinhold, F., Hofer, S. I., y Reiss, K. M. (2020). The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: A context-specific meta-analysis. *Computers and Education*, *153*, 103897. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103897

Marshman, M., y Goos, M. (2018). The Beliefs about Mathematics , its Teaching and Learning of those

Involved in Secondary Mathematics Pre-Service Teacher Education. *Proceedings of the 41st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 519–526).

Mohn, A. R. (2018). *Collaboration among Mathematicians and Mathematics Educators: Working Together to Educate Preservice Teachers*. *ProQuest Dissertations and Theses*. Retrieved from https://scholarcommons.usf.edu/etd

NCTM. (2015). *Strategic Use of Technology in Teaching and Learning Mathematics*. Retrieved from http://www.iste.org/standards/nets-for-teachers.aspx

Niess, M., Ronau, R., Shafer, K., Driskell, S., Harper, S., Jhonston, C., y Özgün-Koca, S. A. (2009). Mathematics Teacher TPACK Standards and Development Model. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *9*(1), 4–24. https://doi.org/10.1016/0014-2999(88)90271-3

OECD. (2015). *Students, Computers and Learning*. *OECD Publishing*. https://doi.org/10.1787/9789264239555-en

Pajares, M. F. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy Construct. *Review of Educational Research*, *62*(3), 307–332. https://doi.org/10.3102/00346543062003307

Rizza, C. (2011). *ICT and Initial Teacher Education: National Policies, OECD Education Working Papers, No. 61.* OECD Publishing, Paris.

Thurm, D., y Barzel, B. (2022). Teaching mathematics with technology: a multidimensional analysis of teacher beliefs. *Educ Stud Math,* 109, 41–63

Tondeur, J., Scherer, R., Baran, E., Siddiq, F., Valtonen, T., y Sointu, E. (2019). Teacher educators as gatekeepers: Preparing the next generation of teachers for technology integration in education. *British Journal of Educational Technology*, *50*(3), 1189–1209. https://doi.org/10.1111/bjet.12748

Trgalová, J., y Tabach, M. (2018). In Search of Standards: Teaching Mathematics in a Technological Environment. In *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education* (pp. 387–397). https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4_23.

ESTUDIO SOBRE LAS COMPETENCIAS DIGITALES DE DOCENTES EN MATEMÁTICA DE UNA UNIVERSIDAD PRIVADA DE SANTIAGO

Ana Rojas, Alejandra González, Kessia Montero, Rocio Ramírez

Universidad Católica Silva Henríquez

arojasc@micsh.cl, acgonzalez@miucsh.cl, kmontero@miucsh.cl, rramirezg@miucsh.cl

El siguiente estudio de investigación tiene como propósito indagar cuáles son las percepciones que tienen los docentes de matemáticas de una universidad en Santiago, respecto a las competencias digitales que se requieren para el desarrollo de su conocimiento disciplinar dentro y fuera del espacio educativo. Para dejar evidencia de cómo fue su formación profesional y su aprendizaje autónomo en conjunto con lo aportado académicamente por su institución de educación superior, logrando un impacto positivo para que el docente en ejercicio se desempeñe positivamente y utilice estas competencias para enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje en sus estudiantes. Este estudio se desarrolla a través de entrevistas que tienen como finalidad obtener la mayor información para generar una conclusión que indique el conocimiento que tienen sobre su propio aprendizaje continuo, respecto a las competencias digitales necesarias en la sociedad actual que cada vez evoluciona en cuanto a las habilidades del siglo XXI y las TIC.

Habilidades digitales, Docentes de matemáticas, Formación docente, TIC.

INTRODUCCIÓN

El presente informe abordará el desarrollo de las competencias digitales de los docentes en aula en un intervalo de cinco años, en donde definiremos competencias digitales como:

> Las competencias que debe tener un profesor en su práctica y desempeño profesional para mantenerse integrado en la Sociedad del Conocimiento y facilitar que sus estudiantes lo hagan debe apropiarse de un saber hacer con las tecnologías de la información y la comunicación para acompañar procesos pedagógicos, relacionales y comunicacionales como gestión y de desarrollo personal y social (MINEDUC, 2007, p.6).

Lo anterior, con el fin de que no sólo sean herramientas utilizadas por los alumnos en el aula de clases, sino preparar a un agente social que pueda ocupar las competencias digitales junto con las TIC para poder desarrollarlas.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Antecedentes

Con el gran desarrollo de nuevas tecnologías se han desarrollado una diversidad de herramientas y programas con la finalidad de ser un apoyo en el aprendizaje de los estudiantes, por lo cual los docentes poseen a disposición una gran variedad de material para sus clases.

Existe un antes y un después en el cual se ha visto un aumento del uso de estas herramientas en el aula. Los docentes empezaron a utilizarlas poco a poco, un ejemplo de esto puede ser la implementación del PowerPoint, lo cual solo es un inicio del uso de estas herramientas pues estos docentes no están capacitados digitalmente para el uso de estos materiales para utilizarlos en el aula.

Fue en el año 2019 cuando comenzó realmente un alza en el uso de estas herramientas digitales, puesto que un nuevo virus fue propagado, COVID-19, el cual afectó mundialmente tanto en lo social, económico y, especialmente, en lo educativo. En Chile, con la llegada del primer caso, se experimentaron dos años de pandemia en la que, por seguridad sanitaria, se tuvo que estar en cuarentena cerrando todo espacio que fuera punto de reunión. Debido a esto, los centros educativos fueron cerrados en todo el país, pues lo principal era resguardar la seguridad y protección de los niños y adolescentes. Los establecimientos tuvieron que implementar por primera vez una educación virtual, en la cual tanto estudiantes como docentes tuvieron que realizar sus actividades a través de computadoras, celulares o tabletas, utilizando diferentes programas para conectarse a sus clases y/o complementar su aprendizaje.

A nivel mundial, desde una visión tanto estudiantil, como de futuros docentes, se puede observar que la pandemia marcó la perspectiva de las herramientas digitales de los docentes en ejercicio y en formación. Debido a la situación, los docentes debieron adquirir de manera brusca y forzada las competencias para el desarrollo de las clases en contexto de pandemia.

El profesor debe actualizarse en el uso de las TIC para el uso de plataformas de comunicación, pero más importante es desarrollar las habilidades y conocimientos de estrategias para que, a través de esas TIC se logre el aprendizaje significativo del alumnado (Bustamantes et al., 2021). Es decir que con los avances que han surgido, los docentes deben tener una preparación en el uso de herramientas tecnológicas, pero aún más importante que la capacitación para saber usarlas, es la de poder llevar estas herramientas al aula y que sean un aporte en sus clases.

PROBLEMA

Desde la llegada de la pandemia a Chile se ha podido evidenciar que el uso de la TIC fue emergente, impactando altamente a todos los actores presentes en el ámbito de la educación; establecimientos educacionales, docentes, alumnos, apoderados, entre otros.

Al ser tan repentina la utilización de estos recursos, como país se trabajó rápidamente en la elaboración de planes para sobrellevar la enseñanza de mejor manera, sin tomar en cuenta que existían profesionales en el área que no contaban con dichos conocimientos para generar un ambiente óptimo de aprendizaje para y hacia sus estudiantes. Es por esto, que durante el periodo de la crisis sanitaria se vieron afectados todos aquellos actores activos del ámbito educativo, puesto que no estaban preparados, muchos de ellos, para realizar las actividades diarias que comúnmente ocurrían en un espacio físico como la sala de clases. Al momento de introducir las clases en formato online, se vio un déficit en las competencias digitales entre los docentes, de distintas áreas, quienes no poseían un manejo efectivo y óptimo de ellas, y que además no contaban con los instrumentos necesarios para poder llevar a cabo su trabajo de manera virtual.

Es preocupante saber que, a quienes están encargados de educar al futuro del país no se les otorguen herramientas y formación necesaria para abordar esta sociedad más digitalizada en todos los aspectos, y más con todos los recursos que han sido creados para trabajar de manera educativa en las clases, sin importar si surgía o no una emergencia como el COVID-19.

Por esta razón se estudiará el uso de las competencias digitales de docentes de educación matemática formados en una universidad privada de Santiago, que antes de este acontecimiento disponían (y disponen) en su malla curricular la potenciación de la informática educativa en las aulas de clase, y

con esto el uso de herramientas digitales para un mayor desarrollo en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Esto definirá la pregunta de investigación:

¿Cuáles son las percepciones de los profesores de matemática e informática educativa que se encuentran ejerciendo en los establecimientos educacionales con respecto a sus competencias digitales?

OBJETIVOS

El objetivo general de esta investigación es conocer las percepciones de las capacidades digitales de docentes de matemáticas que se encuentran ejerciendo en el aula.

Objetivos específicos:

- Descubrir que entienden los docentes en aula por competencias digitales.
- Explorar los distintos recursos tecnológicos que pueden ayudar en el trabajo dentro del aula.
- Analizar el comportamiento de los docentes frente a las competencias digitales, y cómo estas son abordadas de la manera correcta.

SUPUESTO

Con esto se espera que las opiniones y críticas que nos entreguen los docentes, ya en ejercicio, respondan a nuestra pregunta. Siendo sus reflexiones y comentarios las que sirvan para analizar en qué nivel se encuentran dentro de lo que significa poseer competencias digitales en el siglo XXI. Dando cuenta de los beneficios y falencias que han podido observar a lo largo de su carrera docente, desde cómo obtuvieron dichos conocimientos hasta de qué forma las han aplicado, considerando su buen uso y que les han ayudado para lograr, en lo posible, un aprendizaje significativo en sus estudiantes. Considerando que, al momento de egresar de su formación como profesionales de la educación, se evidenció que dentro de su estadía como estudiantes de pedagogía no se abarcó satisfactoriamente el uso de las TIC para abordar una posible metodología de trabajo online.

MARCO TEÓRICO

En la actualidad las nuevas tecnologías son partícipes de nuestro día a día y, son utilizadas por los diferentes rangos etarios de nuestra sociedad, con usos bastante variados (desde divertirse, a organizar, estudiar, programar, entre otras). Es por esta razón que es necesario aplicar estas nuevas tecnologías en el aula de clases. Para una buena y correcta aplicación de estas existen las denominadas competencias TIC para la docencia o competencia digital docente (CDD) que, según el Ministerio de Educación se definen como:

> Las competencias que debe tener un profesor en su práctica y desempeño profesional para mantenerse integrado en la Sociedad del Conocimiento y facilitar que sus estudiantes lo hagan debe apropiarse de un saber hacer con las tecnologías de la información y la comunicación para acompañar procesos pedagógicos, relacionales y comunicacionales como gestión y de desarrollo personal y social (MINEDUC, 2007, p.6).

Con referente a la formación de las competencias digitales docentes, se ha definido una estructura conformada por 5 dimensiones en las que se abordan diferentes competencias digitales, y los criterios relacionados con ellas, para finalmente terminar en los estándares. Estas dimensiones son: Dimensión

pedagógica, Dimensión Técnica, Dimensión de Gestión, Dimensión Social, Ética y Legal y Dimensión Desarrollo y Responsabilidad Profesional.

Como ha sido mencionado anteriormente, la estructura de la formación de las competencias digitales docentes termina en los estándares de estas. La definición de estándar según la Real Academia Española es adj. Que sirve como tipo, modelo, norma, patrón o referencia (RAE, 2022). Contextualizando la ya mencionada definición con el ámbito que nos acontece con esta investigación, se considerará Estándares como normas aceptadas de forma general las cuales constituyen criterios, medidas descriptivas, específicas y explicativas que establecen que se puede considerar como un producto de calidad (Cabezas y Vásquez, 2021) y también que el estándar ayuda a saber cómo materializar la competencia y cómo evaluarla, de modo que la evaluación de una competencia se logra a través de la evaluación que se hace de cada uno de los estándares pertenecientes a la competencia. Así, por ejemplo, si una competencia tiene tres criterios, se encontrará con tres estándares y la evaluación de esos tres estándares dará como resultado la evaluación de la competencia. (MINEDUC, 2011). Según esto y la estructura de competencias digitales entregadas por el MINEDUC a través de enlaces hay que identificar que cada criterio perteneciente a una competencia tiene un estándar en específico el cual nos permite dar cuenta del logro de las competencias TIC identificadas.

MARCO METODOLÓGICO

El enfoque que se le quiere dar a la investigación está descrito bajo una metodología cualitativa, en donde se describe que como investigador/a, seas parte del contexto social y espacial en el cual se encuentran los sujetos con los que se trabajarás en la investigación (Martínez, 2022). Lo que permitirá profundizar en todos aquellos aspectos considerados relevantes en nuestra investigación, como lo son el uso de las TIC dentro del aula, pero más específicamente en la relación que tiene con los docentes en formación y cómo esta tiene sus repercusiones al momento de diseñar un plan de estudio para potenciar el proceso de enseñanza y aprendizaje en una sala de clases.

Es importante evaluar cada actor presente en esta problemática, por lo que se procederá a buscar y obtener información respecto a la forma en la que están siendo preparados los estudiantes de pedagogía, principalmente de Matemáticas de una universidad privada de Santiago. Poniendo un gran énfasis en aquellos egresados hasta hace un par de años, para así poner en una balanza los aspectos, positivos y negativos, que nos entrega el enseñar en una sociedad digitalizada y llena de recursos tecnológicos.

Algunas de las preguntas a realizar serán: ¿Cómo son utilizados las TIC en el ámbito educativo? ¿Se están utilizando los recursos adecuados para cada clase? ¿De qué forma el docente en ejercicio logró dominar las competencias digitales? al utilizar las herramientas ¿cómo adquirió los conocimientos? y si se aprecia un desconocimiento sobre el tema ¿Por qué cree usted que no está familiarizado con las tecnologías de la información y comunicación, siendo consciente de la sociedad digital en la que estamos inmersos?

Se utilizarán instrumentos como encuestas con escalas de valoración, entrevistas a los docentes en ejercicio, al cuerpo académico a cargo de la formación de los estudiantes egresados, al cuerpo docente del establecimiento educacional en donde se desenvuelven los profesores y a los alumnos que reciben los conocimientos. Tomando en cuenta las condiciones en las que trabajan y la disponibilidad tecnológica que posean es sus espacios de trabajo y labor docente. Para así exponer las distintas

realidades, que evidentemente existen dentro de la comuna, y encontrar soluciones que sean acorde a las necesidades de cada problemática que emerge de esta investigación.

CONCLUSIONES

En conclusión, con esta investigación se logrará tener una mejor visión de cómo están realmente desarrolladas las competencias digitales, tanto como eran antes y después de pandemia, también en cómo estas les ayudan o no en sus clases, si estas son aprovechadas realmente por parte de ellos y por sobre todo si los establecimientos en los que trabajan están equipados para que estos docentes también puedan apoyar el desarrollo de capacidades digitales de sus estudiantes.

REFERENCIAS

Bustamantes, V., González, N., Ibarra, M., Ried, A., Vergara, D., y Castillo, F. (2021). Formación docente en TIC y su evidencia en tiempos de COVID-19. *Revista Saberes Educativos*, 6, 144-168.

Martinez, E. (2022.). *¿Cómo redactar el marco metodológico en una investigación cualitativa?* Aprendizaje U. Chile.
https://aprendizaje.uchile.cl/recursos-para-leer-escribir-y-hablar-en-la-universidad/profundiza/profundiza-en-la-tesis/como-redactar-el-marco-metodologico-en-una-investigacion-cualitativa/

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2011). Competencias y Estándares TIC para la profesión docente. Autor.

Cabezas, F., y Vásquez, M. (2021). *Percepciones de docentes de pedagogía en matemática e informática educativa egresados de una universidad privada sobre sus competencias digitales en el contexto de las clases de matemática online en pandemia*. [Tesis de Pregrado, Universidad Católica Silva Henríquez, Chile].

Moya, M. (2017). Percepciones de estudiantes de Pedagogía en Matemática acerca de sus competencias TIC: un estudio de caso. *Foro educacional*, (28), 117-138.

PROPUESTA DE MODIFICACIÓN DE METODOLOGÍA DE ENSEÑANZA, EN RELACIÓN CON UTILIZACIÓN DE TIC PARA LA ENSEÑANZA DEL MA07 OA 09 (ECUACIONES E INECUACIONES)

Jean Bahamondes, José Opazo, Matías Silva, Cristian Bravo

Universidad Católica Silva Henríquez

jbahamondesm@miucsh.cl, jopazom@miucsh.cl, msilvar@miucsh.cl, cabravog@miucsh.cl

La presente investigación surge desde la problemática que se ha observado a raíz del análisis del currículum nacional al ver una nula utilización de software educativo para la enseñanza de las ecuaciones e inecuaciones, donde el objetivo principal es establecer una propuesta de modificación en el currículum de matemáticas desde la utilización de las TIC y software educativo basados en un proceso de análisis, observación y evaluación de la metodología propuesta, así mismo, esperamos por este medio potenciar el desarrollo de habilidades y competencias digitales en las aulas, estimulando el trabajo y uso de tecnologías por parte de los docentes y estudiantes en pro de un desarrollo con las exigencias de la nueva era digital.

Educación, Software educativos, Ecuaciones e inecuaciones lineales, Competencia digitales, Habilidades del siglo XXI.

ANTECEDENTES

Parte importante del desarrollo de habilidades del siglo XXI es la consideración de las competencias digitales para la formación de los estudiantes en su periodo escolar. Como apoyo a la investigación se puede considerar el *Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de apropiación*, realizado por Fernández, Riveros y Montiel en el año 2017. Los autores expresan la relevancia del uso de software educativo dentro de la enseñanza de las matemáticas, uno de sus argumentos que Fernández et al. (2007, p. 120) refieren es que "las nuevas tecnologías ofrecen un abanico muy amplio para el diseño de medios de enseñanza y la calidad pedagógica de éstos reside en la capacidad del profesor para establecer límites apropiados entre la estimulación y la sobre estimulación".

Es posible, también, nombrar las competencias digitales para los estudiantes especificando en la estructura manejada por el Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (INTEF, 2017), donde se consideran cinco áreas de la competencia digital: la información y alfabetización informacional; comunicación y colaboración; creación digital; seguridad; y resolución de problemas. Proponiendo 4 niveles de competencia que se desarrollan a lo largo de la vida del estudiante: principiante, aprendiz, usuario y usuario avanzando; y en cada uno de estos niveles se tendría en cuenta la conexión (comprender el impacto y el potencial de las TIC), la seguridad y la responsabilidad.

Respecto a el Objetivo de Aprendizaje número nueve de séptimo básico, que plantea el currículum, se señala:

Modelar y resolver problemas diversos de la vida diaria y de otras asignaturas, que involucran ecuaciones e inecuaciones lineales de la forma:

- $ax = b$; $x/a = b$ (a, b y $c \in N$; $a \neq 0$) ;

- $ax < b$; $ax > b$ $x/a < b$; $x/a > b$ (a, b y $c \in N$; $a \neq 0$).

Con respecto a lo anterior, no se habla de una manera directa sobre la utilización de software o TIC como algo que pueda complementar en el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes, viendo esto como una manera de simplificar la explicación del Objetivo de Aprendizaje planteado y el poder también desarrollar diversas competencias o habilidades en los mismos estudiantes.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En el currículum nacional, para el OA 09 de séptimo básico, el Ministerio de Educación [MINEDUC] no entrega ningún tipo de material o software digital como referencia a los docentes para su uso posterior en el aula, por lo cual es notoria la ausencia del uso de TIC para la enseñanza del contenido per se, más bien, continúan basándose en una metodología tradicional para modelar y resolver problemas de ecuaciones e inecuaciones. Por consecuencia, el no uso y desaprovechamiento de los recursos digitales brindados en la red, pasa por alto la potencial capacidad del uso de TIC en la enseñanza/aprendizaje de ecuaciones e inecuaciones lineales, con el fin de desarrollar competencias digitales en la nueva generación de estudiantes.

Por lo anterior, identificamos que la problemática que nos convoca aquí es la ausencia del uso de software educativo en la enseñanza del OA 09 de séptimo básico, establecido por el MINEDUC a través del Currículum Nacional Chileno, eludiendo el potencial desarrollo de competencias digitales en la nueva generación de estudiantes. Frente a esta problemática nacen las siguientes preguntas de investigación: ¿Es pertinente modificar la metodología de enseñanza y aprendizaje estipulada en el OA 09 del currículum de séptimo año básico, priorizando el uso y aplicación de software educativo en las aulas? y por consecuencia de profundizar en la temática surge una segunda pregunta ¿Cuáles son los beneficios que podría traer consigo el uso de software educativo en las aulas para el aprendizaje de ecuaciones e inecuaciones?

a. objetivos
    i. Objetivo general: ***Establecer*** una propuesta de modificación en el currículum de matemáticas de MA07 en el OA 09 referente a ecuaciones e inecuaciones, con el uso de TIC y softwares educativos.
    ii. Objetivo específico:
        1. **Analizar** el MA07 OA 09, y su desarrollo actual.
        2. **Evaluar**: la preeminencia de las metodologías a investigar (con/sin uso de TIC)
        3. **Observar y comparar** ambas metodologías de clases, tanto la tradicional basada en los estándares establecidos por el currículum, y la propuesta con uso de TIC.

b. Supuestos
    i. La utilización de metodología con implementación de TIC para la enseñanza de ecuaciones potenciará el aprendizaje del OA 09.
    ii. Se genera un cambio respecto a la percepción de clase tradicional y comenzar a aplicar o utilizar las Tic dentro del aula.

MARCO TEÓRICO

Esta investigación se basa en la crítica hacia la escasez o nula utilización de un software educativo o TIC respecto al MA07 OA 09, y surge mediante el análisis de las bases curriculares planteadas por parte del MINEDUC en la página del currículum nacional. Con respecto a esto, y tomando como base diversas investigaciones desde esta problemática, surge la iniciativa de crear una propuesta de mejoramiento. Esto, con el fin de potenciar la enseñanza y aprendizaje del objetivo nombrado, siendo fundamental la utilización de software o TIC como metodología activa en el aula y, teniendo como objetivo el desarrollo de las competencias digitales tanto en docentes como estudiantes.

Dentro del aula existe un sin fin de aspectos positivos al considerar la utilización de TIC o software como parte de la enseñanza, por ende, la presente investigación contempla en el texto publicado: ***Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de apropiación*** por Fernández et al. (2017), como parte fundamental en el desarrollo teórico de esta propuesta, donde a través de este escrito se puede visibilizar aportes e ideas respecto al uso de software en el aula como método didáctico viable y potenciador para el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Como se nombró anteriormente, la investigación está basada en la ausencia del uso de tecnologías para la enseñanza del MA07 OA 09, relacionado con las ecuaciones e inecuaciones de primer grado, para esto se considerara la investigación de Alexander León Soto llamada ***Teorías contemporáneas para la enseñanza de ecuaciones lineales con una incógnita, mediante el uso de TIC***, de esta forma podemos contar con un amplio abanico de teorías que aportan directamente al cambio de metodología de enseñanza aplicada al objetivo de aprendizaje estudiado.

> Es importante diseñar proyectos educativos para la enseñanza de las matemáticas, soportado en el uso de las tecnologías de la información y la comunicación que permita potenciar habilidades de los estudiantes en diferentes temas del área; seguir profundizando sobre las tecnologías computacionales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, a fin de mitigar las deficiencias del aprendizaje y facilitar el acercamiento del educando a las diferentes temáticas abordadas en clase, afianzando los desempeños investigativos de los actores del proceso (Soto, 2019, p. 15).

Es importante observar algunas propuestas para la utilización de software educativo en las clases de ecuaciones e inecuaciones. Para esto hemos analizado el texto ***Propuesta del uso de las TIC en el estudio de ecuaciones e inecuaciones***, elaborado por Andrés Marcos Encina miembro de la Universidad Politécnica de Cataluña. El artículo mencionado propone una respuesta a dos cuestiones: el uso de pizarras digitales y problemas aplicados a la vida cotidiana para la explicación del tema de ecuaciones. Las propuestas que se recalcan en el texto es la utilización de GeoGebra y poner situaciones que se asemejen a problemas que el estudiante pueda encontrar en la vida cotidiana. “La aplicación de las TIC, implica una innovación en el mundo de la educación. Frente al método convencional de pizarra y tiza nos encontramos con pizarras digitales, que abren un sinfín de posibilidades a la hora de utilizar diferentes recursos” (Erdmann, 2013, p. 3).

En la presente investigación se da cabida al sustento teórico/conceptual como una de las bases de estudio, tomando como referencia la investigación ***importancia de las TIC en enseñanza de las matemáticas*** elaborada por Jorge Luís Rodríguez Contreras, Julio Cesar Romero Pabón y Gabriel Mauricio Vergara Ríos, miembros pertenecientes a la Universidad del Atlántico (Colombia). En este artículo es extraíble variada información sobre nuestra temática, donde se aborda, progresivamente, la importancia del uso de TIC para el nuevo siglo y la educación, las ventajas y desventajas de las

tecnologías, y la aplicación de las tics en entornos educativos, entregando así un sustento teórico primordial para el planteamiento de postulados y conjeturas.

METODOLOGÍA

El tipo de investigación escogido es cualitativo de carácter exploratorio. La investigación cualitativa explora y entiende los significados individuales o grupales atribuidos a la problemática social humana, además que mantiene una coherencia con el paradigma de investigación, fundamentado en enfoques como el constructivismo y la teoría crítica.

El desarrollo de esta propuesta se basa en diversos momentos de aplicación, siendo fundamental, en primer lugar, formular una planificación que considere el uso de tecnologías orientadas a la educación, como también software que se relacionen con el OA 09 de matemáticas. "La integración de recursos multimedia, debe responder al objetivo de estimular una participación activa del estudiante en la construcción del conocimiento" (Fernández et al., p.11). Además, es importante que los estudiantes vean que estas prácticas sirven para resolver problemas cotidianos, por lo tanto, dentro de la planificación se debe de considerar la resolución de problemas como habilidad necesaria para el desarrollo de la clase.

En segundo lugar, se procede con la observación de una clase basada en el uso de una metodología tradicional, para posteriormente ejecutar la planificación considerada en la propuesta de mejora. Teniendo esto como principal objetivo, se genera un análisis respecto a cuál de las dos clases funciona de mejor manera, tomando en consideración el comportamiento de los estudiantes y su motivación.

Finalmente, se realiza una entrevista a los profesores que estén involucrados dentro de la investigación, y también a los estudiantes, extrayendo de esto la relevancia que lograron encontrar ellos de estas clases y aportes o mejoras a utilizar para futuras clases.

PROYECCIONES

La presente investigación tiene como proyección el comenzar a utilizar las TIC en el proceso de enseñanza del objetivo de aprendizaje 09 de 7° básico, esto con el fin de complementar y facilitar este proceso. También, el poder observar de una manera más dinámica y entretenida las ecuaciones e inecuaciones.

Por último, no se deja de lado el desarrollo de las competencias digitales asociadas a la enseñanza de estos contenidos a través de una TIC, trayendo un sin fin de beneficios hacia el estudiante y, generando en sí un pensamiento crítico en él. Tomando también lo del aprendizaje significativo, esto dará un mayor aporte, ya que va más allá de un simple cálculo, si no que los estudiantes podrán lograr una mayor interacción con el contenido, haciéndose partícipe de su proceso de enseñanza aprendizaje.

REFERENCIAS

Erdmann, R. (2013). *Propuesta del uso de las TIC en el estudio de ecuaciones e inecuaciones*. UPC, Institut de Ciències de l'Educació.

Fernández, I., Riveros, V., y Montiel, G. (2017). Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de apropiación. *Revista Omnia, 23(1),* 9-19.

Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y Formación del Profesorado INTEF (2017). *Marco Común de Competencia Digital Docente*. Autor.

Minesterio de Educación de Chile [MINEDUC]. *Curriculum Nacional de Chile*. https://www.curriculumnacional.cl/portal/

Rodríguez, J., Romero, J., y Vergara, G. (2017). Importancia de las tic en enseñanza de las matemáticas. *MATUA: Revista de matemática de la universidad del Atlántico, 4(2),*41-49. Colombia.

Soto, A. (2019). Teorías contemporáneas para la enseñanza de ecuaciones lineales con una incógnita, mediante el uso de TIC. Universidad Cooperativa de Colombia [Tesis de Maestría, Universidad Cooperativa de Colombia, Colombia].

CONOCIMIENTOS MOVILIZADOS POR FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA SOBRE HOMOTECIA MEDIANTE EL USO DE LAS TIC

Bryan Cornejo, Kevin Troncoso, Noemí Valenzuela, Nicolás Sánchez Acevedo

Universidad Central de Chile

bryan.cornejo@alumnos.ucentral.cl, kevin.troncoso@alumnos.ucentral.cl,
noemi.valenzuela@alumnos.ucentral.cl, nicolás.sanchez@ucentral.cl

El uso de recursos tecnológicos ha obtenido grandes impactos dentro de la enseñanza de la matemática entregando nuevos aportes a la enseñanza y aprendizaje. Esta investigación tiene como finalidad identificar e interpretar el conocimiento tecnológico-pedagógico del contenido de homotecia. Nos apoyamos teóricamente en el modelo de conocimiento TPACK. La metodología para la recolección e interpretación de los datos es cualitativa de alcance descriptivo. Algunos resultados muestran que algunos profesores conocen el papel didáctico disciplinar que aporta el uso recursos para la enseñanza de la homotecia, otros profesores lo usan, pero de manera más intuitiva.

Formación inicial, Estándares, Tecnologías de la información y comunicación, Conocimientos, TPACK.

INTRODUCCIÓN

Las TIC hoy en día forman parte primordial para la educación como herramienta pedagógica al momento de enseñar matemática. Permite que los estudiantes comprendan de mejor manera los conceptos matemáticos, como también los profesores en el manejo o representaciones de estos. Silva et al. (2008) propusieron estándares enfocados en cinco dimensiones (Área pedagógica, aspectos sociales, aspectos teóricos, gestión escolar y desarrollo profesional) con el objetivo de potenciar y desarrollar un proceso de acreditación en ambientes pedagógicos sobre el uso de TIC, para la formación inicial docente y los docentes en ejercicio.

Para las dificultades que posiblemente pueden presentar los estudiantes en formación inicial docente de matemática, en el eje de geometría, se pueden abordar y dar solución con la utilización de recursos TIC, esto es debido a la ayuda que les entrega a los estudiantes al modelar cuerpos geométricos, entregando conocimiento pictórico del contenido. Botero (2020) dio cuenta que los estudiantes muestran bajo desempeño en las competencias matemáticas y bajo nivel de destreza para aplicar los recursos tecnológicos en la consecución de aprendizajes significativos en matemática, también que el docente emplea muy poco las TIC en sus actividades pedagógicas.

Dentro de la geometría, el contenido de homotecia se puede innovar en la enseñanza utilizando técnicas tecnológicas incorporando actividades dinámicas a través del aprendizaje colaborativo. El uso de herramientas de este tipo permite una diferencia positiva y significativa en los aprendizajes (Galleguillos, 2011).

Con base en los antecedentes y la problemática planteada sobre el estudio para la formación inicial docente sobre el uso de TIC nos planteamos como objetivo de investigación el siguiente: Identificar e interpretar el conocimiento tecnológico-pedagógico de futuros profesores de matemática de una Universidad privada de la región metropolitana que imparte Pedagogía en Matemática, a partir del desarrollo de una simulación de clase en el contenido de la homotecia.

MARCO DE REFERENCIA

Modelo TPACK

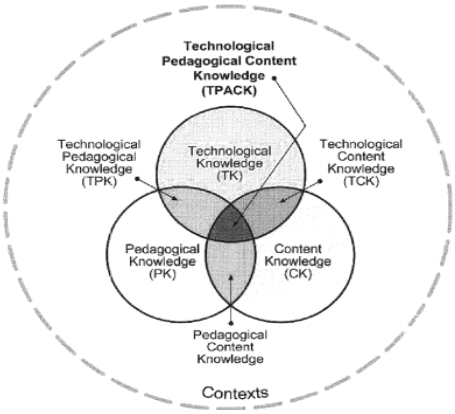
Dentro del último tiempo una de las teorías más importante al momento de integrar las TIC en el desarrollo pedagógico de los docentes en formación es el TPACK (*Technological, Pedagogical And Content Knowledge).* Este fue formulado por Koehler (2006), quien buscó definir los conocimientos que necesitan los profesores en formación para así poder incluir las TIC de forma eficaz dentro del aula. Para este modelo es necesario considerar los conocimientos instrumentales, disciplinares y metodológicos en el momento de integrar las TIC al aprendizaje. Asimismo, estos conocimientos no solo se consideran de manera independiente, sino que también actúan de manera dependiente como un todo sobre lo que moviliza el profesor en la práctica de enseñanza.

Dentro de la creación del TPACK se consideró el estudio de Shulman (1986) sobre el análisis del conocimiento pedagógico del contenido, donde menciona que los docentes deben tener conocimientos tanto del contenido como de la pedagogía para impartir el aprendizaje.

El modelo TPACK busca una reflexión sobre tres tipos de conocimientos. necesarios para los profesores incorporen las TIC de manera eficaz en sus prácticas profesionales. El modelo TPACK, al igual que la sociedad educativa, ha ido evolucionando con el paso del tiempo. Dentro de algunos avances del modelo TPACK encontramos el de Schmidt et al. (2014), estos autores definen siete tipos de conocimientos, los tres primeros son los necesarios por el profesorado para llevar a cabo un aprendizaje óptimo. Estos, a su vez, interactúan entre ellos dando paso a nuevos tipos de conocimientos. En la siguiente imagen se observan todos conocimientos del TPACK (Figura 1).

Figura 1.

Modelo TPACK.



Fuente: tomado de Koehler (2006).

En la Figura 1 podemos ver los tipos de conocimiento que promueve el TPACK mostrando las intersecciones de estos. En el centro se aprecia la intersección de los tres conocimientos formando lo que finalmente es el TPACK. En lo que sigue, describimos los conocimientos en TPACK:

- Conocimiento de Contenido (CK): Conocimiento del contenido que el profesor debe de enseñar a los estudiantes.

- Conocimiento Pedagógico (PK): Conocimiento del proceso de enseñanza-aprendizaje por parte del profesor necesario para sus estudiantes.
- Conocimiento Tecnológico (TK): Conocimiento de las tecnologías disponibles para un desarrollo profesional óptimo.
- Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK): Conocimiento utilizado para enseñar un contenido determinado, relacionando los contenidos con las características de los estudiantes para facilitar el proceso enseñanza-aprendizaje.
- Conocimiento Tecnológico del Contenido (TCK): Conocimiento del uso de la tecnología para crear nuevas representaciones del contenido a enseñar.
- Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK): Conocimiento de características y potencial de las tecnologías disponibles para utilizar dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Conocimiento Técnico Pedagógico del Contenido (TPACK): este último punto es la intersección de los tres tipos de conocimiento, encargado de la coordinación de los conocimientos específicos del contenido con el uso de TIC, para así facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Si bien el modelo TPACK se resume en la manera cómo se interrelacionan los tres conocimientos base: el pedagógico, disciplinar o del contenido y tecnológico, esta no puede entenderse sin tener en cuenta a los docentes, quienes son los que integran las tecnologías en la enseñanza, por lo que las creencias, concepciones, actitudes y el contexto juegan un papel fundamental en la manifestación del conocimiento práctico a la hora de enseñar.

METODOLOGÍA

Esta investigación se centra en un enfoque de tipo cualitativo dando importancia a la comprensión de fenómenos sociales dentro de un medio natural y, a las experiencias, intenciones y opiniones de los participantes (Martínez Godínez, 2013). Nos apoyamos de un estudio de casos como diseño metodológico. Este diseño permite estudiar un caso en particular desde múltiples perspectivas y no solo desde la influencia de una variable, explorar de manera profunda y obtener conocimientos sobre cada fenómeno dando paso a nuevos indicios dentro de la investigación (Martínez Carazo, 2006).

Los sujetos a investigar en este estudio de caso son docentes en formación inicial (5), pertenecientes a la carrera Pedagogía en Matemática de una Universidad privada. Los futuros profesores en formación, al momento de la recolección de información, cursaban el 3° semestre de su carrera en el curso llamado *Práctica Intermedia I*, donde debían realizar una micro clase en el contenido de Homotecia apoyado con recursos tecnológicos. Para la micro clase se les solicitó crear una planificación, seleccionar un recurso tecnológico y como implementaría su intervención. Se destaca que el primer año de formación (2021) de los estudiantes solo tuvieron clases online debido a la pandemia por COVID-19.

La recolección de información (en lo que se presenta) se realizó a partir de una entrevista semiestructurada inicial (posteriormente transcrita) para recoger evidencias previas a las grabaciones de las micro clases evidencias de conocimiento de TPACK en el tema de homotecia.

ALGUNOS RESULTADOS

Se muestran algunos de los resultados preliminares que dan cuenta de la presencia de algunos conocimientos asociados a la intencionalidad de enseñanza en el tema de homotecias.

Se presentan las respuestas sobre dos preguntas realizadas a uno de los profesores sujetos participantes del estudio:

> Ent: ¿Qué herramientas tecnológicas utilizarías para complementar el contenido de homotecia?
>
> Est: Utilizaría GeoGebra ya que fue el software que más trabajamos durante el curso de TIC.

Sobre el uso de herramientas tecnológicas menciona tener conocimientos en el uso de GeoGebra como una herramienta educativa, es decir, conoce que Geogebra permite movilizar una comprensión de la homotecia desde una perspectiva dinámica:

> Ent: ¿Qué dificultades puede tener el estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje? ¿Cómo atenderías a las necesidades que tengan los estudiantes para generar un aprendizaje significativo?
>
> Est: Yo creo que primero la adecuación a otro estilo de clases porque la metodología que ya conocen los estudiantes en los contextos que yo he evidenciado y observado, es como metodología clásica, buscar formas, trabajos o problemáticas que les llamen la atención a ellos, que lo que trabajen en GeoGebra. Relacionar con la vida cotidiana, gustos e intereses.

Sobre el uso de herramientas, el profesor en formación menciona que los estudiantes están acostumbrados a una metodología de clases sin TIC. Por otro lado, da una solución para atender las necesidades de los estudiantes mediante las TIC.

ALGUNAS CONCLUSIONES PRELIMINARES

A partir de los resultados preliminares se puede interpretar desde las entrevistas realizadas que, al momento de interpretar las respuestas se evidencia una conexión entre el conocimiento del área pedagógica junto con el conocimiento tecnológico-pedagógico y aspectos técnicos con conocimientos tecnológicos.

Dentro de las proyecciones de la investigación estamos en el proceso de análisis de los videos de grabaciones de la simulación de los profesores en formación para analizar estos datos, de donde esperamos complementar la interpretación mediante el modelo TPACK y estándares TIC en la simulación.

REFERENCIAS

Botero, Á. (2020). Uso de las tecnologías de información y comunicación como herramienta potenciadora del aprendizaje significativo de las matemáticas. *Kénosi*, *8*(15), 260-292.

Galleguillos, J., y Candia, L. (2011). Uso de herramientas interactivas en el aprendizaje de homotecia. En *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. CIAEM.

Martínez Carazo, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y Gestión*, *20*, 165-193.

Martínez Godínez, V. L. (2013). *Paradigmas de investigación. Manual multimedia para el desarrollo de trabajos de investigación. Una investigación desde la epistemología dialéctico-crítica*. Recuperado de: https://pics.unison.mx/wp-content/uploads/2013/10/7_Paradigmas_de_investigacion_2013.pdf

Monje, C. (2013). *Metodología de la Investigación Cuantitativa y Cualitativa Guía didáctica*. Universidad Surcolombiana.

Schmidt, D., Baran, E., Thompson, A., Mishra, P., Koehler, M., y Shin, T. (2009). Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK), *Journal of Research on Technology in Education*, *42*(2), 123-149. http://dx.doi.org/10.1080/15391523.2009.10782544.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher, 15*(2), 4-14.

Silva, J, Gros, B., Garrido, J., y Rodríguez J. (2006) Propuesta de estándares TIC para la formación inicial docente. En MINEDUC-UNESCO (Ed.), *Estándares TIC para la formación inicial docente: Una propuesta en el contexto chileno* (pp. 141-173). Ministerio de Educación. de Educación.

PENSAMIENTO COMPUTACIONAL POR PARTE DE LOS EGRESADOS DE LA CARRERA DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICAS E INFORMÁTICA EDUCATIVA

Sebastián Arias, Felipe Espinoza, Diego Scheblein.

Universidad Católica Silva Henríquez.

sarias@miucsh.cl, faespinozap@miucsh.cl, dschebleina@miucsh.cl

Esta investigación tiene como objetivo realizar una aproximación teórica y práctica sobre el desarrollo de Pensamiento Computacional por parte de los estudiantes egresados de la carrera de educación matemática e informática educativa.

Pensamiento computacional, TIC, Egresados.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación se refiere al tema del desarrollo del pensamiento computacional por parte de egresados de la carrera de Educación Matemática, tomando como perspectiva en cómo el docente va adquiriendo capacidades, habilidades y aptitudes para impartir esta asignatura. De tal forma que compararemos las nuevas competencias que son necesarias para la aplicación de la asignatura con las adquiridas durante su preparación y carrera docente, recordando que el pensamiento computacional es la evolución de distintas habilidades las cuales nos permiten entrar a una nueva era del cómo analizamos, procesamos y comprendemos la información. Junto con lo anterior realizaremos un estudio que nos permitirá conocer cuál es la realidad actualmente y la que nos espera, para de esta forma poder enlazar mejor con nuestra versión de una clase de matemáticas, sabiendo que es indispensable reforzar antes de tiempo para lograr una ejecución de la práctica de manera fluida , sin olvidar su propósito, el cual es transmitir este conocimiento a sus estudiantes mediante la enseñanza y aprendizaje, con el fin de desarrollar de mejor forma sus nuevas habilidades.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Durante los últimos años, en la comunidad educativa a nivel mundial, y especialmente la perteneciente a Chile, hemos observado como diferentes carreras de pedagogía han ido implementando en sus mallas curriculares el Pensamiento Computacional, esta se ha ido constituyendo en una competencia digital clave para este siglo XXI, donde los docentes más jóvenes han ido implementando esta competencia aún más dentro de las aulas. Nuestra investigación tiene como idea principal realizar una aproximación teórica y práctica sobre el desarrollo de Pensamiento Computacional por parte de los estudiantes egresados de la carrera de Educación Matemática e Informática Educativa. En primera instancia, debemos entender y dar a conocer la definición de Pensamiento Computacional, identificando sus principales características y en cómo es abordado en la formación de los docentes.

El pensamiento computacional y la programación es una de las unidades que se abordan por parte del currículum nacional, el cual tiene como finalidad que los estudiantes desarrollen el conocimiento, y el saber hacer, necesarios para comprender, analizar críticamente y actuar en un espacio fuertemente

influenciado por las tecnologías digitales. Es por esto que el Ministerio de Educación (MINEDUC, 2019, p. 20) define como:

> ...asignatura que se orienta a la aplicación del pensamiento computacional y el desarrollo de programas computacionales y, consecuentemente, a que los alumnos tengan experiencia con el ciclo que se inicia en un problema o desafío, sigue con el análisis de alternativas de solución y la formulación de una respuesta y desemboca en el diseño, desarrollo y puesta a prueba de un programa que hace explícita una de esas posibles soluciones.

Dicho concepto también es definido por diferentes autores como Jeannette Wing (2006, p.33) quien mediante una columna de opinión publicada en la revista Communications of the ACM. En dicha publicación sostenía que:

> El Pensamiento computacional implica resolver problemas, diseñar sistemas y comprender el comportamiento humano, basándose en los conceptos fundamentales de la ciencia de la computación. El pensamiento computacional incluye una amplia variedad de herramientas mentales que reflejan la amplitud del campo de la computación… [además] representa una actitud y unas habilidades universales que todos los individuos, no sólo los científicos computacionales, deberían aprender y usar.

Lo que nos quiere decir Jeannette Wing es que este es un conjunto de habilidades y destrezas, las cuales las podemos definir como herramientas mentales que son habituales en los profesionales de las ciencias de la computación e informática, o que, bien tienen este tipo de conocimiento implementados en sus carreras, como es el caso de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de la Universidad Católica Silva Henríquez. Además, la autora nos dice que sería ideal que todos los seres humanos puedan poseer y utilizar estas "herramientas mentales" para poder resolver problemas de diferente índole, diseñar sistemas e incluso menciona que ayudaría a comprender el comportamiento humano. Es por esto que el pensamiento computacional debería formar parte de la educación de todo ser humano y la cual podemos ver evidenciada en el currículum de la educación chilena.

Problema y Pregunta de investigación

Los egresado de Pedagogía en Matemáticas se enfrentan a inquietudes sobre el cumplir la totalidad del perfil de egreso, donde se incluye el pensamiento computacional dentro de sus habilidades y competencias, el cual deben transmitir a sus alumnos a través de la enseñanza de las matemáticas, en sus clases, lo que nos lleva a la siguiente interrogante, que nos hace plantearnos si existe un problema y el cómo podemos resolverlo de la mejor manera posible tanto para egresados como futuros docentes.

¿Los egresados de Pedagogía en Matemáticas pueden ejercer de forma íntegra la asignatura de Pensamiento Computacional en los cursos de tercero y cuarto medio?

MARCO TEÓRICO

Esta investigación comienza con las "ciencias computacionales", las cuales podemos encontrarlas definidas como "...un conjunto de disciplinas que se ocupan de los fundamentos que sustentan la computación: los lenguajes de programación y los propios fundamentos matemáticos y lógicos de esta rama del conocimiento" (Definición ABC).

Muchos estudios indican que los estudiantes deben ser computacionalmente competentes, lo que quiere decir que mediante estos conocimientos los estudiantes mejoren su aprendizaje a medida que avanzan en su vida.

> El rol que juegan las Ciencias de la Computación en educación se enfoca en la creatividad que se espera generar en los estudiantes, es decir despertar aquellas competencias creativas que permitirán generar sus propios videojuegos o su propia tecnología, dejando de lado el consumismo excesivo o uso de tecnología de otros creadores (Villalba, 2018, p. 4).

El pensamiento computacional lo podemos encontrar definido en un artículo de revista el año 2002, de la autora Wing, en conjunto con la definición que nos da el MINEDUC para la habilidad y asignatura de pensamiento computacional, y la que adquirimos en nuestro desarrollo docente mientras estudiamos la carrera de pedagogía en distintos cursos y exposiciones en donde se nos presentó.

A su vez debemos identificar elementos teóricos que están inmersos en el pensamiento computacional y que va permitir su desarrollo en cada de sus fases, como es la resolución de problemas que, podemos relacionar con pensamiento computacional con la siguiente definición “sí parece quedar claro que el pensamiento computacional es un enfoque para resolver un problema que faculta a la integración de las tecnologías digitales con las ideas humanas" (Villalba, 2018, p. 4).

De tal manera, que tendremos una imagen de lo esperado a nivel curricular en contraste de los egresados que comenzaron a realizar clases tanto del curso, como utilizando el pensamiento como metodología. A la vez, al ser una nueva asignatura desde el año 2019-2020, pero desarrollada en distintos establecimientos desde el 2012 en grupos de estudio, podemos recopilar antecedentes de distintos niveles. Las nuevas mallas en la carrera de pedagogía debieron incorporarla al tener que actualizar las nuevas necesidades que surgieron con el paso del tiempo.

El uso de Scratch es considerada una de las herramientas que se ha utilizado para el desarrollo del pensamiento computacional por parte de docentes, y lo cual podemos ver en tesis de autores como Hamilton Pérez quien define el título de dicha tesis como “Uso de Scratch como herramienta para el desarrollo del pensamiento computacional en programación I de la carrera de informática de la Universidad Central del Ecuador”, en dicha investigación el autor tiene como objetivo principal realizar un análisis en el desarrollo del pensamiento computacional por parte de los estudiantes de primer semestre de la carrera de Informática de la Universidad Central del Ecuador, obteniendo conclusiones la muestra de diferencias en el desarrollo del pensamiento computacional entre hombre y mujeres, así como Scratch es una herramienta que logra aportar a mejorar el reconocimiento de patrones en los estudiantes.

Para dimensionar el ingreso del pensamiento computacional en nuestro país debemos conocer que países del exterior como Inglaterra, Estados Unidos o Finlandia se han enfocado en el desarrollo del pensamiento computacional desde la etapa escolar, pues es visto como una forma de liderar la revolución digital, pero ¿qué tan cerca o lejos de aquel suceso estamos en Chile de aquello?

Si bien Chile cuenta con una de las mejores infraestructuras y equipamiento escolar de Latinoamérica, según el Banco Interamericano del Desarrollo, en donde 9 de cada 10 establecimiento educacionales tienen sala computación. Esta riqueza no está siendo aprovechada de ahí viene que se debe realizar un esfuerzo conjunto entre escuelas, padres, apoderados, empresas públicas y privadas para masificar

el uso de tics y el desarrollo del pensamiento computacional, pues como diría Paul Huanca "¿sabes cuál es el problema? imaginarte el algoritmo y no programarlo".

La investigación mencionada anteriormente nos servirá de ejemplo, o bien, como una especie de guía para realizar nuestra investigación, la cual se basará en entrevistas que realizaremos mediante videollamadas o llamadas a diferentes estudiantes egresados de la carrera de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de la Universidad Católica Silva Henríquez. A Su vez, para complementar se dispondrá del uso de una encuesta que será enviada al correo institucional de cada alumno egresado, con el fin abarcar cada una de inquietudes, dudas y formas de relación que ellos usan actualmente para impartir el pensamiento computacional en sus salas de clases.

MARCO METODOLOGICO

Se presenta un estudio exploratorio de corte cualitativo, que busca realizar una aproximación teórica y práctica sobre el desarrollo de Pensamiento Computacional por parte de los estudiantes egresados de pedagogía en matemáticas e informática educativa, evaluando las ventajas de trabajar dicho término dentro de las aulas. Este se llevará a cabo a la implementación de entrevistas a través de videollamadas o llamadas para observar las respuestas obtenidas en las entrevistas y realizar una comparación entre los estudiantes egresados que si implementan el pensamiento computacional y los que no lo hacen.

REFERENCIAS

Wing, J. M. (2006). *Computational thinking. Communications of the ACM, 49*(3), 33-35.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2019). *Programa De Estudio. Pensamiento Computacional y Programación Para Formación Diferenciada*. Autor.

Villalba, K. (2018). Formación docente para desarrollar el pensamiento computacional. [Tesis de Magister, Universidad Nacional de San Agustín De Arequipa, Perú].

RECURSOS EDUCATIVOS DIGITALES EN LIBROS DE TEXTO DEL ÁREA DE MATEMÁTICA DE PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN BÁSICA

Ángela Palma, Helmuth Serón, Iván Belmar

Universidad de Los Lagos.

angelalorena.palma@alumnos.ulagos.cl, helmuthignacio.seron@alumnos.ulagos.cl, ivanneftali.belmar@almunos.ulagos.cl

Esta investigación en desarrollo da cuenta del análisis cualitativo de libros de texto de Educación Matemática utilizados en el primer ciclo de Educación Básica del año 2022, en relación con los Recursos Educativos Digitales (RED) propuestos. El instrumento "Escala de Evaluación de Recursos Educativos en Línea" utilizados en investigaciones anteriores ha sido debidamente actualizado y validado por expertos. Los resultados preliminares dan cuenta de la vigencia, disponibilidad, rol pedagógico y calidad de los recursos tecnológicos en línea. El periodo de la investigación comprende el segundo semestre 2022 y primero del 2023 al alero del semillero de investigación de estudiantes de Educación Básica de la ULA.

Palabras claves: Tecnologías educativas, educación básica, calidad, libros de texto.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] introduce permanentemente recursos tecnológicos en las aulas del sistema escolar; pese a ello, la incidencia que esto tiene sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje no se refleja en términos significativos (Ortiz y Aravena, 2017). De igual forma, el acceso a los recursos tecnológicos no se garantiza en los libros de texto del estudiante porque existe un número importante de recursos no disponibles, según un estudio realizado el año 2019 en libros de Biología y Química en educación secundaria en Chile (Ortiz y Pino, 2021). Esto refuerza lo señalado por Gutiérrez y Tyner (2012) que, al no recibir respuestas sobre alguna acción de los recursos tecnológicos, se desencadena la evitación de esta y, por ende, se produce un deterioro en el proceso de aprendizaje. Estas evidencias nos sugieren las siguientes preguntas de investigación:

> ¿Los RED presentes en el libro de texto del estudiante de educación básica en el área matemática son adecuados tanto en su rol pedagógico como en su calidad de acuerdo con los objetivos pedagógicos propuestos desde el MINEDUC?
>
> ¿Los RED presentes en el libro de texto del estudiante de educación básica en el área matemática son adecuados tanto en su rol pedagógico como en su calidad?

Entendemos que estas preguntas serán debidamente respondidas al finalizar nuestro proceso investigativo, respuestas que en este momento aun desconocemos. Con la finalidad de operacionalizar el trabajo que permita responder las cuestiones anteriores, hemos planteado el siguiente objetivo general de investigación y sus respectivos objetivos específicos, que detallamos a continuación:

> Objetivo General: Relevar la actualización a través de la disponibilidad; rol pedagógico y calidad de los recursos educativos digitales propuestas desde el MINEDUC en el libro de texto de la asignatura de matemática del primer ciclo de educación básica.

Objetivos Específicos:

- Identificar los RED disponibles y no disponibles en el libro de texto del área matemática del primer ciclo de educación básica.
- Determinar el rol pedagógico de los RED disponibles en el libro de texto
- Definir el nivel de calidad de los RED disponibles en el libro de texto

REFERENTES TEÓRICOS

Nos situamos en una sociedad que se caracteriza por un constante cambio, a la cual algunos autores denominan Sociedad de la Información o del Conocimiento (Castells, 1996), y la que repercute en el ámbito educativo, ya que se apropia de la tecnología educativa de manera transversal y en todas las disciplinas del sistema escolar. En este contexto se destaca la relevancia de la integración de las tecnologías en las prácticas habituales de aula, lo que viene aparejado al rol relevante que siguen cumpliendo los libros de textos como recursos de apoyo permanente en los establecimientos educativos. Según otros autores, los libros de texto son importantes en el proceso de enseñanza debido a su aporte en el proceso de instrucción (Naranjo y Candela, 2010). Los profesores encuentran en estos textos sugerencias metodológicas, ejercicios y actividades; ideas para motivar a los estudiantes en sus clases. El Ministerio de Educación chileno menciona que el libro de texto es un medio para que los educandos, de sectores socioeconómicamente vulnerables, puedan acceder a una educación de calidad, equidad y enriquecimiento cultural. Según esto, es necesario que se consideren las tecnologías en los libros de textos del estudiante, de acuerdo con lo declarado en las Bases Curriculares. Este documento expresa que la utilización de la tecnología como herramienta de trabajo implica, por una parte, dominar las posibilidades que ofrece, y por otra, darle un uso creativo e innovador.

METODOLOGÍA: DISEÑO METODOLÓGICO

El diseño metodológico en que se sitúa nuestro trabajo lo detallamos en función del paradigma investigativo, enfoque, alcance, tipo y población y muestra.

Paradigma: De los tres paradigmas usados tradicionalmente en investigaciones educativas, nuestro trabajo lo situamos como hermenéutico reflexivo. En este paradigma el investigador, desde su contexto histórico social, indaga una problemática con la finalidad de comprender en profundidad un fenómeno que aqueja un entorno que es de su interés. No busca predecir ni generalizar resultados, pretende llegar a la comprensión profunda del fenómeno mediate la reflexión constante que se consigue a través de la obtención rigurosa de datos de tipo cualitativo.

Enfoque: En coherencia con el paradigma delimitado, el enfoque investigativo es cualitativo, paradigma cualitativo. Este consistirá en someter los libros de texto seleccionados a un acucioso análisis de contenido (Fernández y Pértegas, 2002), caracterizado por seguir un proceso cíclico e inductivo sobre los libros considerados y que tiene por finalidad describir lo observado. Teniendo en cuenta una de las características de la metodología cualitativa, generar datos descriptivos tanto de lo hablado, como de lo escrito por las personas u objetos (como es nuestro caso), así como de la conducta que observamos de ellas (Taylor y Bogdan, 1992). De esta forma se indagará respecto a la disponibilidad de los RED propuestos en los libros de texto señalados, para luego determinar el rol

pedagógico de cada uno de estos RED y finalmente definir el nivel de calidad considerando los objetivos planteados en la Unidad o contenido para el cual está señalado.

Alcance de la Investigación: consideramos nuestra investigación de alcance descriptivo, cuya principal característica es que pretende describir, en todos sus componentes principales, una realidad y/o un fenómeno (Guevara et al., 2020).

Corte de Investigación: como nuestro trabajo consiste en recolectar datos en un momento determinado, en un tiempo único, lo determinamos de corte transeccional o transversal, cuyo propósito es describir variables y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado (Hernández et al., 2010).

Población y Muestra: En coherencia con el paradigma investigativo, la población en la que indagamos está determinada por los libros de texto utilizados por el Ministerio de Educación para la Enseñanza Básica, a través de un muestreo intencional de selección contralada (por conveniencia) (Hernández et al., 2010).

RESULTADOS PRELIMINARES

Los resultados que se presentaran en la jornada responden a los avances que hemos logrado obtener a la fecha (septiembre a noviembre de 2022) por parte del semillero de investigación, los que dan cuenta de los siguientes antecedentes:

- RED vigentes y no vigentes en los libros de texto de matemática del primer ciclo de educación básica (primer a cuarto año de EB).
- Asociación de cada RED vigente a un rol pedagógico (informativo, demostrativo o interactivo).
- Categorización de los RED de acuerdo con la pauta de evaluación de calidad especialmente creada para este objetivo.

REFERENCIAS

Castells M. (1996). *La era de la información. Economía, sociedad y cultura* (Vol. 1). La sociedad RED. Siglo XXI.

Fernández, S., y Pértegas, S. (2002). Investigación cuantitativa y cualitativa. *Cad aten primaria*, *9*(1), 76-78.

Guevara, G., Verdesoto, A., y Castro, N. (2020). Educational research methodologies (descriptive, experimental, participatory, and action research). *Revista Científica Mundo de La Investigación y El Conocimiento*, 3, 163-173.

Gutiérrez, A., y Tyner, K. (2012). Educación para los medios, alfabetización mediática y competencia digital. *Comunicar*, *38*(19), 31-39.

Hernández., R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. McGraw-Hill.

Naranjo, G., y Candela, A. (2010). Del libro de texto a las clases de ciencias naturales: la construcción de la ciencia en el aula. *Papeles de Trabajo Sobre Cultura, Educación y Desarrollo Humano*, *6*(1), 1–34.

Ortiz, Y. T., y Pino Villalobos, C. A. (2021). Análisis crítico de los recursos educativos digitales propuestas por el Ministerio de Educación de Chile en el texto escolar del estudiante de las asignaturas de Biología y Química de Educación Secundaria. *Conocimiento Educativo*, 8, 11–21.

Ortiz., Y., y Aravena., M. (2017). Integración de TIC en centro educativo de la ciudad de Osorno, Chile. *Tendencias Pedagógicas*, 30, 131-152.

Taylor, S. J., y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación* (Vol. 1). Paidós.

ESTUDIO DEL EJE DE PATRONES Y ÁLGEBRA EN LOS LIBROS DE TEXTOS ESCOLARES CHILENOS DE 4º A 6º BÁSICO

Yanira López, Valentina Rozas, Exequiel Llanos

Universidad San Sebastián

ylopeze@correo.uss.cl, vrozasr@correo.uss.cl, exequiel.llanos@uss.cl

La siguiente comunicación tiene como propósito presentar un análisis de las situaciones-problemas del eje de Patrones y Álgebra propuestas en los libros de textos escolares de 4º a 6º básico. El rol que cumple este tópico es esencial para la articulación desde la Aritmética al Álgebra en la educación, por lo que es de suma importancia dimensionar cómo se fomenta el razonamiento algebraico con actividades que buscan la extensión de regularidades, que pueden ser de carácter finitas o infinitas. Así, este trabajo entrega avances preliminares, identificando los Niveles de Algebrización en las actividades de los textos escolares, que propicien la articulación mencionada.

Patrones y Álgebra, Niveles de algebrización, Razonamiento algebraico, Textos escolares, Educación básica.

INTRODUCCIÓN

Mejías y Alsina (2021) analizan la evolución que ha tenido el álgebra a lo largo de la historia y los aportes que han realizado diversas civilizaciones (como la egipcia, babilónica, china, árabe y griega). En su trabajo, señalan contribuciones que aportaron a un desarrollo sustancial de la matemática, es por ello que, lograron concebir modelos aritméticos, geométricos y algebraicos, además de elaborar y demostrar numerosos teoremas que sirven como sustento de esta disciplina. En particular, en esta investigación se utiliza el álgebra elemental, que es definida como el uso de los elementos primarios (números y simbología) y, a su vez, utiliza los números que son representados mediante símbolos (Mejías y Alsina, 2021).

Godino et al. (2012) enfatiza que este tipo de álgebra cumple con tres rasgos característicos:

- La indeterminación, uso de incógnitas, ecuaciones y nociones relacionadas.
- La generalización, uso de variables, fórmulas y parámetros.
- La relación, binaria o de otro tipo (p. 506).

En particular, los autores destacan lo siguiente del álgebra elemental:

> Es más que un instrumento de modelización y más que un lenguaje simbólico; es una forma de pensar y actuar en matemáticas, una actitud a generalizar, y, por tanto, a simbolizar y operar con símbolos, que penetra todas sus ramas y las impulsa hacia nuevos niveles de creatividad. (Godino et al., 2012, p. 507).

LA IMPORTANCIA DE LA ARTICULACIÓN, DESDE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA

La importancia de generar una articulación entre la aritmética y el álgebra se debe a que, uno de los conceptos matemáticos que permite este vínculo es el de patrones, que se enseña en los cursos de 4°

a 6° básico. Lo que se define en los libros de textos escolares en ocasiones son conceptos difíciles de comprender, en particular, el concepto de patrones requiere tener por parte generalidades que tienden a ser soluciones de carácter finita o infinita.

Banerjee (2008, citado en Castro, 2012) enfatiza que el álgebra se enriquece sobre la aritmética. Esto se debe a que hay una escasez de organización y explicación de las operaciones, las propiedades y los procesos para resolver problemas determinados, partiendo principalmente por el hecho de que la aritmética se suele enseñar en primaria y el álgebra en secundaria. Es por ello, entre otras razones, que los estudiantes no logran hacer una relación entre ambos conceptos (Castro, 2012). Una de las dificultades que presentan los estudiantes va ligada con las convenciones (paréntesis y prioridad de operaciones) algebraicas, pero estas también son parte de la aritmética; y es ahí donde se evidencia el fracaso de los estudiantes al hacer uso de estas convenciones en el álgebra o más bien no son tomadas en cuenta.

Planes y programas del Ministerio de Educación de Chile.

Dentro del estudio del álgebra, podemos hallar varios conceptos asociados a este, tales como ecuación, inecuación, patrón, etc. Dentro de los textos escolares que entrega el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC), se puede apreciar que de 4° a 6° básico, aparecen los conceptos de "patrón" y "secuencia", que se definen de la siguiente manera:

Tabla 1.

Definiciones del concepto patrón en los libros de texto escolar.

Curso	Definición según textos escolares vigentes
Cuarto básico	"En los patrones numéricos de adición o de sustracción, se forma una secuencia en la que se suma o se resta un cierto valor" (Fuenzalida Correa, 2020, p. 52).
Quinto básico	"Un **patrón** genera una secuencia de elementos ▪ Al conocer la regla de formación o patrón que sigue una secuencia de elementos de la secuencia. ▪ Una secuencia de elementos puede ser generada por más de un patrón" (Alvarado Carrasco et al., 2020, p. 56).
Sexto básico	"Un **patrón** corresponde a una regla que permite relacionar valores para formar una secuencia. Analizando la información de una tabla de datos, puedes descubrir un patrón y, a partir de él, encontrar valores desconocidos" (Alvarado Brito, 2020, p. 72).

Fuente: Elaboración propia.

Godino y Font (2003), citado en Godino et al. (2014) señalan que es de fundamental desarrollar un pensamiento algebraico en los estudiantes de educación infantil y primaria para que, al llegar a la secundaria, no haya un cambio tan abrupto, sino que más bien se dé una transición de la aritmética. Es por ello que, para potenciar este pensamiento, se desarrollan los Niveles de Algebrización.

Estos Niveles tienen la finalidad de dar características a las tareas que desarrollan los estudiantes en la educación primaria. El nivel se fija en el desarrollo que realiza el estudiante y, dependiendo de cómo este lo resuelva, se analiza su procedimiento y se clasifica. Los criterios para determinar los niveles de algebrización son:

- Generalización. Generación o inferencia de intensivos.
- Unitarización. Reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias.
- Formalización y ostensión. Nombramiento mediante expresiones simbólico-literales.
- Transformación. Utilización de los objetos intensivos en procesos de cálculo y en nuevas generalizaciones. (Godino et al., 2014)

Los niveles de algebrización propuestos por Godino (2012) están divididos en cuatro:

- Nivel 0: El estudiante no presenta un razonamiento matemático, se opera con objetos extensivos, usando lenguaje natural, numérico, icónico y gestual.
- Nivel 1: El estudiante presenta cierta noción del pensamiento matemático, se usan objetos intensivos propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia.
- Nivel 2: El estudiante reconoce una generalización, pero no puede observar las variables para poder obtener la expresión algebraica. Se usan representaciones simbólico- literales para referir a los objetos intensivos reconocidos, los cuales están ligados a la información espacial, temporal y contextual.
- Nivel 3: El estudiante puede analizar el problema y de ello genera una expresión algebraica, y además puede manejarse en todos los ámbitos algebraicos, se usan símbolos de manera analítica, sin referir a la información contextual.

Los niveles de Algebrización tienen dos categorías, que Kaput (2008) identifica como:

- Categoría (A): Álgebra como simbolización sistemática de generalizaciones de regularidades y restricciones.
- Categoría (B): Álgebra como razonamiento guiado sintácticamente y acciones sobre generalizaciones expresadas en sistemas de símbolos convencionales (p. 11).

PROBLEMÁTICA

En la actualidad, podemos encontrar diversos estudios con respecto al álgebra y al razonamiento algebraico; sin embargo, hay pocos estudios que se refieren a patrones, lo que genera un vacío en relación a aquel contenido, obteniendo como consecuencia una dificultad a la hora de enseñar este concepto en el aula. Dentro de nuestras prácticas profesionales, visualizamos la complejidad con la cual los estudiantes se enfrentan en la enseñanza y aprendizaje de Patrones y Álgebra.

Dentro de la educación chilena, se implementa el uso de los textos escolares entregados por el MINEDUC. Según Guernica Consultores S.A. (2016), “el Texto del Estudiante es una herramienta

activa, por su naturaleza propia, al disponer de contenidos, actividades y recursos pertinentes para un aprendizaje significativo" (p. 8).

METODOLOGÍA Y MARCO TEÓRICO

La metodología utilizada se centrará en un enfoque cualitativo, puesto que, como mencionan Hernández et al. (2014), su objetivo es estudiar en profundidad un fenómeno en un contexto determinado.

El marco teórico que se utilizará es el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento (EOS), debido a que nos brinda herramientas de análisis para los tipos de tareas propuestas y la forma que se desarrollan las configuraciones ontosemióticas del objeto en estudio, para esta investigación se utilizará la configuración de objeto primario como herramienta principal. En particular, el foco es identificar los objetos y procesos que están en funcionamiento, también las prácticas y las variables que actúan en las expresiones. Con ello, se espera exponer nuevos problemas y acomodarlos a cada situación pedagógica (Godino et al., 2007, citado en Godino et al, 2017). Teniendo en cuenta el marco del EOS, se han realizado trabajos previos, donde se han planteado un ejemplar de categorías de los conocimientos didácticos-matemáticos del profesorado en matemática (Godino, 2009; Pino-fan; Godino, 2015, citados en Godino et al, 2017).

PROYECCIONES DEL ESTUDIO

Se espera que este análisis pueda generar recomendaciones de situaciones-problemas pretendidos para la enseñanza, puesto que se proyecta que las actividades de los textos escolares permiten que se enseñe un contenido de manera progresiva, para así poder obtener una apropiación del conocimiento por parte de del estudiante y que este sea significativo (Guernica Consultores S.A., 2016). Por otro lado, se pretende formar un razonamiento algebraico en los estudiantes, puesto que, en las actividades que se proponen en los textos escolares entregados por el MINEDUC de 4° a 6° básico en la asignatura de Matemática se aprecia un predominio de los Niveles de Algebrización 0 y 1. (Llanes et al., 2022)

Por lo antes mencionado, esta investigación dará pie a una reflexión hacia las definiciones que nos proponen los libros de textos escolares a ciertos conceptos, como lo es el de Patrón. A partir de nuestras prácticas, hemos observado que la definición que se propone de este concepto mencionado anteriormente es desde un aspecto de cómo se debe proceder a este, más de qué trata, lo que carece de sustento y propicia la repetición junto al procedimiento algorítmico, esto puede conducir a futuros conflictos en los niveles superiores, dado que si no específica de forma clara en primaria, generará que en los siguientes cursos haya un vacío de contenido. Teniendo en cuenta lo anterior, a partir de los resultados que arrojen el presente análisis de los textos escolares, se espera identificar cuáles son las actividades de los libros de textos escolares que pueden promover de forma sustancial un mayor aprendizaje en el aula y potenciar la articulación desde la aritmética al álgebra.

REFERENCIAS

Alvarado Brito, J. (2020). *Matemática: 6° básico* (1ra ed.). Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones.

Alvarado Carrasco, L., Carrero Valdés, M., y Caroca Toro, M. (2020). *Matemática: 5° básico* (1ra ed.). Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. Penalva, F. García, L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75-94). SEIEM.

Fuenzalida Correa, A. (2020). *Matemática: 4° básico* (1ra ed.). Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 32*(1), 199–219.

Godino, J. D., Castro, W. F., Aké, L. P., y Wilhelmi, M. R. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 26*(42B), 483-511.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas, *Bolema Rio Claro, 31*(57), 90–113.

Olivera, M. (2016). *Estudio de Uso y Valoración de Textos Escolares: Informe final*. Ministerio de Educación de Chile.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (5.a ed.). McGraw-Hill.

Kaput, J. J., Blanton, M. L., y Carraher, D. W. (2008). *Algebra in the Early Grades*. Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics.

Llanes Luna, A. L., Pino-Fan, L. R., y Ibarra Olmos, S. E. (2022). Niveles de razonamiento algebraico en libros de texto de educación básica de Chile. *Educación Matemática, 34*(2), 182-216.

Mejías, C., y Alsina, Á. (2021). Desarrollo histórico-epistemológico del álgebra: evolución hacia distintos significados. *Matemática, Educación e Internet, 21*(2), 1-14.

PERFILES DE ACTIVIDADES MATEMÁTICAS DE UN TEXTO ESCOLAR PARA FOMENTAR LA ARGUMENTACIÓN ESTADÍSTICA

Carlos Bravo, Alejandro Cuevas, Eugenio Chandía

Universidad de Concepción

carbravo@udec.cl, acuevas2017@udec.cl, echandia@udec.cl

La capacidad de argumentar es un componente fundamental para el desarrollo del pensamiento crítico. Sin embargo, las orientaciones en los planes y programas chilenos para que esta se incluya en el aula escolar son ambigua y escasa. Así, esta investigación aborda los textos escolares, como recurso didáctico desarrollado para el aprendizaje autónomo en los estudiantes. El análisis documental y latente de las actividades del eje de Estadística y Probabilidad del texto escolar de segundo medio, permitió identificar tres perfiles para desarrollar la argumentación estadística: alto potencial; potencial medio, y bajo. Cuestión que perpetúa el bajo desarrollo de la habilidad.

Argumentación estadística, Textos escolares, Tareas matemáticas.

INTRODUCCIÓN

El pensamiento crítico se ha catalogado transversalmente por distintas instituciones como una habilidad necesaria para el siglo XXI (Voogt y Pareja, 2012). Por tal motivo, los sistemas escolares han ajustado sus currículos para desarrollarla, agregando habilidades precursoras de esta, como es la argumentación (Cottrel, 2017; Voogt y Pareja, 2012). Tal habilidad en educación matemática se reconoce como fundamental, ya que la matemática, al ser una ciencia formal, tiene como condición necesaria que los estudiantes argumenten para poder aprenderla (Krummheuer, 2007). En la misma línea, la argumentación estadística, comprendida como la capacidad de razonar estadísticamente para validar una afirmación establecida por ideas e información extraída de datos organizados y representados (Abelson, 1995), es elemental para formar sujetos alfabetizados estadísticamente.

Es así, que el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) declara en las Bases Curriculares a la argumentación como una de las habilidades transversales a desarrollar en Educación Matemática (MINEDUC, 2016). Pese a esta impronta, las orientaciones entregadas a los profesores en los planes y programas para su desarrollo en el aula escolar son escasas y ambiguas (Lendermann, 2021). Por lo tanto, este estudio se focalizará en los textos escolares diseñados y distribuidos por el MINEDUC, ya que constituyen un importante recurso para los estudiantes pertenecientes al sistema de educación pública o al de financiamiento compartido, pues juegan un rol articulador en el proceso de aprendizaje (MINEDUC, 2008, citado en Superintendencia de Educación, 2018) y, por ende, deberían incluir actividades con presencia de precursores que favorezcan el desarrollo de la habilidad de argumentar estadísticamente. Así, se analizarán las actividades del eje de probabilidad y estadística incluidas en el texto de Segundo Medio distribuido por el MINEDUC durante el año 2022, con el fin de evaluar el potencial de argumentación de estas en base a la creación de una rúbrica holística que considera tres dimensiones establecidas como precursoras para esta habilidad.

MARCO DE ANTECEDENTES

Argumentación como habilidad transversal y presente en el currículum nacional chileno

La argumentación tiene diversas definiciones, pero en general se puede describir como un proceso de interacción social donde se externaliza un conjunto de declaraciones efectuadas a través de un discurso retórico, en el cual el sujeto explica cómo y por qué le entrega su apoyo a una determinada respuesta con el objetivo de convencer (Antonini y Martignone, 2011; Erkek y Bostan, 2019; Wood et al., 2006).

En el currículum nacional de matemática, el MINEDUC integra cuatro habilidades que necesariamente se deben trabajar en la asignatura, entre ellas, argumentar y comunicar. Esta implica la comunicación de resultados en lenguaje matemático, explicación de procedimientos, fundamentación a partir de distintos tipos de razonamientos, la formulación y verificación de conjeturas, entre otras (MINEDUC, 2016). Además, el mismo MINEDUC indica que la argumentación se ve desarrollada a la hora de tratar de convencer a otros de la validez de los resultados (MINEDUC, 2015).

Textos escolares como herramienta transversal de aprendizaje

El texto escolar juega un papel fundamental como articulador en el proceso de aprendizaje (MINEDUC, 2008, citado en Superintendencia de Educación, 2018). Es uno de los recursos didácticos básicos de mayor tradición, que presenta de forma organizada los contenidos considerados como los más importantes por parte del currículum nacional y que debe cumplir una función pedagógica apta para la enseñanza (Pereira y González, 2011; Solarte, 2010; Pino y Díaz-Levicoy, 2013). En el texto escolar se entregan experiencias de aprendizaje a los estudiantes, y en el caso de la asignatura en estudio, estas vienen en forma de tareas matemáticas, las cuales se pueden comprender como aquel componente de una actividad de clase que tiene por intención desarrollar una idea matemática en particular. (Smith y Stein,1998).

Dimensiones de una tarea matemática que promueven la argumentación

Una dimensión de las tareas matemáticas que se clasifica como precursora de la argumentación es el grado de estructuración, donde su categorización puede variar entre aquellas del tipo cerrada y abierta. Las tareas abiertas, que son aquellas en las que existe un alto grado de indeterminación (Ponte, 2005), donde no hay un único resultado válido, o bien que su desarrollo requiere que los estudiantes utilicen estrategias informales para su resolución, son una condición necesaria para que se produzcan situaciones argumentativas en el aula (Solar y Deulofeu, 2016).

Una dimensión propuesta por Ponte (2005) para caracterizar una tarea matemática es su grado de dificultad apreciable. Según la OCDE (2004), las tareas se pueden seccionar en grupos de competencia, encontrándose las de reproducción, en las que sólo se debe remedar un conocimiento ya estudiado, las de conexión, para las cuales se deben vincular las distintas ideas principales de la actividad, o bien conectar distintas representaciones, y las de reflexión, donde se solicita una generalización o una justificación de los resultados. A partir de esta clasificación, y considerando lo expuesto por Solar y Deulofeu (2016) quiénes afirman que la presencia de actividades que favorezcan la explicación por sobre un sí o un no favorecen el desarrollo de la argumentación en una clase, se considera que las tareas de reflexión y conexión actúan como precursores de ella.

Por último, Moreno y Ramírez (2016) plantean que la agrupación media la comunicación, por ende, facilita el planteamiento y confrontación de ideas. Su elección como precursora de la argumentación

tiene que ver con la intención educativa de la actividad, pues, en caso de realizarla de forma colaborativa, se facilita la aparición de un proceso dialógico donde los estudiantes puedan argumentar.

METODOLOGÍA

El objetivo de esta investigación corresponde a caracterizar las tareas matemáticas presentes en el eje de probabilidad y estadística del nivel de segundo año medio que se incluyen en los textos escolares entregados por el MINEDUC el año 2022, evaluando por medio de una rúbrica holística el potencial de las tareas matemáticas para facilitar la ocurrencia de situaciones argumentativas en las clases de esta asignatura.

En relación a lo planteado anteriormente nos surge la siguiente interrogante: ¿Qué perfiles de tareas tiene el texto escolar chileno de matemática de segundo año medio, para entregar oportunidades de argumentar en el eje de probabilidad y estadística?

Tipo de investigación y población de estudio

En la presente investigación se utiliza un enfoque mixto con un alcance descriptivo, pues el objetivo de esta es la recolección de datos acerca de los precursores de argumentación presentes en las tareas matemáticas del libro de texto de segundo año medio entregado por el MINEDUC en el año 2022, con el fin de caracterizar su potencial argumentativo. Para esta investigación, la población de estudio consiste en 91 tareas matemáticas del libro de texto, las cuales componen la unidad 4 del eje de Probabilidad y Estadística. Para efectos de esta investigación, se consideran como tareas matemáticas aquellas actividades enumeradas por numeración arábiga, las cuales pueden estar compuestas por demandas enlistadas con letras.

Instrumento y Análisis de investigación

Para la elaboración de la rúbrica holística se toman como base las tres dimensiones de tareas matemáticas descritas como precursoras de la argumentación. Para el caso del tipo de estructuración, una tarea puede ser catalogada como abierta (A), semi abierta (SA) o cerrada (C) en base a la cantidad de demandas abiertas que posea la actividad. En el caso del grado de dificultad, este se determinará por la demanda catalogada en el nivel más alto, siendo este el de reflexión (RF), seguida por el de conexión (C), mientras que el de reproducción (R) se cataloga como el más bajo. Para el tipo de agrupamiento, este será individual (I) si no hay instrucciones de trabajo colaborativo, o bien si menos del 50% de las instrucciones se realizan de forma individual, mientras que, en caso contrario se catalogará como de tipo grupal (G).

Así, la rúbrica holística para definir el potencial de argumentación de cada tarea matemática estará compuesta por cinco niveles ordenados de forma decreciente: Óptimo (O), satisfactorio (S), básico (B), insuficiente (I) y nulo (N). El precursor de argumentación más determinante es el de estructura de la tarea, que diferencia a aquellas clasificadas en un nivel óptimo de aquellas clasificadas como satisfactorias. Por su parte, el grado de dificultad de la tarea diferencia principalmente a una clasificada como satisfactoria de una categorizada como básica. Por su lado, el precursor menos influyente consiste en el tipo de agrupamiento, el cual diferencia a aquellas tareas que se clasifiquen como básicas de las que se cataloguen como insuficientes. Finalmente, las tareas de potencial nulo

no poseen presencia de precursores de la argumentación, con actividades de estructura cerrada, de reproducción e individuales.

La codificación se llevó a cabo con un proceso doble, donde primero se codificó el 20% de las tareas de todo el texto por dos jueces, quienes obtuvieron índices Kappa de al menos el 80%. Posteriormente se dividió el análisis de las tareas entre los jueces. Luego de haber codificado cada una de las tareas se procede a realizar un análisis de clase latente (ACL). El ACL realiza clasificaciones basadas en probabilidades, es decir, las tareas son clasificadas en clúster o clases considerando la probabilidad estimada de pertenecer a ellas según la codificación inicial. La calidad de los modelos de clasificación resultantes se compara utilizando los índices AIC (Akaike Information Criterion), y BIC (Bayesian Information Criterion), como referencia relativa. Cuanto más pequeño sean los valores de AIC y BIC, mejor será el ajuste del modelo.

RESULTADOS

Análisis descriptivo

La Tabla 1 muestra los resultados globales para cada una de las categorías de análisis y por contenido. Como se observa, las tareas favorecen ampliamente la reproducción de conocimiento, son de carácter individual y tienen un potencial a lo más básico para que los estudiantes argumenten estadísticamente. Una cuestión interesante es que la lección 12 se escapa del patrón, y plantea más precursores para el desarrollo de la argumentación estadística.

Tabla 1.

Frecuencias absolutas por categoría de observación.

		Dificultad			**Estructura**			**Agrupamiento**			**Potencial**			
		R	C	RF	C	SA	A	I	G	N	I	B	S	Ó
Lección 10	**Contenido 1**: Principios básicos de conteo	3	2	1	6	0	0	6	0	3	0	3	0	0
	Contenido 2: Permutaciones	1	3	3	6	1	0	6	0	1	0	6	0	0
	Contenido 3: Variaciones	4	2	1	6	1	0	7	0	3	0	4	0	0
	Contenido 4: Combinaciones	4	1	0	5	0	0	5	0	4	0	1	0	0
	Contenido 5: Aplicaciones	6	2	1	6	1	2	9	0	5	0	2	2	0
Lección 11	**Contenido 6**: Definición de variable aleatoria	2	1	2	3	1	1	4	1	1	1	2	1	0
	Contenido 7: Probabilidad de una variable aleatoria	4	3	2	8	1	0	9	0	4	0	5	0	0
	Contenido 8: Distribución de función de probabilidad	6	1	1	8	0	0	8	0	6	0	2	0	0

Lección 12	**Contenido 9**: La probabilidad en los medios de comunicación	0	2	2	1	2	1	2	2	0	0	2	1	1
	Contenido 10: Probabilidad y toma de decisiones	0	2	3	2	2	1	5	0	0	0	4	1	0
	Contenido 11: Interpretación de la probabilidad	1	1	2	3	1	0	3	1	1	0	3	0	0

Fuente: Elaboración propia.

Perfiles de tareas según dimensión observada

La Tabla 2 muestra los perfiles de las tareas matemáticas según las dimensiones de análisis. Se observan tres grupos: con alto potencial (13% de la muestra), dada la frecuente presencia de precursores que favorecen la argumentación; con medio potencial, debido a la alta probabilidad de presentar precursores relativos al nivel de dificultad cognitiva alta como son la conexión y reflexión; de bajo potencial por la escasa presencia de precursores para promover la argumentación.

Tabla 2.

Probabilidades de observar cada categoría por clase de agrupamiento.

Dimensión	Categoría	Clase Alto Potencial (13%)	Clase Medio Potencial (40 %)	Clase Bajo Potencial (47%)
Dificultad	Reproducción	.0	.05	1.
	Conexión	.58	.51	.0
	Reflexión	.41	.43	.0
Estructura	Cerrada	.0	.70	1
	S-Abierta	.25	.30	0
	Abierta	.75	0	0
Agrupamiento	Individual	.5	.97	.98
	Grupal	.5	.03	.02
Potencial	Nulo	0	0	.98
	Insuficiente	0	0	.02
	Básico	0	1	0
	Suficiente	0	0	0
	Óptimo	1	0	0

Fuente: elaboración propia.

DISCUSIÓN

Si bien la argumentación es una habilidad transversal en el currículo escolar de Educación Matemática, las tareas matemáticas del texto escolar de segundo medio no son garantía del desarrollo fundamental de esta habilidad en los ciudadanos chilenos. Esto sumado a la escasa formación de los profesores para promover esta habilidad dispone un escenario funesto para lograr sujetos

alfabetizados estadísticamente y con un pensamiento crítico de la información que a diario reciben de su entorno inmediato. Esto dispone de acciones remediales en la formación inicial y continua de profesores y la creación de recursos didácticos para paliar la escasa disposición a la cual se ven enfrentados estudiantes de educación media.

REFERENCIAS

Abelson, R. (1995). *Statistics as principled argument*. Psychology press Taylor & Francis group.

Antonini, S., y Martignone, F. (2011). Argumentation in exploring mathematical machines: a study on pantographs. *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (2)* (pp. 41-48).

Cottrell, S. (2017). *Critical Thinking Skills: Effective Analysis, Argument and Reflection.* Bloomsbury Academic.

Erkek, Ö., y Bostan, M. (2019). A different look at the reasoning process of prospective middle school mathematics teachers: Global argumentation structures. *Egitim Ve Bilim-Education and Science, 44*(199), 75-101.

Olivera, M. (2016). *Estudio de Uso y Valoración de Textos Escolares: Informe final*. Ministerio de Educación de Chile.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of mathematical behavior, 26*(1), 60-82.

Ledermann, C. (2021). *Contextualización curricular para el desarrollo de la habilidad matemática de argumentar y comunicar en docentes de educación básica* [Tesis de magíster, Pontificia Universidad Católica de Chile].

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2015). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio*. Autor.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2016). *Desarrollo de habilidades: Aprender a pensar matemáticamente*. Autor.

Moreno, A., y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas en L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 243-258). Editorial Pirámide.

OCDE. (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003*, Secretaría general técnica.

Pereira, F., y González, G. (2011) Análisis descriptivo de Textos Escolares de Lenguaje y Comunicación. *Literatura y Lingüística*, 24, 161-182.

Pino, C., y Díaz-Levicoy. D. (2013). Análisis de las actividades propuestas en dos textos escolares de primer año medio para la enseñanza de la célula. *Revista Electrónica Diálogos Educativos, 26*, 18-30.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Solar, H., y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema, 30*(56), 1092 - 1112.

Solarte, M. (2010). Análisis de Contenidos en los Textos Escolares de Ciencias Naturales, Aplicando la Teoría de la Transposición Didáctica. *Revista EDUCyT, 1*, 175 – 188.

Stein, M., y Smith, M. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 268–275.

Superintendencia de Educación (2018). *Circular sobre textos escolares y útiles escolares.* Gobierno de Chile.

Voogt, J., y Pareja, N. (2012). A comparative analysis of international frameworks for 21st century competences: Implications for national curriculum policies. *Journal of Curriculum Studies, 44*(3), 299-321.

Wood, T., Williams, G., y McNeal, B. (2006). Children's mathematical thinking in different classroom Cultures. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(3), 222–255.

CARACTERIZACIÓN DE TAREAS MATEMÁTICAS PROPUESTAS EN UN TEXTO ESCOLAR, RESPECTO AL CONOCIMIENTO DEL TEOREMA DE THALES: UNA VISIÓN DESDE DISTINTOS REFERENTES

Romina González, Francisca Muñoz, Camilo Salazar, Fabián Quiroga Merino

Universidad de Concepción

rgonzalezi2018@udec.cl, franciscaanmuno@udec.cl, camilsalazar@udec.cl, fquiroga@udec.cl

El teorema de Thales, como indica Climent et al. (2021) destaca por integrar conocimientos como proporcionalidad, fracciones, homotecia, semejanza, trigonometría, ecuaciones y cálculo infinitesimal. Por esto, analizar tareas relacionadas es importante para el aprendizaje matemático escolar, específicamente su caracterización según dimensiones de contexto, grado de estructuración, desafío, niveles de demanda cognitiva y de grado de estructuración-desafío, de autores como Ponte (2005), Skovmose (2000), etc. Este análisis permitió resumir y relacionar características, como son tareas cerradas, de baja demanda, matemática pura y ejercicios con procedimientos sin conexión. Finalmente, se concluyó que podemos potenciar las tareas matemáticas utilizando el teorema de Thales.

Tarea matemática, Teorema de Thales, Texto escolar, Geometría.

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Lograr la adquisición de conocimientos y el desarrollo de habilidades geométricas ha sido un desafío para la educación escolar. Autores como Gamboa y Ballestero (2009) señalan que la enseñanza de los conocimientos de geometría se ven desplazados hacia el final del curso debido a que algunos docentes dan prioridad a otras áreas en la enseñanza de las matemáticas. Lo anterior podría ser un motivo por el cual en Chile se visualizan dificultades en torno a la comprensión de conceptos, procesos de razonamiento geométrico y desarrollo de pensamiento argumentativo y deductivo por parte de los estudiantes, lo cual se puede ver reflejado en el análisis de los resultados de las pruebas de medición tanto nacionales (SIMCE, 2003, 2006, 2010), como internacionales (PISA, 2000, 2006, 2009; TIMMS, 2003), donde se observa que las mayores dificultades están en la comprensión de los problemas y en los procesos argumentativo - deductivos. Igualmente, en los resultados de la Prueba de Selección Universitaria se ven evidenciadas estas dificultades dado que, como expresa Baeza (2015, p.1) en su estudio:

> "Al revisar los resultados de los últimos procesos de admisión, se puede observar que las preguntas de geometría tienen altos porcentajes de omisión, llegando incluso al 88% en algunas preguntas específicas. A su vez, además de la omisión, el porcentaje de aciertos de los estudiantes que abordan estas preguntas es bajo en relación con los otros ejes de la prueba".

Lo anterior se torna preocupante debido a que los problemas son tomados como un modelo de representación y descripción de la realidad, esto se vuelve un elemento que permite al estudiante

desarrollar procesos de razonamiento. Además, Lastra (2005) indica que la geometría, al considerarse como cuerpo de conocimientos, permite analizar, organizar y sistematizar conocimientos espaciales, los que a su vez favorecen la comprensión y admiración por el entorno natural.

Teorema de Thales en el ámbito escolar

Existe un conocimiento matemático que se destaca por englobar y conectar una serie de otros conocimientos (proporcionalidad, fracciones, semejanza, homotecia, entre otros), además que también hace uso de nociones de otros ejes (números y álgebra). Este conocimiento es el famoso teorema de Thales, que es enseñado en primer año de educación media (14-15 años). Lo señalado recientemente se ve sustentado por Climent et al. (2021) quien comenta que "del teorema de Thales se destaca su relación con numerosos contenidos matemáticos: la proporcionalidad numérica y las fracciones, la homotecia, la semejanza, la trigonometría, las ecuaciones de la recta y el cálculo infinitesimal". Lo anterior es importante ya que al estudiar un conocimiento con características integradoras implica que su estudio permitirá poder desarrollar múltiples habilidades geométricas como también aquellas ligadas a otros ejes.

Tareas matemáticas en el texto escolar

Diversas investigaciones plantean el uso del texto escolar como una herramienta típica y de empleo cotidiano por parte del docente al momento de seleccionar una tarea. Córdova (2011) comenta que el libro de texto se transforma en una "herramienta fundamental para el desarrollo de los aprendizajes por parte del estudiante, así como también para apoyar el proceso didáctico desde la perspectiva del proceso de enseñanza", lo cual señala que el libro de texto se convierte en uno de los recursos más valorados y, por lo tanto, más utilizados por el docente a la hora de implementar su clase. Por este motivo, es necesario que este sea capaz de aplicar criterios de selección de tareas en base a las características que éstas presentan con relación a los aprendizajes que se desean lograr en una determinada instancia de aprendizaje, lo que disminuye a la vez las dificultades al enseñar este conocimiento.

METODOLOGÍA

La investigación es de tipo cualitativo y descriptivo, debido a que en ella se describieron detalladamente dimensiones encontradas en las actividades propuestas por el Ministerio de educación de Chile (MINEDUC), en el libro de texto y cuadernillo de actividades, que abarcan el teorema de Thales. Ahora, con respecto a la población, el texto escolar es el recurso más utilizado por los docentes para implementar sus clases, así que la población objeto son los textos del MINEDUC de Primero Medio y la técnica de muestreo que utilizamos fue a conveniencia, pues según la definición de Supo (2014), este tipo de muestreo consiste en que el investigador seleccione a conveniencia para la muestra según lo que le resulte más cómodo para examinar.

Inicialmente se seleccionaron lecturas que luego se filtraron para quedar con lecturas relacionadas a investigaciones sobre ‘‘Tarea Matemática’’. Posteriormente, se buscaron actividades en los libros mencionados en el párrafo anterior, relacionadas al teorema de Thales y para ello, se revisaron textos creados entre los años 2016 y 2020, pero al percatarnos que existían actividades repetidas, solo consideramos los del año 2020, seleccionando así un total de 29 actividades.

Finalmente, se confeccionaron tres tablas: una que resume y describe las dimensiones de contexto,

grado de estructuración, grado de desafío, niveles de demanda cognitiva, y grado de estructuración-desafío, tabla que fue empleada para caracterizar las tareas matemáticas seleccionadas; la segunda tabla describe cada dimensión apoyada de ejemplos propuestos por los mismos autores para cada clasificación de tarea, esta permitió contrastar las tareas de los textos escolares con los ejemplos apropiados para así poder clasificar cada una de las tareas; en la tercera tabla se identifica el título, enunciado y figura de la tarea matemática propuesta en los textos.

RESULTADOS Y DISCUSIONES

Fueron 29 las tareas caracterizadas, para esto pusimos énfasis en las dimensiones de contexto, definida por Ole Skovmose (2000), grado de estructuración, definida por Ponte (2005), grado de desafío, definida por Ponte (2005) y Stein et al. (1998), niveles de demanda cognitiva, definida por Ramos y Casas (2018) y Smith et al. (1998) y finalmente la dimensión de grado de estructuración-desafío definida por Ponte (2005). A continuación, en la Tabla 1, se puede observar un ejemplo de tarea matemática caracterizada según las dimensiones ya mencionadas:

Tabla 1.

Caracterización actividad 10 según distintas dimensiones.

A10**:** Un velero tiene dos mástiles verticales a la cubierta. El menor de ellos mide 4 cm y proyecta una sombra sobre la cubierta de 2,5 cm , y en ese mismo instante, el mástil mayor proyecta una sombra de 7,5 cm. ¿Cuánto mide el mástil mayor?	
Tabla detallada	Contexto: El enunciado señala que se tiene un velero con dos mástiles, lo cual es propio de la realidad, sin embargo, no es tan común conocer un velero, por lo tanto, la actividad no cumple con las características de realidad, es decir, tal como señala Skovmose (2000) es una realidad construida que no es observada en la cotidianidad, por lo tanto, el contexto es de semirealidad. Grado de estructuración: Tarea cerrada, ya que, Ponte (2005) las define como en las cuales está claramente establecido lo que se da y lo que se pide, tal como se puede observar en esta tarea, dado que, se entrega que el mástil menor mide y proyecta una sombra de 2,5 cm y el mástil mayor proyecta una sombra de 7,5 cm , luego aparece de manera explícita la pregunta "¿cuánto mide el mástil mayor?" Grado de desafío: Bajo, pues a pesar de que no se observa representación concreta del enunciado, el procedimiento a seguir es exactamente el mismo que en las actividades anteriores y Ponte (2005) indica que es nivel bajo si la tarea es rutinaria. Niveles de demanda cognitiva: Procedimiento sin conexión, ya que la actividad está intencionada y es evidente su desarrollo según las actividades anteriores, así que requiere una baja demanda cognitiva para ser desarrollada correctamente, según lo que indican Smith, Schwan y Stein (1998) Grado de estructuración-desafío: Al ser una tarea cerrada y de baja demanda, como señala Ponte (2005) la actividad es considerada ejercicio.

Fuente: elaboración propia.

En la dimensión de contexto distinguimos 5 tareas de contexto realidad, 6 de semi realidad y 18 de matemática pura, lo que permite afirmar que la mayoría de las tareas de textos escolares relacionadas

al teorema de Thales, son matemáticas puras, que se caracterizan por trabajar de forma abstracta, utilizando axiomas, fórmulas y algoritmos con criterios matemáticos rigurosos.

En la dimensión grado de estructuración consideramos 27 tareas cerradas y 2 tareas abiertas, es decir, casi todas las tareas relacionadas al teorema de Thales establecen claramente lo que se da y lo que se pide. Con respecto al grado de desafío, 8 tareas tienen alto grado de desafío y 21 bajo grado de desafío, pues la gran mayoría eran tareas rutinarias en las cuales no era necesario profundizar en el contenido. Al unir estas dos dimensiones se conforma la dimensión de grado de estructuración-desafío, donde se clasificaron 21 tareas como ejercicio, 6 como problema y 2 como investigación, esto debido a que las tareas en su mayoría eran cerradas y de bajo grado de desafío.

Finalmente, especificando la dimensión de niveles de demanda cognitiva, encontramos que 5 de las tareas eran de memorización, 16 tareas eran procedimientos sin conexión y 8 eran de procedimientos con conexión, esto ocurrió por un lado porque la mayor parte de las tareas requerían de una baja demanda cognitiva y, además, no tenían conexión entre los conceptos y el significado de lo que se debe hacer para resolver la tarea.

CONCLUSIONES

Se concluye de lo investigado que, si bien, el teorema de Thales es un contenido que integra varios conocimientos tales como proporción, homotecia, trigonometría, entre otros, las tareas no aprovechan la capacidad que tienen de conectarlos directamente, lo cual se pudo evidenciar debido a que existen pocas tareas que permiten el desarrollo de procedimientos con conexión, tipo de tarea que es útil para enlazar los conocimientos del área geométrica. Además, se observó la poca existencia de tareas abiertas, las cuales permiten que los estudiantes razonen geométricamente. Considerando lo anterior, resultaría interesante para una futura investigación sugerir tareas correspondientes al teorema de Thales, pues como sabemos que el teorema de Thales es integrador, se podrían utilizar tareas con el fin de que el teorema sea una conexión que permita que los estudiantes relacionen distintos conocimientos geométricos.

REFERENCIAS

Baeza, D., Galaz, J., Gallo, M., Godoy, R., Zavala, M., y Zuñiga, M. (2015). *Dificultades en la enseñanza y en los aprendizajes de triángulos y sus elementos secundarios.* En Vásquez, C.; Rivas, H.; Pincheira, N., Rojas, F., Solar, H., Chandia, E., y Parraguez, Marcela (Eds.), *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX* (pp. 617-621). SOCHIEM.

Climent, N., Espinoza-Vásquez, G., Carrillo, J., Henríquez-Rivas, C., y Ponce, R. (2021). Una lección sobre el teorema de Thales, vista desde el conocimiento especializado del profesor. *Educación matemática*, *33*(1), 98-124.

Córdova, D. (2012). El texto escolar desde una perspectiva didáctico/pedagógica, aproximación a un análisis. *Investigación y Postgrado*, *27*(1), 195-222.

Fortuny, J.M., y Giménez, J. (1998). *Geometría: La forma y las transformaciones geométricas*. Autores.

Araya, R. G., y Alfaro, E. B. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. 5. 113- 136

Lastra, S. (2005). *Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas* [Tesis de Magíster, Universidad de Chile, Chile].

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Ramos, L., y Casas, L. (2018). Demanda Cognitiva de Estándares Educativos y Libros de Texto para la Enseñanza del Álgebra en Honduras. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(62), 1134-1151.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista Ema*, *6*(1), 3-26.

Smith, M., y Stein, M. (1998). *Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice*. Mathematics Teaching in the Middle School (Vol. 3, pp. 344-350).

Stein, M., Grover, B., y Henningsen, M. (1996). *Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms.* American Educational Research Journal, 33(2) (p.455–488).

Stein, M.K. y Smith, M.S. (1998). *Mathematical tasks as a framework for reflection.* Mathematics Teaching in the Middle School, 3, 268-275.

Supo, J. (2014). *Cómo elegir una muestra: Técnicas para seleccionar una muestra representativa.* Bioestadistico.

LA IMPORTANCIA DE LAS GUÍAS DIDÁCTICAS PARA EL PROFESORADO EN ENSEÑANZA BÁSICA: EL CASO DE LAS FRACCIONES

Alejandra Pastén Ramos, Roberto Vidal Córtes

Universidad Alberto Hurtado

anpasten@uc.cl, rvidal@uahurtado.cl

Las denominadas "Guías didácticas para el profesor", (desde ahora GGDD) como recurso complementario al texto escolar del estudiante, presenta sugerencias sobre su uso en el proceso de enseñanza aprendizaje, que en nuestro caso lo situamos en el aula de Matemática en Educación Básica. Al analizar los indicadores de la licitación, estudios acerca de su uso y el contenido que proveen, se detecta escaso aporte al conocimiento didáctico del profesor, pues se centra fundamentalmente en lo pedagógico. Se presenta de este modo, un estado del arte respecto de lo que se entiende por "lo didáctico", desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. El presente trabajo de investigación, en desarrollo, se encuentra en la etapa de creación de indicadores para diseñar genuinas GGDD.

Guía didáctica, Textos escolares, Alcance didáctico, Teoría antropológica de lo didáctico.

ANTECEDENTES

Luego de los preocupantes resultados PISA 2018 y un estudio realizado por el Centro de Estudios Públicos (El futuro en riesgo: Nuestros textos escolares), se concluye sobre la importancia del texto escolar como material de apoyo al profesor y en términos de su contribución al logro de mejores aprendizajes, "la presencia de textos de estudio [textos escolares] es uno de los factores que más consistentemente han demostrado tener una influencia positiva sobre el rendimiento escolar" (Eyzaguirre y Fontaine, 1997, p. 351).

Como complemento al texto escolar del estudiante, se encuentra la Guía Didáctica del Docente (en adelante GD), que de acuerdo con lo declarado en la página web oficial Currículum Nacional, es considerada como un apoyo a su labor y permite el correcto uso de este. La GD propone orientaciones didácticas, actividades y evaluaciones que complementan el texto escolar.

En 2016, el Ministerio de Educación solicitó realizar un Estudio sobre Uso y Valoración de Textos Escolares (Olivera, 2016), en donde se consultó a profesores de 1º a 6º básico el acceso que tenían a las GD, los que indicaron en un 90,8% tenerlo a disposición, de los cuales entre un 70% y 80% la consideró "muy útil o útil en su trabajo" correspondientemente. Sin embargo, a medida que los niveles escolares avanzan, acercándose a enseñanza media, la consideración "poco útil" aumenta, siendo en 1º básico un 6,8% y en 6º Básico un 23,2%. De acuerdo con los datos entregados por el estudio, surge la inquietud ¿qué sucede entonces con las recomendaciones que dejan de ser valiosas para el profesorado en matemática?

Mediante un análisis preliminar, al observar una Guía Didáctica: GD318 [las guías didácticas fueron etiquetadas mediante la codificación GD3año, en dónde 3 corresponde al nivel 3º básico y los sub números, corresponden al año de publicación del texto], en la unidad referida a Fracciones, se presenta

un cuadro con elementos propios de una clase: objetivo, conceptos claves, habilidades, recursos, etc. y, por otro lado, sugerencias con respecto a la presentación del contenido relacionado a situaciones de la vida cotidiana: cortes de pizza, botella de agua o un pan partido por la mitad, acompañado de una breve explicación en relación a las partes y el todo. En la siguiente clase, las sugerencias se enfocan en el ambiente de aprendizaje: silencio, la importancia de respetar los turnos del habla y la opinión del resto (Andrades y Valverde, 2022). Las sugerencias anteriormente descritas, se enfocan hacia temas pedagógicos, que podrían ser atingentes a una clase de matemática, lenguaje o historia, por lo que resulta natural preguntarse si estas GD, ¿aportan al conocimiento del profesor con respecto a la enseñanza de fracciones? De acuerdo con Freudenthal (1983), las fracciones son el recurso fenomenológico de los números racionales, la puerta de entrada a ellos. Estos figuran en el saber a enseñar luego de trabajar los números naturales, sin embargo, de acuerdo con el mismo autor, al pensar que los estudiantes ya están lo suficientemente preparados para trabajar con fracciones, se presenta con un enfoque muy limitado. Por otro lado, Fandiño (2015) sostiene que detrás del término "fracción" se esconden varias acepciones, la primera que se presenta [parte-todo], acarrea dificultades por la fácil comprensión de parte de los estudiantes, fijando un modelo demasiado pronto, el cual no permite adaptarlo a otras situaciones. Ambos antecedentes, proporcionan información relevante a considerar al momento de la enseñanza de este contenido, información que debiese considerar las sugerencias de las GGDD.

De todo lo anterior, nace el cuestionamiento sobre las pautas que se consideran a la hora de diseñar las sugerencias de una GD, lo que nos conduce a revisar los criterios para que éstas puedan ser ofertadas dentro del mercado educacional, es decir, los indicadores descritos en las Bases Licitación Pública de los Textos Escolares destinados a Docentes (2019), entre los cuales se encuentra el criterio de Calidad Didáctica Específica [en Matemática], que detalla elementos a considerar a la hora de diseñar, tales como: ejemplo(s) para la activación de conocimientos previos y experiencias previas, material complementario fotocopiable con actividades adicionales que le permita al docente diversificar la forma de trabajar el Objetivo de Aprendizaje, construcción de ambiente con trabajo colaborativo, entre otros. Cabe mencionar, que las editoriales, por tanto, los autores, deben ceñirse a estos indicadores para que sus libros sean seleccionados, con lo que surge la pregunta ¿cómo se puede potenciar aspectos didácticos específicos para la enseñanza/aprendizaje de las fracciones, si los indicadores que lo guían consideran en su mayoría criterios pedagógicos?

Entonces, ¿qué se espera de una guía didáctica en Matemática? La Didáctica de la Matemática tiene como objeto primario de estudio la actividad matemática que se desarrolla en el proceso de enseñanza aprendizaje. En palabras de Gascón (1998), "en adelante la didáctica de las matemáticas puede seguir siendo considerada como la ciencia de los fenómenos y los procesos didácticos, con la condición de que "didáctico" se entienda como "relativo al estudio de las matemáticas" (p.17). Bajo esta perspectiva se enmarca el presente trabajo investigación, entendiendo de esta manera la palabra didáctica, utilizada como sustantivo y no como un adjetivo relacionado a lo entretenido o distinto.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Dentro de los requisitos presentes en la base de la licitación presentados en los antecedentes se encuentran exigencias desde la pedagogía, que no apuntan a lo matemático para ser considerado didáctico. Estos elementos podemos ubicarlos en una guía didáctica de lenguaje, y tendrían un similar

efecto, por lo tanto, la palabra didáctica, utilizada desde la portada del libro, corresponde a un adjetivo comúnmente utilizado en educación, desplazando a un lugar secundario el aporte de "lo didáctico" en su desarrollo como disciplina. Así, es necesario incluir criterios desde este enfoque para que los autores puedan realizar sugerencias con respecto a la construcción y organización del conocimiento matemático que presentan los textos escolares, en este caso, particularizado en "fracciones", que aporten a los docentes una reflexión constante sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Para lograrlo es necesario tener un referente, lugar que debiese ocupar la GD, desarrollando y reforzando las competencias profesionales docentes. De acuerdo con lo anterior, la pregunta que guía esta investigación corresponde a ¿qué indicadores debieran incorporarse en el diseño de una GD para potenciar sus aspectos didácticos en fracciones? Para responder esta pregunta, se plantea como objetivo general de investigación crear un conjunto de indicadores para elaborar una GD, basadas en aspectos didácticos, en el sentido descrito, que permita la construcción del concepto de fracción en estudiantes de 9 años.

ENFOQUE TEÓRICO

El desarrollo de esta investigación se fundamentará en la Teoría Antropológica de lo Didáctico [TAD] (Barquero et al., 2019). Chevallard (1999) postula que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse como un modelo único que se resumen con la palabra praxeología (praxis + logos). La praxeología u organización matemática es la herramienta fundamental que permite modelizar cualquier actividad matemática, la cual considera los niveles: praxis o del saber hacer, referente a la práctica que se realiza y logos o del saber, correspondiente a la parte descriptiva, organizadora y justificadora de la actividad. Para Chevallard et al. (1997), el sistema de tareas de los docentes presenta dos componentes asociados: tareas de concepción y organización de mecanismos de estudio, así como la gestión de sus medios ambientes (Organizaciones Matemáticas) y, por otro lado, tareas relacionadas a la dirección de estudio y enseñanza. Se refiere a la manera de organizar el estudio matemático que se lleva a cabo en una Institución (Organizaciones Didácticas). En este sentido, el análisis de las GGDD se basa en el diseño de tareas y sus respectivas orientaciones respecto de las técnicas y tecnologías en el marco de la institución escolar.

Para elaborar los propios modelos de investigación centrados en el desarrollo y mejora de la enseñanza y aprendizaje, surge el paradigma de investigación didáctica de las matemáticas, que Gascón (2003) denomina "programa epistemológico". Desde aquí, es necesario proponer modelos epistemológicos explícitos en los diferentes ámbitos de la actividad matemática.

> El modelo epistemológico dominante de cierto ámbito del saber matemático enseñado (en una institución determinada) condiciona fuertemente no sólo el tipo de actividades matemáticas que será posible llevar a cabo en dicha institución en torno al ámbito matemático en cuestión, sino también las correspondientes actividades didácticas que se materializan en un modelo docente. (Gascón, 2014, p.108).

De los modelos epistemológicos euclídeos, cuasi empíricos o constructivistas, se desprende una evolución racional del problema docente: teoricismo, tecnicismo, modernismo, empirismo, constructivismo, lo que afecta en cómo gestiona todo lo relacionado al proceso de enseñanza - aprendizaje, de acuerdo con ello, ningún aspecto del proceso de estudio de las matemáticas es ajeno a su influencia (Gascón, 2001). Basado en esto, se analizarán las sugerencias de las actuales GGDD, con las cuales se identificarán, a modo de hipótesis, qué modelos docentes se infieren de sus

comentarios y de las decisiones con respecto al contenido que se reflejan en las páginas del texto escolar.

Los textos escolares y las GGDD han sido creados por docentes, que a pesar de las restricciones propias de la institución/editorial y programas propuestos por el Ministerio, pueden proponer sugerencias que aporten en la enseñanza específica de las unidades a trabajar durante el año. De ellos depende la creatividad plasmada en cada una de las hojas y las decisiones que tomen al cómo organizar la Obra Matemática y la Organización Didáctica, las cuales se verán reflejadas en el objeto de estudio de esta investigación: las Guías Didácticas.

METODOLOGÍA

Para desarrollar esta investigación se utilizó como base una metodología cualitativa de carácter explicativo. Los modelos cualitativos en educación desarrollan objetivos de comprensión de diversos fenómenos socioeducativos y de transformación de la realidad, por lo tanto, la investigación puede dirigirse a la comprensión, transformación, cambio y toma de decisiones (Sandín, 2003). Por otro lado, Hernández et al. (1991), proponen que los estudios explicativos buscan explicar la razón del por qué ocurren ciertos fenómenos y las condiciones que se dan.

- Fase 1 de investigación, para lograr el objetivo planteado, fue necesario relacionar las sugerencias "didácticas" en fracciones con los modelos epistemológicos que subyacen a los modelos docentes. Para ello se analizó una muestra de 6 guías didácticas de distintas editoriales, licitadas por el Ministerio de Educación de Chile, en el periodo comprendido entre el 2012 y 2022, las que fueron denominadas con la codificación: GD312, GD314, GD318, GD320, GD322(1), GD322(2), en las cuales se observaron los siguientes elementos (Tabla 1):

Tabla 1.

Sugerencias para el profesor en la guía didáctica.

Guía Didáctica	Sugerencias para el profesor				
GD312	Rol Profesor	Rol Estudiante	Resolución problema	Análisis tarea	Análisis Técnica Tecnología
GD314					

Este análisis permitió inferir bajo qué modelo epistemológico están influenciadas las sugerencias de los autores, enfocados en cómo toma decisiones con respecto a la obra matemática lo que se visualiza en los comentarios que presentan las GGDD.

En la Fase 2 de investigación se analizó el aporte matemático de los actuales indicadores para el diseño de guías didácticas entregadas por las bases de la licitación pública (2019). Este análisis, permitió identificar qué concepto de didáctica hay en los indicadores con los cuales se diseñan y organizan los libros para el profesor.

RESULTADOS PRELIMINARES

Debido a que la investigación se encuentra en pleno desarrollo, se darán a conocer resultados preliminares sobre las características de las sugerencias presentes en las GGDD.

Para tener una visión general del aporte pedagógico o relacionado a lo matemático de las guías didácticas, se contrastaron dos de éstas: GD12 y GD22 (1) con el objetivo de comparar cada una de las sugerencias y clasificarlas en sugerencias pedagógicas o relacionado a la matemática. Es importante hacer mención que se consideraron sugerencias pedagógicas, a todas aquellas que el mensaje podría ser sacado de este libro de matemática y ubicarlas en otra asignatura, con una actividad distinta y tendría el mismo efecto; en muchos casos que fueron consideradas como "sugerencia genérica". Se consideró matemático, a todas las sugerencias que tuvieran relación con la enseñanza aprendizaje de las fracciones. Basados en lo anterior, el análisis arrojó la siguiente información:

- GD12: Sugerencias pedagógicas: 38. Sugerencias Matemáticas: 56
- GD22 (1): Sugerencias pedagógicas: 17. Sugerencias Matemáticas: 58

En la GD12, el 40,4% de las sugerencias corresponden a elementos fuera de la matemática: importancia del ambiente de aprendizaje, recomendaciones de revisión de actividades, felicitar a estudiantes por un buen trabajo, entre otros. Por otro lado, en GD22 (1), 22,6% de las sugerencias se encuentran fuera de la matemática. De acuerdo con los datos anteriores, se observa la fuerte presencia de lo pedagógico en estas guías didácticas que están centrados en enseñar matemática.

En relación con las sugerencias enfocados en lo matemático, las cuales fueron identificadas en las 6 GGDD analizadas, se requiere del trabajo de un profesor activo, quien, desde el marco de referencia utilizado en esta investigación, tiene por tarea transversal "enseñar la faceta parte-todo de una fracción" a través de la técnica de representación de figuras rectangulares o circulares (contextos continuos). Todos los ejemplares buscan que los estudiantes identifiquen el numerador y denominador, para identificar el diagrama que les corresponde y verbalizar la fracción. En ninguno de los casos se observa tecnologías de las técnicas trabajadas. El profesor es el encargado de presentar el contenido y aclarar, guiar a los estudiantes a la respuesta correcta a través de la ejercitación en aparentes contextos distintos, sin embargo, las situaciones "problemas" que se presentan son forzadas para que estén presente las fracciones y se puedan identificar el numerador y denominador. En la mayor parte de las GGDD, los diagramas que se utilizan son en contextos continuos, que se encuentran divididas de acuerdo con lo que indica el denominador, nunca por un múltiplo. En la GD14, se presenta una actividad complementaria en donde se trabajan las fracciones en contextos discretos, sin embargo, el profesor es el encargado de enseñar la técnica: representar la situación y mostrar a los estudiantes cómo se identifican las fracciones en estos casos. En todas las GGDD, se recomienda el uso de material concreto para apoyar a los estudiantes que presentan dificultad, sin embargo, la sugerencia se limita a este detalle y no indica cómo apoyar este trabajo, entregando un valor al material concreto por el hecho de utilizarlo. Las sugerencias en general se van repitiendo en toda la unidad, pese a que la actividad vaya variando aparentemente.

En la totalidad de las GGDD se identifica a un profesor facilitador del aprendizaje, un estudiante receptor del contenido, preparado para practicar a través de la ejercitación para luego aplicar en "problemas" lo aprendido. Si en esta faceta presentan dificultades, el profesor entrega pasos para

lograr el objetivo. Las fracciones aparecen porque la unidad lo indica, y no a través de la necesidad de medir elementos, que no lograron ser medidos con enteros.

Estos resultados preliminares permiten entrever un sentido de lo didáctico desde su sentido metodológico, y no como parte de un conocimiento sobre los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, como para el caso de las fracciones considera la importancia de las nociones de "fracción unitaria", "partes iguales", sus distintas facetas y análisis de sus representaciones, entre otros puntos de interés para "lo didáctico".

REFERENCIAS

Andrades, C., y Valverde, A. (2022). *Guía didáctica del docente. Matemática 3º Básico.* Santillana.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educação Matemática Pesquisa, 15*(1), 1-28.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), pp. 221-266.

Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE-Horsori.

Eyzaguirre, B., y Fontaine, L. (1997). El futuro en riesgo: nuestros textos escolares. *Revista Estudios Públicos,* 68*,* 339 – 354.

Fandiño, M. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos.* Editorial Magisterio.

Freudenthal, H. (2001). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* (L. Puig, trad.). Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. (Original publicado en 1983).

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (1997). *Metodología de la Investigación.* Mc Graw Hill.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*. Recherches en Didactique des Mathématiques,* 18, 7-34.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2), 129-159.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas*. Educación Matemática, 26*(1), 99-123.

Sandín, M. (2003). La enseñanza de la investigación cualitativa. *Revista de enseñanza universitaria Sevilla,* (21)*,* 37-52.

LOS INTERVALOS DE CONFIANZA EN EL CURRÍCULO DE CHILE

Exequiel A. Llanos-Lagos, Jesús Guadalupe Lugo-Armenta, Luis R. Pino-Fan

Universidad de Los Lagos

exequiel.llanos@gmail.com, jesus.lugo@ulagos.cl, luis.pino@ulagos.cl

La siguiente comunicación tiene como propósito presentar algunos resultados sobre el estudio del tratamiento del intervalo de confianza desde su incorporación al currículo de matemáticas de Chile. Para llevar a cabo esta investigación se han utilizado herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), como las nociones de práctica matemática y configuración ontosemiótica, para analizar cómo son presentados los intervalos de confianza y el tratamiento que se les ha dado en el currículo. Los resultados, muestran que, desde la incorporación del objeto en estudio a la actualidad, éste carece de congruencias sobre cómo ha sido definido, por otro lado, del texto vigente se observa que su utilidad es de carácter más bien procedimental, en vez de promover interpretación.

Análisis de textos, Enfoque Ontosemiótico, Intervalo de confianza, Inferencia estadística, Significados.

INTRODUCCIÓN Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

A principios del siglo XX se utilizaba la Estadística en aplicaciones vinculadas a las ciencias, posteriormente, se fue incorporando paulatinamente su enseñanza en los distintos niveles educativos. Perry (1900), citado en International Handbook of Research in Statistics Education, propuso un plan de estudio para las escuelas británicas que considerarán en el currículo la interpolación y errores probables.

Quintana (1989), menciona que la inferencia estadística resuelve dos tipos de problemas, el primero, refiere a la estimación de una o varias características de la población, destacando que la estimación se separa en la del tipo puntual y otra por intervalos de confianza (IC), y el segundo, permite corroborar hipótesis acerca de características de la población. Asimismo, Wild et al. (2018) indican que la naturaleza de la inferencia estadística es la extrapolación de datos para llegar a conclusiones sobre un todo, refiriéndose a una realidad más amplia. En la actualidad, se ha incorporado la estadística inferencial en los programas de estudios de educación media de diversos países (e.g., Chile, España y Australia), con el propósito de formar ciudadanos críticos, que puedan tomar decisiones y realizar predicciones. Aunado a lo anterior, hemos observado que se están realizando diversas investigaciones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la inferencia estadística, las cuales reflejan las dificultades y necesidades que tienen de los profesores para la enseñanza de este tópico.

Evolución de la enseñanza del eje de estadística en los programas de estudios

Los Estándares de currículo y evaluación para las matemáticas escolares (NCTM, 1989) delimitaron los contenidos y objetivos en los planes y programas de Estados Unidos. Del mismo modo, este fenómeno se observa en Chile, debido a que en el año 1992 se estaba incorporando contenidos de estadística descriptiva y probabilidad en los niveles de 8º básico y 4º medio. La enseñanza de la estadística y probabilidad en el sistema educacional chileno se ha ido adecuando y ajustando a las

necesidades de la sociedad, y esto se puede observar con la creciente incorporación de contenidos y habilidades que busca desarrollar en el eje temático de estadística y probabilidad.

Desde el año 2009 que se incorporó la inferencia estadística en los programas de estudios se incluyó la enseñanza del IC, siendo una noción clave para predecir características de la población. La necesidad de incluir los IC en los programas de estudio es dada su importancia y usos que tienen en áreas donde se requieren estimaciones cuantitativas que permitan realizar inferencias con un mayor grado de certeza; tales como, control de calidad, administración, salud, entre otras. A pesar de la gran utilidad de los IC, en áreas como las anteriormente señaladas, su estudio no está exento de errores y dificultades, en la siguiente sección abordaremos los que han sido más reportados en las investigaciones de educación estadística.

Errores y dificultades de profesores y estudiantes en la enseñanza y aprendizaje de los intervalos de confianza

Los estudios relacionados al aprendizaje reportan que tanto estudiantes como profesores presentan dificultades para comprender los IC. Al respecto, Olivo et al. (2007), señalan que una de las complejidades del significado del IC es identificar si se está considerando como un concepto o como un procedimiento. Asimismo, han señalado dificultades respecto a las propiedades que están asociadas a la noción de estudio (variación del ancho del intervalo y el tamaño muestral) y a los procedimientos, por ejemplo, al escoger el tipo de distribución que debe asociarse a la construcción del intervalo.

Diversos estudios han identificado que el principal error que cometen los estudiantes es confundir el estadístico con el parámetro (p.ej. Behar, 2001; delMas et al., 2007; Olivo et al., 2007), errores asociados a la interpretación del IC y, dificultades con el error asociado, amplitud del intervalo (López-Martín et al., 2019; Harradine et al., 2011; Yález y Behar, 2009; Flider y Cumming, 2005). Del mismo modo, López-Martín et al. (2019) detectaron que los futuros profesores conocen los errores que podrían cometer sus estudiantes en inferencia estadística, sin embargo, describen los posibles errores con poca precisión; concluyendo que esto puede deberse a que su conocimiento es todavía escaso respecto al tema.

Problemática

A partir de todo lo dicho anteriormente, resaltamos que existe una preocupación de la comunidad de investigación sobre el fortalecimiento de la formación de profesores en aspectos matemáticos y didácticos de los IC. Dado que hace tan solo una década que los intervalos de confianza se encuentran en el programa de matemática, nos preguntamos ¿cómo ha sido el tratamiento de los IC desde que se abordan por primera vez en el currículo –programas de estudio y textos escolares– hasta el que se encuentra vigente actualmente?

MARCO TEÓRICO

Para el desarrollo de esta investigación utilizamos herramientas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, debido a que nos permitirá analizar los elementos primarios que intervienen en las prácticas matemáticas de los IC presentes en los programas de estudio y libros de textos escolares. En particular, la configuración ontosemiótica nos entrega las herramientas necesarias para detectar la configuración de los objetos matemáticos primarios –

situaciones-problemas, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, elementos lingüísticos, procedimientos y argumentos– que intervienen en dichas prácticas matemáticas. Entendemos por practica matemática "toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

Del mismo modo, el EOS propicia herramientas para evidenciar los tipos de significados, los que provienen de prácticas que son de índole operativas y discursivas, de estas se distinguen las de carácter personal e institucional (p.ej. Lugo-Armenta et al., 2021a; 2021b). Respecto a este último, Godino y Batanero (1994) definen como sistema de prácticas institucionales aquellas que emergen en un momento dado desde un campo de problemas, y Godino y Font (2007) declaran cuatro tipos, siendo éstos el *implementado* (es un proceso de estudio específico), *evaluado* (es un subsistema que se medirá), *pretendido* (referido al que se planifica) y el *referencial* (es utilizado como referente para elaborar uno pretendido).

METODOLOGÍA

Esta investigación se realizará bajo un enfoque cualitativo; de acuerdo con Corbetta (2009), la "investigación cualitativa [esta] inspirada en el paradigma interpretativo, la relación que existe entre la teoría e investigación es abierta, interactiva" (p. 41).

Para llevar a cabo el estudio, se identifican y caracterizan los objetos matemáticos primarios que intervienen en el tratamiento de los intervalos de confianza en los diferentes programas de estudio y libros de texto que se han implementado en Chile desde el año de 2005 hasta el 2022 y, cómo es que han ido variando las acepciones sobre los IC.

ANÁLISIS EPISTÉMICO Y CONCLUSIONES

A continuación, por cuestiones de espacio, se presentan algunos de los resultados del análisis del tratamiento de los IC de los textos escolares desde el 2005 a la fecha. En la Figura 1 se resumen las nociones que se encuentran relacionadas con el IC, a las cuales se hace alusión en la definición del IC presente en los textos escolares.

Figura 1.

Nociones relacionadas con el IC que se encuentran presentes en su definición en los textos escolares desde el 2005 al 2022.

	Definición del I.C	Estimador	Parámetro	Nivel de confianza	Error asociado	Coeficiente asociado	Amplitud del intervalo	Probabilidad asociada
Texto escolar, 4to medio, 2005 – 2006.	✓	✓	✓		✓			
Texto escolar, 4to medio, 2007 – 2010.	✓		✓	✓	✓	✓		✓
Texto escolar, 4to medio, 2011 – 2012.	✓		✓	✓	✓	✓		✓
Texto escolar, 4to medio, 2013 – 2019.	✓	✓		✓			✓	✓
Texto escolar, 3ro – 4to medio, 2020 a la actualidad.	✓			✓	✓		✓	✓

Es importante destacar que no existe congruencia en las nociones que debe presentar la definición, lo que más se resalta es el nivel de confianza y la probabilidad asociada. Sin embargo, en la definición actual no se define lo que es un estimador y un parámetro, siendo dos conceptos claves para establecer la interpretación e inferir información desde una muestra hacia una población en estudio.

Para la definición del IC, se aprecia que en diversos períodos de los textos escolares tenemos objetos matemáticos asociados a la definición: parámetro, rango, intervalo, nivel de confianza y probabilidad. En los períodos 2005 – 2006 y 2013 –2019, se valoriza en la definición el grado de certidumbre asociado a una probabilidad de que se encuentre el valor del parámetro en el intervalo. Sin embargo, en los otros períodos no se integra el nivel de confianza y significancia. Otro aspecto observado es cómo es presentada la escritura utilizada en los textos escolares (Figura 2).

Figura 2.

Tratamiento en la escritura del IC para estimar la media presente en los textos escolares.

Año del texto escolar	Escritura del intervalo de confianza
2005 – 2006	$\left[\bar{X} - z \cdot \frac{\sigma_M}{\sqrt{N}} \; ; \; \bar{X} + z \cdot \frac{\sigma_M}{\sqrt{N}}\right]$
2007 – 2010	$\left[\bar{x} - k \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} , \bar{x} + k \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$
2011 – 2012	$\left[\bar{x} - k \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} , \bar{x} + k \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$
2013 – 2019	$\left[\bar{x} - z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{x} + z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
2020 – a la actualidad	$\left(\bar{x} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{x} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

A simple vista se aprecian que existen distintos conceptos asociados en la forma de presentar la escritura del IC, por ejemplo, del año 2005 al 2019 se observa que para el nivel de confianza se utilizan las nomenclaturas de z, k, $z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, y actualmente se evidencia como $z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$. Las dos primeras son utilizadas por medio de valores dados que provienen de una tabla, y los últimos dos son asociados a la distribución normal y obtenerlas de una tabla estandarizada, las cuales, el estudiante tendría que leer y asociar aspectos. Por otro lado, la desviación estándar difiere bastante y llevan a diversos significados que pueden emergen, confundiendo el representante con el representado; en particular se utilizan las nomenclaturas σ_M, s y σ, en orden correlativo se tienden a confundir con distribuciones muestrales, distribución muestral y distribución poblacional.

Con relación al significado referencial presente en el texto escolar vigente difiere del significado al implementado, esto se observa en el procedimiento utilizado de una situación ejemplificada, apreciándose que es más bien utilizado como un procedimiento que carece del objetivo curricular que es inferir información.

En conclusión, se aprecia que, desde la incorporación de los intervalos de confianza en los programas de estudios y textos escolares de Chile, tanto la presentación como las definiciones utilizadas han

variado al igual que los elementos lingüísticos utilizados. Aún se debe seguir ahondando en por qué las diferencias y su representatividad respecto de los significados de referencia de los IC.

REFERENCIAS

Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística*. [Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, España].

Corbetta, P. (2009). *Metodología y técnicas de investigación social*. McGraw-Hill.

delMas, R.C., Garfield, J.B., Ooms, A., y Chance, B.L. (2007). Assessing students' conceptual understanding after a first course in statistics. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 28-58.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., y Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

López-Martín, M., Batanero, C., y Gea, M. M. (2019). ¿Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en la inferencia estadística? *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33, 672-693.

Lugo-Armenta, J. G., y Pino-Fan, L. (2021a). Niveles de razonamiento inferencial para el estadístico t-Student. *BOLEMA*, 35(71), 1776-1802. doi: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a25

Lugo-Armenta, J.G., y Pino-Fan, L. (2021b). Inferential reasoning of secondary school mathematics teachers on the Chi-square statistic. *Mathematics*, *9*(19), 2416. https://doi.org/10.3390/math9192416

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school Mathematics*. NCTM.

Olivo, E., Batanero, C., y Díaz, C. (2008). Dificultades de comprensión del intervalo de confianza en estudiantes universitarios. *Educación matemática*, *20*(3), 5-32.

Olivo, E., Ortiz, J.J., y Batanero, C. (2007) Notas históricas sobre los intervalos de confianza e implicaciones didácticas. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X. Comunicaciones de los grupos de trabajo* (pp. 105- 114). SEIEM.

Quintana, C. (1989). *Elementos de inferencia estadística*. Universidad de Costa Rica.

Perry, J. (1900). The teaching of mathematics. *Nature*, 2, 317–320.

Wild, C. J., Utts, J. M., y Horton, N. J. (2018). What is statistics? In D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 5-36). Springer.

ANÁLISIS DEL CURRÍCULO CHILENO EN EDUCACIÓN BÁSICA EN TORNO A LA DIVISIÓN COMO ISOMORFISMO DE MEDIDA: EL CASO DE 3° BÁSICO

Yanet Riveras León[1], Maximina Márquez Torres[2]

[1]Escuela Rural Los Pellines,[2]Universidad de Los Lagos.

yriverasleon@gmail.com, maximina.marquez@ulagos.cl

El presente trabajo pretende evidenciar cómo aborda la división el currículo chileno de 3° a 6°básico, en esta oportunidad nos centraremos en 3° básico. Para el análisis nos apoyaremos de dos marcos teóricos, por un lado, tenemos la estructura multiplicativa (isomorfismo de medidas) propuestos por Vergnaud (1997) y, por otro, verificar cuáles son los significados pretendido y holístico de referencia expuestos en el Enfoque ontosemiótico. Sin embargo, para este caso se presentará sólo aspectos relacionados con Vergnaud. Al revisar y analizar las actividades de 3° básico, propuestas tanto en los libros de texto como en los programas de estudio, hemos encontrado que, si bien la noción de división se aborda desde 1° básico con actividades de agrupar elementos, es en este nivel donde se comienza a trabajar de manera formal, con actividades relacionadas con repartir elementos, agrupar en partes iguales, pero siempre apoyados de material concreto. La mayoría de los problemas que se presentan están relacionados con encontrar el cociente utilizando mayormente representaciones gráficas y simbólicas y pocas actividades concretas.

División, Isomorfismo de medida, Currículo chileno.

INTRODUCCIÓN

La división es considerada una de las operaciones más complejas de resolver por los estudiantes, sin embargo, es una actividad que es realizada de manera periódica y es de utilidad para el desarrollo de los seres humanos, como por ejemplo cuando tenemos que repartir de manera equitativa una torta en un cumpleaños, al repartir un curso en partes iguales en una competencia, entre otros. Como es una actividad que se realiza desde que se tiene uso de razón, se espera que los estudiantes se familiaricen a muy temprana edad con la acción de repartir en partes iguales una cierta cantidad de objetos, es por esta razón que el Ministerio de educación chileno menciona que es de vital importancia que en los cursos de primer ciclo básico (1° a 4°) se comience a trabajar este contenido acompañado de material concreto, para luego cambiar de registro a pictórico y finalmente a simbólico, método COPISI, para llegar al cálculo mediante el algoritmo de la operación (Gutiérrez et al., 2018).

Como mencionamos anteriormente la *división* se trabaja desde los primeros niveles de la educación básica en Chile, con acciones de agrupar elementos, repartir, entre otros, si bien hemos desarrollado una revisión minuciosa de los libros de texto y programas de estudios desde 1° a 8° básico para visualizar cómo se aborda la enseñanza-aprendizaje de esta operación, hemos decidido centrar este trabajo en 3° básico, ya que es donde se comienza a desarrollar esta operación de manera formal, para ello nos hemos apoyado en la teoría de los Campos Conceptuales expuestos por Vergnaud (1997).

Dificultades en torno a la División.

La dificultad que conlleva el proceso de la *división* ha sido motivo para realizar distintas

investigaciones, desde la introducción al desarrollo del algoritmo. Una de las formas en cómo se puede abordar las dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje de la división, puede ser el tipo de material que se le proporciona a los profesores, ya sean libros de textos u otro tipo de recursos que ayuden a estos en la enseñanza (Aguayo-Arriagada et al., 2016). En lo que se refiere a la enseñanza y uso del algoritmo en la resolución de problemas los profesores se ven enfrentados a diversas dificultades, de las que podemos mencionar el desarrollo de problemas reales y contextualizados que se abordan en el aula de clases, son tratados con poca frecuencia y más aún cuando se trata del trabajo con la división (De Castro y Escorial, 2007). En cuanto al desarrollo de situaciones donde se abordan problemas de estructuras multiplicativas, Ivars y Fernández (2016), realizaron una investigación con estudiantes de 1° a 6°, en España, cuyas edades fluctúan entre los 6 y 12 años, donde se abordaron distintos tipos de problemas de estructuras multiplicativas, entre los cuales destacan los problemas de isomorfismo de medida, en relación a los niveles de éxito y dificultades que estos presentan al momento de resolver un problema, donde los niños entre 6 y 8 años presentan mayores dificultades al resolver problemas de división–medida en relación a los de división–partitiva, sin embargo los alumnos de 3° en adelante presentan menores dificultades, ya que es en esta edad donde comienzan a desarrollar el algoritmo, además presentaron también el uso de otros algoritmos, como por ejemplo el uso de la suma repetida.

Como señalamos anteriormente la división es considerada una de las operaciones más complejas de resolver, Maza (1991) señala que esta operación se debe enseñar después de la multiplicación, no solo por considerarse la operatoria inversa, sino porque es la más difícil de entender por parte de los alumnos. Esto se evidencia en el hecho que la mayoría de las investigaciones están enfocadas en los distintos procesos que conlleva esta operación, que van desde la introducción al desarrollo del algoritmo, abordando además los distintos procesos de enseñanza aprendizaje de la división.

MARCO TEÓRICO

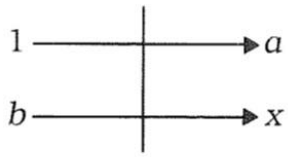
La Teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1997), nos permitió centrar la investigación en las actividades cognitivas que son desarrolladas por los estudiantes y presentadas en los libros de texto y programas de estudio. En efecto Moreira (2016) la define como una Teoría cognitiva Neo piagetana, en la cual afirma que los campos conceptuales son un conjunto de problemas y situaciones, la cual requiere de conceptos, procedimientos y representaciones distintas pero relacionadas entre sí.

Según Vergnaud existen tres grandes relaciones multiplicativas (relaciones que comparten una multiplicación o división) isomorfismo de medida, un solo espacio de medida y producto de medida. Hemos centrado nuestra investigación en los problemas de Isomorfismo de Medida, esta según Vergnaud (1997), pone en juego cuatro cantidades donde, en problemas más simples se conoce que una de las cantidades es igual a uno. Desde este punto de vista, encontramos tres tipos de problemas dependiendo del lugar de la incógnita (ver Figura 1).

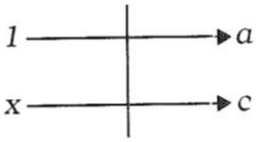
Figura 1.

Representación de los problemas de Isomorfismo de Medidas según Vergnaud (1998).

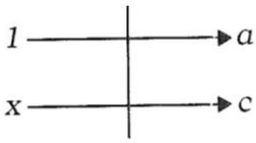
Multiplicación



División: búsqueda del valor unitario



División: búsqueda de las cantidades de unidades



Centraremos nuestro trabajo en la división, específicamente en la "búsqueda de las cantidades" (*división-partitiva)* y "búsqueda del valor unitario" (*división-medida)*, en el caso de la *división-partitiva* la correspondencia se realiza entre dos cantidades u objetos a diferencia de la *división-medida*, se refiere a problemas complejos, donde es necesario aplicar la regla de tres, es decir la correspondencia se da entre cuatro magnitudes.

ANÁLISIS DE DATOS

Para llevar a cabo este análisis hemos dividido los niveles en dos grupos, por un lado tenemos de 1° a 3° y luego de 5° a 6°, consideramos relevante enfocarnos en el primer grupo, ya que es en los primeros años de escolaridad donde se prepara el concepto de división como una acción innata de los seres humanos y específicamente en 3° básico, pues allí se introduce el concepto, es por esta razón que presentaremos algunos ejercicios presentados en los libros de texto, material que reciben los estudiantes al comenzar el año para el trabajo en el aula, ya que este material junto a los programas de estudios son los más usados por el profesorado para el desarrollo de sus clases y en muchos casos es el único que se utiliza. A continuación, se muestra la Tabla 1 que presenta las actividades presentadas en los libros de texto de 1° a 3°.

Tabla 1.

Actividades presentadas en los libros de textos en relación a la división de 1° a 3°básico.

Curso	Resta repetida o secuencias	Agrupar elementos	Repartir equitativamente	Algoritmo de la división	Interpretación del resto
3°	9	42	17	42	0

Fuente: Elaboración propia.

Por otra parte, mostraremos algunos ejemplos extraídos de los libros de textos, material es utilizado por los alumnos en las salas de clases para la adquisición de contenidos y desarrollo de habilidades para desenvolverse en una vida futura. Entre los ejemplos que señalaremos a continuación están relacionados con la estructura de isomorfismo de medida, según Vergnaud 1997, (*división-medida*, *división-partitiva* y *Regla de tres*), para ello comenzaremos con 3° básico. En cuanto a los problemas de *división-medida*, en 3° básico podemos encontrar ejemplos como el siguiente:

Ejemplo 1. Problema de división-medida (Urra et al., 2017, p. 278).

> b. La municipalidad de una comuna compró 45 contenedores de reciclaje y entregará 5 contendores por sector. ¿Para cuántos sectores le alcanzan los 45 contenedores?

Dentro de los problemas de regla de tres, en 3° básico hemos encontrado un solo problema, ejercicio que es muy poco común conseguir en las actividades a desarrollar por los estudiantes en los libros de texto, especialmente en los niveles más bajos concentrándose este tipo de actividad en los niveles superiores cuando se abordan las razones y proporciones.

Ejemplo 2. Problema de regla de tres (Urra et al., 2017, p. 199)

> a. Una ranita de Darwin se come 7 insectos cada tres minutos. ¿Cuántos se comerá en 15 minutos?

Además de los ejemplos anteriores hemos encontrado problemas en los que se utilizan elementos poco conocidos para los estudiantes, tal como lo muestra el ejemplo 3, el que se trata de una relación cuaternaria (1 frasco de peumo –3kg de mermelada, 27 frascos –x kg mermelada).

Ejemplo 3. Problema de multiplicación (Urra et al., 2017, p. 202).

> c. Para preparar mermelada se necesitan 3 kg de peumo por frasco. Si se completan 27 frascos de mermelada, ¿cuántos kilogramos de peumo se utilizaron?

Luego de haber realizado esta revisión minuciosa del libro de texto de 3° básico nos enfocamos en los tipos de estructuras de isomorfismo de medida, propuestos por Vergnaud (1997), para ello hemos realizado la Tabla 2 en la que se presenta otra clasificación por nivel, hemos comenzado desde 3° básico, nivel en cual se comienza a desarrollar el algoritmo de la *división*, arrojando lo siguiente:

Tabla 2.

Tipo de división según Vergnaud (1997).

Curso	Multiplicación	División-medida	División-partitiva	Regla de tres
3°	15	8	10	1

Fuente: elaboración propia.

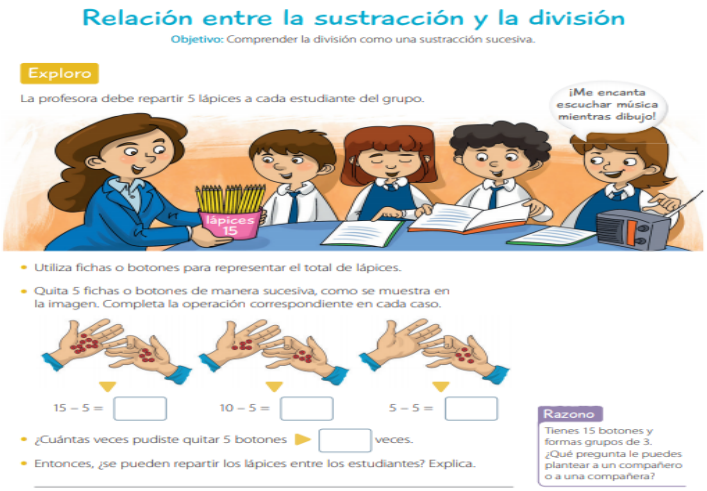
La Tabla 2 muestra que los libros de texto centran sus actividades principalmente en los problemas de multiplicación por sobre las actividades relacionadas con los tipos de *división*, en cuanto se refiere a los problemas de *división-partitiva* y *división-medida*, además cabe mencionar que en el caso de los problemas donde se trabaja la regla de tres son muy escasos y en algunos cursos son nulos.

Análisis para la propuesta curricular para tercero básico.

Con respecto al libro de texto sugerido por el Ministerio de Educación (Mineduc) para tercero básico (Urra et al., 2017), presenta la noción de *división* en la Unidad 2 y 3, cada una de las unidades está dividida en 5 y 4 temas respectivamente, encontrándose en el tema 3 la noción de *división* y en la tercera unidad en el tema 1. A continuación realizamos el análisis de las unidades en el cual se introduce la noción de *división*.

Figura 2.

Ejemplo de problemas tipo 1.

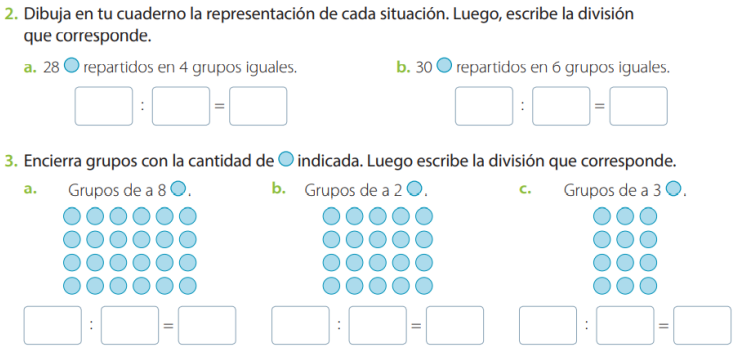


Fuente: Urra et al. (2017, p. 144).

Al observar la imagen nos podemos dar cuenta que los estudiantes al realizar estas actividades deben contar con el recordar *conceptos previos*, tales como la resta repetida, contar y agrupar elementos, que le sirven en la comprensión del problema, del mismo modo al desarrollar la actividad aparecerán *conceptos emergentes*, tales como repartir elementos de un grupo mayor, quitar de manera sucesiva, que le ayudarán en la resolución del problema, como por ejemplo: las *propiedades* que hemos identificado las que podemos visualizar en la Figura 4; el de la resta sucesiva, también se pueden representar en situaciones de reparto equitativo, quitando cada vez la misma cantidad al minuendo, contando cada una de las veces como el cociente de la *división*, en tanto en el algoritmo de la *división*, se presenta a través de la búsqueda del cociente con actividades de reparto equitativo y situaciones en las cuales se deben agrupar cantidades, como lo muestra las Figura 3.

Figura 3.

Ejemplo de problema tipo 3.



Fuente: Urra et al. (2017, p. 150).

Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas

La Tabla 3 nos muestra el resumen de las representaciones que se expresan en los distintos planteamientos de las actividades que se proponen en los libros de texto.

Tabla 3.

Representaciones previas y emergentes en los problemas de 3° básico.

Representación para la noción de división					
			División		
	Previos / Emergentes	Verbal	Concreta	Gráfica	Simbólica
División	Verbal		X		X
	Concreta			X	X
	Gráfica				X
	Simbólica				X

Fuente: Elaboración propia.

Como podemos visualizar en la tabla anterior, se distinguen tres tipos de representaciones en la que los estudiantes transitan desde las representaciones apoyados con material concreto (en poca medida) a expresar situaciones de manera simbólica (principalmente).

CONCLUSIONES

Luego de realizar una revisión acabada del libro de texto y programas de estudios de 3° básico, podemos concluir que, si bien la división es abordada en este nivel, las actividades que se desarrollan no se relacionan con contenidos a trabajar en el futuro, además de darle énfasis a la búsqueda del cociente con ejercicios de reparto equitativo por sobre los problemas de isomorfismo de medida.

REFERENCIAS

De Castro, C., y Escorial, B. (2007). Resolución de problemas aritméticos verbales en la educación infantil: Una experiencia de enfoque investigativo. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación*, Monografía IX, 23-47.

Aguayo-Arriagada, C.; Piñeiro, J.L., y Flores, P. (2016). La introducción a la división en educación primaria. Un análisis comparativo. En F.J. España (Ed.), *XVI Congreso De Enseñanza y Aprendizaje De Las Matemáticas* (pp. 283-292). S.A.E.M. THALES.

Gutiérrez, N., Morales, N., y Valdés, F. (2018). *Progresiones de aprendizaje en espiral en Matemática*, Ministerio de Educación de Chile.

Ivars, P., y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación Matemática, 28*(1), 9 – 38.

Maza, C. (1991). *Enseñanza de la Multiplicación y División*. Editorial Síntesis.

Moreira, M. A. (2016). A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações Em Ensino De Ciências*, *7*(1), 7–29.

Urra, A., Córdoba, C., y Quezada, C. (2017). *Texto para el estudiante. Matemática 3° básico*. Santillana Chile S.A.

Vergnaud, G. (1997). *El niño, la matemática y la realidad*. Trillas.

CUENTOS PARA EL DESARROLLO DE HABILIDADES MATEMÁTICAS Y DE LENGUAJE EN PRIMER AÑO BÁSICO

Javiera Garrido, Ilonka Medina, Daniela Rojas, Braulio Solar, Nielka Rojas

Universidad Católica del Norte.

javiera.garrido@alumnos.ucn.cl, ilonka.medina@alumnos.ucn.cl, daniela.rojas05@alumnos.ucn.cl, Braulio.solar@alumnos.ucn.cl, nrojas03@ucn.cl

Este estudio se centra en el diseño e implementación de cuentos para trabajar la estructura aditiva en primer año básico, fortaleciendo acciones elementales de conteo y sobre conteo previos al cálculo, mediante la articulación de las asignaturas de lenguaje y comunicación y matemática promoviendo habilidades en ambas asignaturas. Para efectos de esta investigación se presenta la metodología de diseño de los cuentos, contextualizados en la región de Antofagasta buscando plasmar el patrimonio social, cultural y humano de la región y presentando situaciones de interés para los estudiantes en el ámbito social, personal, público y educativo.

Cuentos matemáticos, Estructura aditiva, Números, Educación básica.

INTRODUCCIÓN

La prueba PISA se encarga de evaluar los sistemas de educación. Chile, según los resultados del año 2018, en el ámbito de lectura se encuentra en el nivel 2 con un puntaje de 452 puntos, mientras que en matemáticas se encuentra en el nivel 1 con 417 puntos, siendo el nivel 6 el más alto, rodeando los 680 puntos. Asimismo, en la encuesta sobre competencias de los adultos (PIAAC), aplicado por la OCDE en el 2016, se evidencia que el 53% de los chilenos no comprende lo que lee lo que afecta en las distintas áreas de su vida, inclusive en las operatorias matemáticas, resultando que un 62% de la población no sea capaz de razonar adecuadamente problemas matemáticos. Esta problemática demuestra que hoy en día las personas no están adquiriendo las competencias básicas necesarias para desenvolverse de manera adecuada en la sociedad actual (Mineduc, 2016), siendo una tarea fundamental trabajar desde edades tempranas.

El cuento infantil es un mediador didáctico fundamental en el aprendizaje, que facilita la transmisión de mensajes simbólicos de una manera lúdica y entretenida, al tiempo que estimula su curiosidad e imaginación, elementos que podemos considerar fundamentales para el aprendizaje de los contenidos relacionados con las disciplinas científicas, ya que se puede trabajar a través de la indagación (Bevins y Price, 2016).

Trabajar la estructura aditiva, a través de cuentos, puede llevar a desarrollar las habilidades interrelacionadas que propone el currículo nacional en la enseñanza de la matemática y lenguaje, como también comprender y disfrutar obras de la literatura, narradas o leídas por un adulto, comprender textos orales y disfrutar de la experiencia para ampliar sus posibilidades de expresión, desarrollar su creatividad y familiarizarse con el género (Bases Curriculares, 2013). A partir de la implementación de los cuentos en el aula se busca comprender el comportamiento de la metodología de narraciones de cuentos centrados en conceptos matemáticos, para evaluar su funcionalidad como herramienta metodológica de enseñanza, promoviendo la idea de que las narraciones permiten el desarrollo interdisciplinar de los objetivos de aprendizajes.

REFERENTES TEÓRICOS

De acuerdo con el autor clásico Imbert (1979) la palabra cuento procede del contar y es probable que, a raíz del enumerar objetos, se haya evolucionado al relatar sucesos importantes que forman parte de nuestro cotidiano. El cuento posee un carácter lúdico que resulta ser una buena herramienta para el desarrollo lingüístico, social y psicomotor (Gutiérrez, 2017).

Al utilizar los cuentos como recurso didáctico, acercamos el conocimiento matemático a niños y niñas, disminuyendo el impacto que conlleva el cambio de la enseñanza parvularia a la enseñanza básica, al trabajar de manera interdisciplinaria y con foco en la adquisición de habilidades. La narración de cuentos puede utilizarse para que los estudiantes comprendan el mundo que los rodea, así lo mencionan Arancibia y Rojas (2018) quienes indican que los cuentos, a través de los personajes, pueden ayudar a los estudiantes a comprender conceptos abstractos como el amor, el miedo y a su vez, conceptos matemáticos complejos como composición y descomposición numérica, lateralidad, entre otros. Así mismo, Marín (2021) señala que el cuento dado sus personajes reconocibles, su forma lingüística que se adquiere naturalmente, es un potencial pedagógico que fomenta la imaginación y la capacidad de abstracción, habilidades necesarias tanto para literatura como para la matemática.

En este trabajo interesa desarrollar las habilidades descritas por PISA a través de los cuentos, atendiendo a cuatro diferentes situaciones o contextos, personal, público, laboral y educativo, los cuales pueden ser desarrollados a través de diferentes tipos de narraciones orales o escritas, como lo es el cuento. La clasificación de estos contextos responde a competencias en relación directa con la solución de problemas de la vida práctica, y para ello es fundamental la capacidad de comprender las funciones y circunstancias a que se refieren los materiales que se leen, siendo el cuento un medio para este propósito, que, de forma articulada, permite dar significado y sentido a saberes específicos.

Para efectos de este estudio se profundizó en los contenidos del currículo nacional mediante un análisis curricular, el cual, permitió diseñar narraciones orientadas a los contenidos para primer año básico en relación a la estructura aditiva, focalizándonos en el sobre-conteo, estrategias de conteo uno a uno, por grupo; con el objetivo de comparar, ordenar, igualar y comunicar para llegar a la cantidad, y así establecer que para calcular se debe dar una relación directa entre cantidades, previo al algoritmo de la suma.

METODOLOGÍA DEL ESTUDIO

Esta investigación se focaliza en un diseño mixto, metodología que combina la perspectiva cualitativa y cuantitativa, con el objetivo de analizar en profundidad el problema de investigación (Cohen et al., 2017). En este caso, se busca diseñar, implementar y evaluar los cuentos matemáticos.

Dada la naturaleza de nuestra investigación, los sujetos informantes corresponden a 150 estudiantes de primer año básico de entre 6 y 7 años, pertenecientes a escuelas de la comuna de Antofagasta. Siendo las escuelas los lugares de práctica que los investigadores tienen asignados en el presente año.

La recogida de información se realiza a partir de un pre-test y un pos-test. El primero permite medir los conocimientos previos de los contenidos que abordan los cuentos creados, para luego proceder con la lectura; el segundo instrumento permite verificar si lograron vincular sus conocimientos previos con los contextos matemáticos presentes en cada narración. El análisis del impacto de los aprendizajes se realiza a través de una prueba T-Student.

Los siete cuentos matemáticos diseñados para el fortalecimiento de habilidades de matemáticas se relacionan con la estructura aditiva y del lenguaje de primer año básico, además de trabajar contextos extracurriculares, como se ilustra en la Tabla 1.

Tabla 1.

Clasificación y características de los cuentos matemáticos elaborados.

Título	Tema matemático	OA Matemática	OA Lenguaje	Tipo de cuento	Contexto extracurricular	Estructura interna	Contexto PISA	Elementos
Conociendo Antofagasta	Estrategia para contar (uno a uno o grupo)	OA 01 OA 02 OA 09 OA 17	OA 06 OA 08 OA 09 OA 11 OA 18	Fantástico	Valoración del patrimonio	Inicio Desarrollo Final	Personal Social	Personajes Acción Ambiente Narrador
La aventura del Capitán Jack Pez IV	Estrategia para contar (dos, o tres grupos)	OA 01 OA 02 OA 07 OA 09 OA 17		Fantástico	Conciencia Ecológica Necesidades educativas especiales		Educativo	
El ave del desierto	Sobre conteo	OA 01 OA 02 OA 03 OA 09 OA 17		Fantástico	Valoración del patrimonio		Personal Público	
El carnaval	Calcular	OA 01 OA 02 OA 09 OA 17		Cotidiano	Nacionalidad		Personal Público	
El camino hacia las golondrinas	Problemas de cambio	OA 01 OA 02 OA 04 OA 09 OA 17		Fantástico	Negligencia Parental		Personal Público	
Ribox: Un juego diferente	Sumar parte/ todo	OA 01 OA 02 OA 04 OA 09 OA 17		Fantástico	Diferencias socioeconómicas Necesidad		Personal Público	

					es educativas especiales		
Un paseo extraplanetario	Problemas de combinación	OA 01 OA 02 OA 09 OA 17		Fantástico	Apariencia física		Personal Público

RESULTADOS PRELIMINARES

Los resultados obtenidos en los test inicial y final son sometidos a una Prueba de Significancia T-Student con un porcentaje máximo de confianza, el cual permite concluir si la media de la diferencia entre resultados del test final y el test inicial es positiva, y con ello hay movilidad en el aprendizaje de los estudiantes por medio del uso de cuentos matemáticos. El estudio se encuentra en fase de implementación, para el caso del primer cuento "Conociendo Antofagasta", aplicándose a un curso de primer año básico de 35 estudiantes, se han obtenido lo siguiente. Concluimos de la implementación del cuento que un 78% de los estudiantes obtiene una diferencia positiva de puntaje por medio de la aplicación de los contenidos de contar uno a uno los monumentos a través de la lectura cuento en el test final. Asimismo, el promedio de puntajes en el test inicial es de 72,83 puntos, y el del test final es de 90,4 puntos. Al realizar el análisis de resultados, mediante la prueba de significancia, se obtiene que el valor del estadístico de prueba es de 2,98; y al ser mayor que valor crítico de una cola de 1.73, se rechaza la hipótesis nula (diferencia de medias muestrales negativa o nula) y se acepta la hipótesis alternativa, que indica que la diferencia de medias entre ambos test es positiva para toda la población en estudio. Esto permite concluir con una significancia de 0,0041 (99,58% de confianza) que el proceso realizado con el cuento Conociendo Antofagasta indica una mejoría del rendimiento de los estudiantes. Este cuento que se presenta en contexto personal y social para el estudiante lleva a potenciar las habilidades de representar cantidades entre 0 y 20, y comunicar resultados en término al contexto de la narración, siendo un articulador para el desarrollo de las habilidades del lenguaje como escuchar, leer y escribir. Además, el cuento lleva a una valoración del patrimonio local, evidenciando que a partir de la lectura y presentación de imágenes los estudiantes muestran mayor interés por conocer otros lugares de la región.

REFLEXIONES Y CONCLUSIONES

El trabajo realizado para llevar a cabo esta metodología ha empleado un sistema de creación global que permite la aplicación de cuentos como metodología de enseñanza en matemáticas, en diversos contextos, proporcionando una nueva experiencia de aprendizaje utilizada en lenguaje que puede ser extrapolada a matemáticas a través de un recurso educativo poco explorado en un área que fomenta las habilidades de resolver problemas y representar. El cuento constituye un elemento motivador en el aula, generando una actitud más favorable en los estudiantes de cara a las matemáticas y facilitando la comprensión de conceptos abstractos (Blanco y Blanco, 2009). Asimismo, los cuentos provocaron una alta motivación en los estudiantes, generando una actitud positiva frente a la comprensión de conceptos abstractos en matemáticas. Como recoge Marín (2007), las competencias lectora y matemática pueden ser desarrolladas conjuntamente, mediante el recurso literario como lo es el

cuento. Para ello, es necesario que el profesor brinde espacio a la metodología como recursos de enseñanza, presentando narraciones que estimulen diferentes formas de pensamiento matemático y, sobre todo, unos estudiantes dispuestos a aprender disfrutando de forma global.

REFERENCIAS

Arancibia, A., y Rojas, N. (2018). *Cuentos de Matelandia*. Universidad Católica del Norte-Ministerio de Educación.

Blanco, B., y Blanco, L. J. (2009). Cuentos de Matemáticas como recurso en la Enseñanza Secundaria Obligatoria. *Innovación Educativa*, 19, 193-206.

Bevins, S., y Price, G. (2016). Reconceptualising inquiry in science education. Sheffield Hallam University Research Archive. *International Journal of Science Education*, 38 (1), 17-29.

Chávez O., L., y Díaz G., P. (2013). *Guía de aprendizaje N°2 Literatura: Mil identidades posibles*. Ministerio de Educación de Chile.

Cohen, L., Manion, L., y Morrison. K. (2017). *Research Methods in Education*. Routledge.

Gutiérrez, S. (2017). Los Cuentos en la Educación Infantil: Los Cuentacuentos. ICB, SL (Interconsulting Bureau SL).

Imbert, E. A. (1979). *Teoría y técnica del cuento*. Ediciones Marymar.

Marín, M. (2021). *Pensamiento matemático y cuento en la educación infantil*. SIGMA.

Marín, M. (2007). Contar las matemáticas para enseñar mejor. Matematicalia. *Revista Digital de Divulgación Matemática de la Real Sociedad Matemática Española*, 3, 4-5.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2012). *Bases Curriculares para la Educación Básica*. Autor

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2016). Competencias de la población adulta en Chile: Resultados PIAAC Evidencia nacional e internacional para la Reforma en marcha. Autor.

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN DE NÚMERO MIXTO Y FRACCIÓN IMPROPIA A TRAVÉS DE REGULARIDADES

Evelyn Huaracán Pichún, Roberto Vidal Cortés

Universidad Alberto Hurtado

ehuaracanp@gmail.com, rvidal@uahurtado.cl

La enseñanza tradicional del concepto de fracción como relación parte – todo y las actividades que privilegian los procedimientos y algoritmos, impide la construcción de noción de fracciones mayores a la unidad. Este estudio de carácter cualitativo-interpretativo busca diseñar y evaluar una propuesta didáctica basada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico para estudiantes entre 9 y 10 años que permita conceptualizar la noción de número mixto y fracción impropia partiendo de la búsqueda de regularidades, utilizando fracciones unitarias (egipcias) desde su faceta de medida, como razón de ser, lo que permite una comprensión de estos conceptos a partir de problemas.

Fracción unitaria, Fracción impropia, Número mixto, Regularidades, Teoría antropológica de lo didáctico.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza - aprendizaje de la matemática debe contribuir al desarrollo de capacidades de comunicación, razonamiento y abstracción impulsando a los estudiantes al desarrollo del pensamiento intuitivo, de manera que la reflexión sistemática sea un aporte a la comprensión de la realidad y la resolución de problemas. Así, el objetivo fundamental del acto educativo es la formación de personas matemáticamente competentes. Según Alsina (2010), esta persona es capaz de pensar matemáticamente construyendo el conocimiento en situaciones con sentido, de comunicarse tanto escrita como oralmente y tomando las herramientas que la matemática le provee (uso de símbolos, operatoria, etc.) utilizando como habilidad fundamental el proceso de generalización a través del pensamiento inductivo, es decir, pasar de lo particular a lo general y ver lo general en lo particular.

ANTECEDENTES

El aprendizaje de las fracciones es dificultoso (Fazio y Siegler, 2013), muestra de ello es que el 50% de los estudiantes estadounidenses son capaces de ordenar tres fracciones de menor a mayor; panorama similar en países con mejores resultados en evaluaciones internacionales. Campos y Llinares (2015), evidencian que en un grupo de estudiantes brasileños de 9 a 12 años el 93% de ellos logra comprender la fracción unitaria, el 92,7% comprende las fracciones no unitarias menores a uno y el 49,1% comprende las fracciones impropias. En Chile, los resultados del Simce de Matemática 2018 de II medio evidencian que un tercio de los estudiantes aún no consolida la comprensión del concepto ni operatoria; los estudiantes operan los términos de la fracción como números independientes y realizan procedimientos que implican sumar o restar directamente numeradores y denominadores.

Freudenthal (1983), plantea que las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional y describen una variada interpretación dados los usos presentes en la vida cotidiana. Llinares y Sánchez

(1997), consideran las fracciones como un mega-concepto del cual se desprenden 4 interpretaciones que hacen significativa la noción de fracción de acuerdo al contexto de uso:

1. **La relación parte - todo y la medida**, es decir cuando un "todo" correspondiente a la unidad que puede ser continuo o discreto, se divide en partes equivalentes en superficie o cantidad de objetos.
2. **La fracción como cociente**, asociado a la operación de dividir un número natural por otro.
3. **La fracción como razón**, las fracciones son un comparador entre dos cantidades de una magnitud.
4. **La fracción como operador**, la fracción actúa como un transformador: "algo que actúa sobre una situación y la modifica" a través de las operaciones de multiplicación y división.

Para estructurar modelos de enseñanza con los cuales se favorezca la constitución de mejores objetos mentales se requiere contar con una fenomenología didáctica rica del concepto fracción. Sin embargo, a pesar de las múltiples interpretaciones que presenta el concepto, su enseñanza presenta una visión centrada en la interpretación del constructo parte – todo (Freudenthal, 1983). Esta interpretación, supone limitaciones tanto fenomenológicas como didácticas puesto que solo produce la construcción de las fracciones propias, sin embargo, ¿cómo la faceta parte-todo influye en la conceptualización de las fracciones impropias y números mixtos?

Fandiño (2009), evidencia que si bien teóricamente siempre es posible dividir un entero en *n*-partes, desde lo cotidiano pierde su significado intuitivo cuando se plantean situaciones en que las fracciones son mayores a la unidad, obstaculizando la construcción de las fracciones impropias y números mixtos. Cortina et al. (2013), describe tres imágenes que se espera que los estudiantes desarrollen en relación al constructo parte - todo, sin embargo, obstruyen una noción madura de las fracciones:

- Fracción como resultado de transformar un objeto: el objeto es susceptible de ser partido fácilmente y que la fracción unitaria es el producto de la partición.
- Fracción como tantos de tanto: los estudiantes interpretan el numerador y denominador como números que expresan el resultado de un conteo, desarrollando una idea de adición por sobre la multiplicativa.
- Fracción como incluida en un entero: esta idea promueve que una fracción es algo que necesariamente está incluida en un entero.

Buforn y Fernández (2014) manifiestan que "la idea de unidad es clave para el desarrollo de la comprensión de fracciones" (p. 491) proponiendo la gestión de situaciones de aprendizaje que promuevan el uso de "fracciones como unidades iterativas", con el propósito de que puedan recurrir a la fracción unitaria para iterar más allá del todo y permita contar, de esta manera construir la noción de fracción impropia. Tzur (1999) y Olive y Steffe (2002) (citado en Campos y Llinares, 2015) establecen que las operaciones de dividir (esquema de partición equitativa) e iterar (esquema partitivo unitario) son aspectos claves en la construcción de fracciones impropias.

Maza (2010) propone que la construcción de la noción de fracción impropia y números mixto deben proceder de las acciones de reparto o bien de acciones de medida. Esta última implica repetir una unidad varias veces hasta completar aquella cantidad que deseamos medir.

Campos y Llinares (2015) plantean que los estudiantes son capaces de distribuir el todo en partes congruentes, reconocer la fracción unitaria y relacionarla con el todo, pero no logran coordinar las acciones para la construcción de fracción impropia. Es por ello que los autores ponen de manifiesto dos saltos cognitivos para la construcción de la fracción impropia: a) La reconstrucción y representación del todo y b) la representación de fracciones impropias a partir de la fracción unitaria.

Entendemos la fracción unitaria como aquella fracción que se puede expresar de la forma $\frac{1}{n}$, donde n es un número natural no nulo. Esta idea remonta del 1650 a.C en Egipto; ellos construyeron su sistema fraccionario a partir de las "fracciones de unidad" derivado de situaciones de reparto igualitarios de las cuales se desprenden las siguientes consideraciones:

> a) la suma de fracciones unitarias indica la cantidad de magnitud medida con la unidad inicial que le corresponde a cada individuo involucrado en el reparto. b) los repartos se realizan por el procedimiento de dar a cada participante unidades enteras: si ello no es posible se dividen las unidades en partes iguales de manera tal que cada participante reciba una de esas partes (Gairín, 2001 p.662).

PROBLEMÁTICA

Espinoza et al. (2011), da cuenta que en la educación básica chilena existe un escaso desarrollo de la actividad matemática, dado que las tareas de aprendizaje propuestas son aisladas, rutinarias y no generan la necesidad de recurrir a un conocimiento matemático nuevo. Además, en cuarto año básico, el estudio de las fracciones solo hace referencia al constructo parte – todo y, en quinto año básico los profesores continúan con el modelo de área de figuras geométricas, sin cobrar relevancia la magnitud de las partes, por tanto, la tarea del estudiante consiste en realizar un doble conteo de números naturales: contar el total de las partes y las partes pintadas (Salazar, 2015) continuando en otros niveles con los procedimientos y algoritmos para realizar ejercicios. Dado lo expuesto anteriormente, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué actividades matemáticas permiten modelizar en el aula la construcción de la noción de número mixto y de fracción impropia?

En relación a lo expuesto anteriormente nos propinemos como objetivo diseñar y evaluar una propuesta didáctica basada en el trabajo con regularidades para construir las nociones de: fracción impropia y número mixto.

MARCO REFERENCIAL Y METODOLÓGICO

Esta propuesta se basa en la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD) de Chevallard (1999), la cual sitúa la actividad matemática en el conjunto de actividades humanas que pueden ser modelizadas a través de praxeologías (praxis + logos), es decir, lo referente al saber y al saber hacer. Para efectos de esta investigación, se consideran en la organización matemática los conceptos de: tareas, técnica y tecnología. En lo relacionado con el desarrollo temporal de la actividad matemática, se consideran los momentos didácticos: a) Primer momento (momento de encuentro con la organización matemática) b) Momento exploratorio (trabajo con la tarea e implementación de una técnica) c) Trabajo de la técnica (dominar, explicitar, realizar variaciones y producir nuevas técnicas de resolución) y d) Institución y evaluación (regulación del aprendizaje, donde se precisa la organización matemática estudiada)

En el aspecto metodológico, la investigación es de corte cualitativo fundamentalmente descriptivo-interpretativo. Se consideran elementos para la realización de una micro- ingeniería didáctica:

a) Análisis preliminares: Levantar un catastro de las formas en que se introducen las fracciones impropias y números mixtos en libros de texto escolar de enseñanza básica, así como también realizar una revisión bibliográfica de las propuestas de enseñanza desde la didáctica de la matemática.

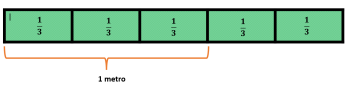
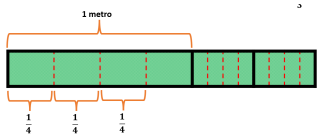
b) Concepción y análisis a priori: Diseño de una organización didáctica que promueva la modelización del concepto fracción impropia y número mixto a partir del análisis de regularidades que emergen desde el trabajo con la fracción unitaria.

c) Experimentación: Implementación de la propuesta con estudiantes de 9 a 10 años de un colegio particular subvencionado gratuito de la comuna de Limache, Valparaíso.

d) Análisis a posteriori y validación: Confrontación de las ideas del análisis a priori para la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

Tabla 1.

Propuesta preliminar de organización matemática.

Propuesta preliminar de Organización matemática		
Tarea ***Actividades o problemas propuestos por el profesor.***	Técnica *Saber-hacer de una determinada tarea.*	Tecnología *Discurso racional sobre la técnica que permite justificarla.*
Un conejo dio 3 saltos de $\frac{3}{4}m$. **¿Cuántos metros saltó el conejo?**		• Iteración de la fracción $\frac{1}{4}$. • Completación de la unidad. *"Yo sé que un metro se forma con* $\frac{4}{4}$*"* • Suma de fracciones unitarias.
	$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\boxed{\frac{9}{4}}$ ⇒ $\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{1}{4}$	• Suma de fracciones de igual denominador. • Completación del entero.
La cinta verde mide $\frac{5}{3}$ m. **a) Representa 1metro.** **b) Dibuja una cinta de $\frac{3}{4}m$.**	**a)**  **b)** 	• (A) Iteración de la fracción unitaria hasta completar la unidad. • (B) Fracciones equivalentes. (Amplificar y simplificar 1/3 para construir la fracción ¼) • Iteración de la fracción ¼ para construir ¾.

CONCLUSIONES PRELIMINARES

La investigación es un trabajo de magíster en pleno desarrollo, se plantean las siguientes ideas como conclusiones preliminares:

- La propuesta busca desarrollar en los estudiantes la resolución de problemas utilizando modos razonados de pensar, brindando la oportunidad a los estudiantes para que realicen conexiones entre los conceptos involucrados en la conceptualización de las fracciones.
- La fracción unitaria y la relación de ellas con el entero, permite que los estudiantes puedan realizar generalizaciones y trasladarlas a diversas situaciones contribuyendo así a la formación de personas matemáticamente competentes.
- La conceptualización de las fracciones impropias a partir de la iteración de la fracción unitaria en un contexto de medición, permite establecer una fracción como una magnitud y no solo como números independientes que entregan información de un conteo.

REFERENCIAS

Alsina, Á. (2010). La "pirámide de la educación matemática": una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, 189, 12-16.

Buforn, Á., y Fernández, C. (2014). La coordinación de la idea de unidad en la representación de fracciones impropias. En Á. Buforn y C. Fernández (Eds.), *XV Congreso De Enseñanza Y Aprendizaje De Las Matemáticas* (pp. 491-500). S.A.E.M. THALES.

Campos, R., y Llinares, S. (2015). Características de la construcción de la fracción impropias en estudiantes de 9-12 años. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, 8*(4), 95 – 114.

Cortina, J., Zúñiga, C., y Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática*, *25*(2), 7-29.

Espinoza, L., Barbé, J., y Gálvez, G. (2011). Limitations in the development of the mathematical activity in primary school: the case of the school arithmetic. *Estudios Pedagógicos XXXVII*, 37(1), 105-125.

Fandiño, M. (2015). *Las fracciones: Aspectos conceptuales y didácticos*. Magisterio Editorial.

Fazio, L., y Siegler, R. (2010). *Enseñanza de las fracciones*. Serie prácticas educativas-22.

Gairín, J. (2001). Una interpretación de las fracciones egipcias desde el recto del papiro de Rhind. Llull: *Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, *24*(51), 649-684.

Llinares, S., y Sánchez, M. (2000). *Fracciones*. Ed. Síntesis.

Maza, C. (2010). *Matemáticas generales para maestros*. Autor.

Pruzzo, V. (2012). Las fracciones: ¿Problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza? *Revista Pilquen 14*(8), 1-14.

Salazar, M.; Martinic, S., y Maz, A. (2015). El lenguaje, modelos y representaciones utilizados por los maestros de 5° de primaria, en la enseñanza de la fracción. En P. Scott y Á. Ruiz (Eds.) *XIV Conferencia Interamericana de educación matemática.* CIAEM.

COMPRENSIÓN DE LA SUMA DE NÚMEROS RACIONALES EN QUINTO GRADO DE PRIMARIA. UNA PROPUESTA MEDIANTE UNA SECUENCIA LIGADA A LAS DIFICULTADES ASOCIADAS

Miguel Gálvez Salas

Universidad Autónoma de Zacatecas

miguelgalvez01@hotmail.com

La presente investigación pretende abonar a la profesionalización docente mediante el diseño de un secuencia de aprendizaje encaminada a la comprensión de la suma de números racionales, la cual es diseñada a partir de dificultades que presentan los estudiantes en dicho contenido evidenciadas por autores como Cid et al. (2004), Castaño y García (20014), Barragán y Murillo(2018), González-Forte et al. (2019) y Santos(2019), tratando de que se genere un vínculo escuela- comunidad por medio de actividades contextualizadas. Dado el interés por generar una secuencia didáctica, este trabajo se pretende elaborar basado el aprendizaje significativo interviniendo en el grupo por medio de investigación acción. Una secuencia didáctica contextualizada, documentada, y mejorada puede favorecer la comprensión de la suma y resta de números racionales en primaria ligando los objetivos de esta con las diferentes dificultades encontradas en la literatura.

Suma de fracciones, Dificultades, Secuencia didáctica, Comprensión.

INTRODUCCIÓN

En educación primaria la asignatura de matemáticas representa un área de oportunidad debido a que es una de las materias que tienen un bajo aprovechamiento académico. A pesar de los esfuerzos realizados por los docentes e instancias educativas por una mejora en los aprendizajes, los problemas de enseñanza-aprendizaje persisten.

En las escuelas primarias se percibe una preocupación por parte de docentes y padres de familia en relación con el aprendizaje de los alumnos respecto a los contenidos de mayor complejidad como son los números racionales.

El aprendizaje de los números racionales representa un reto para los docentes debido a que existe un alto número de dificultades, evidenciadas por los profesores y por diferentes investigaciones. Diversos estudios reportan dificultades en los estudiantes respecto a la comprensión o entendimiento del concepto fracción (Butto, 2013; Acevedo et al., 2013; Coronado, 2016) así como en su operatividad de las fracciones (Cid et al., 2004; Castaño y García, 2014; Córdoba, 2017; González-Forte et al. 2019; Reinhold et al. 2020) otros investigadores centran su atención en la resolución de problemas con fracciones (Castaño y García, 2014; Rojas et al., 2015; Santos 2019), otras tienen como foco de interés a los estudiantes y realizan diversas estrategias y secuencias para tratar de mejorar el desempeño de los estudiantes (Fuentes 2010; Agusajo, 2017; Valencia 2017; Gil, 2018; Barragán y Murillo 2018).

Por lo anterior, la pregunta de investigación que se plantea es: ¿Qué elementos debe contener una secuencia didáctica para que promueva la comprensión de las operaciones de suma y resta de números racionales en estudiantes de primaria? El objetivo general del estudio consiste en integrar y aplicar

una secuencia didáctica que favorezca el aprendizaje de la suma y resta de fracciones en alumnos de educación primaria. Los objetivos particulares son:

- Documentar diferentes estrategias de comprensión de suma y resta de fracciones.
- Implementar un diagnóstico para conocer los conocimientos de los estudiantes referentes a las fracciones.
- Buscar actividades que tomen como base las dificultades reportadas en el tema de suma y resta de números racionales en alumnos de primaria.
- Integrar una secuencia didáctica con aquellas actividades tendientes al logro de los objetivos propuestos en bloques del plan de estudios regidos por las fases del aprendizaje significativo.
- Establecer la mecánica de interacción secuencia-alumnos-maestro.
- Aplicación y análisis de la secuencia diseñada para la formulación o reformulación de la subsecuente etapa.
- Análisis conjunto de las aplicaciones realizadas.

MARCO TEORICO

Aprendizaje significativo

El aprendizaje significativo se sustenta en el descubrimiento que hace el aprendiz, el mismo que ocurre a partir de los llamados desequilibrios, transformaciones, lo que ya se sabía; es decir, un nuevo conocimiento, un nuevo contenido, un nuevo concepto, que están en función a los intereses, motivaciones, experimentación y uso del pensamiento reflexivo del aprendiz (Ausubel,1983). De acuerdo con Romero (2009), el aprendizaje significativo se desarrolla a partir de dos ejes elementales: la actividad constructiva y la interacción con los otros.

Según Pérez (2006), algunas ventajas del aprendizaje significativo son:

- Se reconstruyen los esquemas cognitivos de quien aprende.
- La información que se asimila se retiene por más tiempo.
- Favorece la adquisición de nuevos conocimientos que puedan estar relacionados con los anteriormente asimilados.
- Estimula el interés del educando por lo que aprende, el gusto por el conocimiento que la escuela le ofrece.
- Permite el crecimiento cognitivo del que aprende.

Díaz-Barriga y Hernández (2002) sugieren acciones que el docente puede implementar para lograr un aprendizaje significativo con sus alumnos:

- Presentar los contenidos siguiendo una secuencia lógica y psicológica apropiada.
- Delimitar intencionalidades y contenidos de aprendizaje en una progresión continua que respete niveles de inclusividad, abstracción y generalidad.

- Activar los conocimientos y experiencias previas que posee el alumno.
- Establecer puentes cognitivos para orientar al alumno a detectar las ideas fundamentales, a organizarlas e interpretarlas significativamente.

En este sentido la elaboración de la primera secuencia de aprendizaje tomará como base los aprendizajes que los alumnos tienen, la segunda secuencia retomara lo que se aprendió en la primera y así sucesivamente hasta la cuarta secuencia. Además, se pretende que los desafíos a los que se enfrenten los alumnos sen con base en escenarios reales y por ende significativos.

La fracción en primaria, libros de texto y planes de estudio.

El plan y programas de estudio 2011 de quinto grado propone el siguiente enfoque: "utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados" (SEP, 2011, p. 67).

Además, plantea trabajar fracciones con los aprendizajes esperados "Resuelve problemas que implican sumar o restar números fraccionarios con igual o distinto denominador." Y "Usa fracciones para expresar cocientes de divisiones entre dos números naturales" (SEP, 2011, p. 79).

El plan de estudios 2011 propone que se utilicen secuencias de situaciones problemáticas para la enseñanza de las matemáticas en quinto grado de primaria, pero únicamente aparecen dos aprendizajes relacionados con la enseñanza de fracciones en su maya curricular además de estar desfasado (alineados contenidos del libro y lo que marca el PES 2011) de los libros de texto que se trabajan en quinto grado de primaria.

Por su parte, el plan de estudios 2017, Aprendizajes clave para la educación, definen el pensamiento matemático como "la forma de razonar que utilizan los matemáticos profesionales para resolver problemas provenientes de diversos contextos ya sea que surjan en la vida diaria, en las ciencias o en las propias matemáticas" (SEP, 2017, p. 212).

El enfoque menciona que la resolución de problemas es tanto una meta de aprendizaje como un medio para aprender contenidos matemáticos y fomentar el gusto con actitudes positivas hacia su estudio, se busca que estudiantes usen de manera flexible conceptos, técnicas, métodos o contenidos en general y desarrollan procedimientos de resolución que no necesariamente les han sido enseñados con anterioridad.

Marco teórico matemático

El libro de texto para el maestro de tercer grado de primaria que es donde se aborda por primera vez el tema de fracciones menciona que: "Desde el inicio se debe buscar que los alumnos perciban que las fracciones son números que nos permiten expresar cantidades no enteras" Además de forma indirecta propone trabajar desde la noción de fracción parte todo ya que menciona que: "1/2 equivale a la mitad de un conjunto de cosas consideradas como un todo, ya sea un litro, una tira de madera, una cantidad de dinero, una galleta, un conjunto de canicas, etcétera" (SEP, 2014, p. 102).

Los números racionales son las fracciones que pueden formarse a partir de números enteros y pertenecen a la recta real. En otras palabras, los números racionales son números reales que pueden

reescribirse como la fracción de dos números enteros porque se conocen tanto el numerador como el denominador (Pérez et al., 2014).

Por su parte, Fandiño (2015) describe el concepto de fracción, mencionando que no es conveniente dar una definición definitiva de fracción ya que detrás del término se esconden varias acepciones y esto genera confusión: "se pretende dar una "definición" inicial definitiva de este objeto, pero esta elección luego no tiene la fuerza para satisfacer todos los significados que el término asumirá en el curso de los estudios" (p. 25).

METODOLOGÍA

La naturaleza de esta investigación se define como descriptiva, ya que se aborda una problemática de la que ya existen propuestas de mejora en el aula. Una investigación de tipo descriptiva busca especificar propiedades y características importantes de cualquier fenómeno que se analice. Describe tendencias de un grupo o población (Hernández et al., 2014).

El enfoque que se implementa es el cualitativo, ya que se describe de manera minuciosa hechos, comportamientos, interacciones que los participantes del estudio experimentan. Castaño y Quecedo (2003), el enfoque cualitativo produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable.

El método que se empleará es la investigación-acción participativa, ya que después de la realización de la secuencia se contempla una implementación de ésta, de tal forma que se analicen los resultados obtenidos y con las áreas de oportunidad se pretende rediseñar una secuencia de tal manera que se pueda ir mejorado de forma paulatina.

La investigación es realizada con alumnos de quinto grado de educación primaria, entre 10 y 11 años, de la Escuela Primaria "Niños Héroes" de Fresnillo, Zacatecas. El instrumento para obtener información constará de actividades didácticas que se llevaran a cabo en sesiones. Cabe destacar que el grupo muestra que se eligió es con el que se trabaja actualmente, además la temática abordada coincide con el grado.

De acuerdo con Ausubel (1983) es importante saber los conocimientos que el estudiante tiene para poder trabajar lo que se dese enseñar, en ese sentido se aplicó un diagnóstico que evidencio las siguientes dificultades en los estudiantes:

- Consideran que entre más grande sea el numerador mayor será la fracción.
- No identifican las múltiples representaciones que tiene un número racional.
- Invierten fracciones impropias para operarlas como propias.
- Desconocen que las fracciones pueden formar enteros.
- La mayoría no encuentra la relación entre fracciones equivalentes.
- La mayoría de los alumnos no logra sumar fracciones propias o impropias.
- No logran resolver problemas con suma de fracciones. Santos (2019).

RESULTADOS PRELIMINARES

Se aplicó un diagnóstico para saber el conocimiento de los estudiantes referentes a comprensión de suma de fracciones, así como comparación y representación de éstas, los resultados obtenidos demuestran que los alumnos tienen dificultades latentes principalmente aquellas que están asociadas a que aplican inapropiadamente el conocimiento de los números naturales a los racionales.

Se retomaron las dificultades presentes en los alumnos, se diseñó una primera secuencia didáctica la cual tiene por objetivo: Ayudar a los estudiantes a comprender las fracciones propias donde a<b, impropias donde a>b, aparentes donde a=b y fracciones equivalentes donde $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Se espera que la secuencia permita ir sentando las bases de una comprensión. Posteriormente se espera realizar dos secuencias más las cuales retomaran las áreas de oportunidad que se pudieran presentar en la primera secuencia de tal forma que sea más enriquecedora. Y permita lograr que los alumnos comprendan y resuelvan problemas de suma de fracciones.

REFLEXIONES

Los estudiantes de primaria presentan dificultades en los contenidos de números racionales, incluido la suma de fracciones, a pesar de ser un tema en el que se han realizado bastantes aportes. Derivado de esto se espera que las secuencias didácticas para que los alumnos comprendan la suma y resta de fracciones sirvan como herramienta a docentes frente a grupo para mejorar los aprendizajes de los estudiantes.

REFERENCIAS

Ausubel, D. P. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo* (2a. ed.). Trillas.

Butto, C. (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes. *Revista Iberoamericana, 15*(1), 33-45.

Castaño–Arbeláez, N. M., y García-Castro, L. I. (2014). Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria. *Magistro, 8*(16), 123-158.

Castaño-Garrido, C., y Quecedo-Lecanda, R. (2003). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. *Revista de psico didáctica, 5*(40).

Díaz-Barriga, F., y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista* (2ª ed.). Mc Graw Hill.

Godino, J. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Proyecto EdumatMaestros. Granada.

Pérez, Á. I. (2006). A favor de la escuela educativa en la sociedad de la información y la perplejidad. En G. Sacristán (comp.). *La reforma necesaria: entre la política educativa y la práctica escolar* (pp. 95-108). Ed. Morata/Gobierno de Cantabria.

Rivera, J. (2004). El aprendizaje significativo y la evaluación de los aprendizajes. *Revista de investigación educativa, 8*(14), 47-52.

Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. *Bolema, 29*(51), 143-166.

Romero, F. (2009). Aprendizaje significativo y constructivismo. *Revista digital para profesionales de la enseñanza*, (3), 1-8.

Secretaría de Educación Pública [SEP] (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Quinto grado*. Autor.

UNA PROPUESTA DE TAREAS DE APRENDIZAJE PARA APOYAR LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE SUBESPACIO VECTORIAL

Andrea Cárcamo, Claudio Fuentealba

Universidad Austral de Chile

andrea.carcamo@uach.cl, cfuentealba@uach.cl

Este trabajo presenta una secuencia de tareas diseñada para apoyar la construcción del concepto de subespacio vectorial. Para construirla se consideró la heurística de diseño de los modelos emergentes en conjunto con estudios sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto. Se desarrolló un experimento de enseñanza en donde estas tareas fueron resueltas por estudiantes de primer año de ingeniería. Los resultados dan cuenta de cómo estas tareas contribuyeron a que los estudiantes progresaran del modelo -de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con infinitas soluciones que es subespacio vectorial a un modelo-para identificar qué conjuntos son subespacios vectoriales.

Subespacio vectorial, Álgebra Lineal, Matemática universitaria, Trayectoria hipotética de aprendizaje.

INTRODUCCIÓN

El concepto de subespacio vectorial forma parte de los contenidos del curso de Álgebra Lineal que es obligatorio en muchas carreras universitarias. Sin embargo, su aprendizaje, así como su enseñanza, representa todo un desafío principalmente por su alto nivel de abstracción y porque está definición no fue creada para resolver problemas, sino para unificar y generalizar tanto los métodos como los conceptos existentes (Dorier, 1995). Por esta razón, en los últimos años se han realizado investigaciones que han centrado su atención en realizar innovaciones para el aprendizaje de este contenido específico (Wawro et al., 2013) y, también, para identificar dificultades que tienen los estudiantes con el mismo (Britton y Henderson, 2009).

Mutambara y Bansilal (2019) realizaron una investigación centrada en las dificultades de los estudiantes con el contenido de subespacio vectorial. Estos autores evidenciaron dificultades cuando un estudiante probó correctamente que dos conjuntos de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^5$ eran cerrados con respecto a la suma de vectores, pero no verificó la condición de multiplicación por un escalar en ninguno de los dos casos. Además, estos autores detectaron dificultad con la definición de subespacio vectorial cuando solo un estudiante, de diez, mostró que un conjunto no era subespacio vectorial. Los demás estudiantes, no propusieron un contraejemplo.

Considerando lo expuesto, el objetivo de este trabajo es presentar una secuencia de tareas de aprendizaje que apoye la construcción de subespacio vectorial fundamentada en la heurística de diseño de los modelos emergentes y en los estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de subespacio vectorial.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Este trabajo considera como fundamentos teóricos la heurística de diseño instruccional de los modelos emergentes (Gravemeijer, 1999) que guía el diseño de las tareas de aprendizaje para subespacio vectorial y también, se utiliza para describir el progreso del estudiante con respecto a su construcción del concepto de subespacio vectorial. Además, los estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de subespacio vectorial contribuyen al diseño (o selección) de dichas tareas de aprendizaje.

La heurística de diseño de los modelos emergentes

La heurística del diseño instruccional de los modelos emergentes tiene como objetivo apoyar un proceso incremental en el que los modelos y las concepciones matemáticas evolucionen al mismo tiempo. El elemento central de esta heurística es el uso de una serie de submodelos, que juntos fundamentan un modelo general. Este modelo general se desarrolla a partir de un modelo-de actividad matemática informal hacia un modelo-para un razonamiento matemático más formal (Gravemeijer, 2020). En relación con esto, Gravemeijer (1999) distingue cuatro niveles de actividad diferentes: (1) actividad situacional (en un entorno de tarea que es experiencial para los estudiantes), (2) actividad referencial (en la que los modelos se refieren a la actividad en el entorno de la tarea experiencial), (3) actividad general (en la que los modelos se refieren a un marco de relaciones matemáticas) y (4) actividad formal que ya no depende del apoyo de modelos para la actividad matemática.

Uno de los elementos centrales de los modelos emergentes es que los modelos no aparecen de la nada, sino que surgen del modelado de situaciones que tienen sentido para los estudiantes (Gravemeijer, 2020).

Estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de subespacio vectorial

Existen varias investigaciones que informan sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto de subespacio vectorial, pero, además, que aportan sugerencias sobre cómo apoyar a los estudiantes en la construcción de este concepto de Álgebra Lineal. En particular, Britton y Henderson (2009) para ayudar a los estudiantes a superar la confusión de los símbolos cuando se enfrentan a demostrar que un conjunto es subespacio vectorial, sugieren proporcionar una tabla a los estudiantes que actúe como plantilla para verificar la condición de cerradura con respecto a la suma.

Chandler y Taylor (2008) para abordar la falta de comprensión de los estudiantes de la definición de un subespacio vectorial y la falta de conexión entre una base y un subespacio vectorial proponen que los estudiantes construyan dos subespacios no triviales de un espacio vectorial y que verifiquen que son subespacios vectoriales.

METODOLOGÍA

Este trabajo exploratorio tiene como metodología de investigación, la investigación basada en el diseño que consta de tres fases (Gravemeijer y van Eerde, 2009). En la primera fase, se diseña la secuencia de tareas de aprendizaje que son parte de una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre subespacio vectorial. En la Tabla 1, se presenta una descripción de estas tareas de aprendizaje y su relación con la heurística de diseño de los modelos emergentes. Después, en la segunda fase, la secuencia de tareas fue usada en un primer ciclo de experimento de enseñanza con estudiantes de primer año de ingeniería que cursaban Álgebra Lineal. En esta fase, se recopilaron grabaciones de

audio y los protocolos escritos de los estudiantes. Finalmente, en la tercera fase, se analizaron los datos recopilados con la finalidad de encontrar indicios de que las tareas de aprendizaje apoyaron la construcción de la definición de subespacio vectorial.

Tabla 1.

Tareas de aprendizaje y su relación con la heurística de diseño de los modelos emergentes.

Tareas de aprendizaje	Manifestación de los modelos emergentes en las tareas de aprendizaje
Tarea 1. Se pide a los estudiantes analizar el conjunto solución S de diferentes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos y no homogéneos con infinitas soluciones. (a) ¿Es S subconjunto de $\mathbb{R}^n$? (b) ¿Pertenece el vector nulo a S? (c) Si se suman dos vectores de S, ¿el vector resultante pertenece a S? (d) Si multiplicamos un número real por un vector de S, ¿el vector resultante pertenece a S?	Nivel situacional. Los estudiantes exploran características de los conjuntos soluciones S de diferentes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos y no homogéneos con infinitas soluciones.
Tarea 2. Se pide a los estudiantes determinar si los conjuntos S de la tarea 1 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.	Nivel referencial. Los estudiantes conocen la definición del concepto de subespacio vectorial. Los conjuntos solución de los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos con infinitas soluciones funcionan como modelo-de ejemplo de subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, mientras que los conjuntos solución de los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos con infinitas soluciones funcionan como modelo-de ejemplo de conjuntos que no son subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
Tarea 3. Se pide a los estudiantes completar dos tablas. En la primera tabla proponen los pasos que se deben seguir para verificar que un conjunto es subespacio vectorial de un cierto espacio vectorial. En la segunda tabla proponen los pasos que se deben seguir para mostrar que un conjunto no es subespacio vectorial de un cierto espacio vectorial.	Los estudiantes hacen conjeturas sobre los pasos para verificar que un conjunto es subespacio vectorial de un cierto espacio vectorial y también, acerca de los pasos para mostrar que un conjunto no es subespacio vectorial de un cierto espacio vectorial. El modelo-de subespacio vectorial del conjunto solución de un sistema de ecuación lineal homogéneo con infinitas soluciones se transforma en un modelo-para identificar conjuntos diferentes a $\mathbb{R}^n$ que son subespacios vectoriales de ciertos espacios vectoriales.
Tarea 4. Determinan si conjuntos de diferentes espacios vectoriales son subespacios vectoriales. Además, dan ejemplos de conjuntos que son	Los estudiantes usan la definición de subespacio vectorial para identificar y dar ejemplos de conjuntos de diferentes espacios vectoriales que son (o no) subespacios vectoriales.

subespacios vectoriales y conjuntos que no lo son.

RESULTADOS

Los resultados de este trabajo se refieren a mostrar indicios de aprendizaje por parte de los estudiantes sobre la definición de subespacio vectorial a través de la secuencia de tareas de aprendizaje (Tabla 1). Estos resultados son: (1) la determinación de características del conjunto solución de un sistema de ecuación lineal con infinitas soluciones, (2) el reconocimiento de un conjunto solución de un sistema de ecuación lineal homogéneo con infinitas soluciones, como un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, (3) la identificación de pasos para verificar que un conjunto es subespacio vectorial de un cierto espacio vectorial y también, para mostrar que no lo es, y (4) la aplicación de la definición de subespacio vectorial. A continuación, se ejemplifica describiendo lo realizado en las tareas de aprendizaje por el estudiante Andrés.

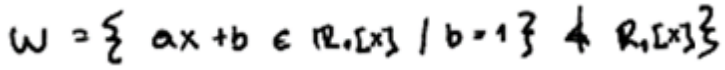
El estudiante Andrés mostró la determinación de algunas características del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones. Por ejemplo, Andrés precisó que el conjunto $S = \{(x, y) \epsilon \mathbb{R}^2 : x = \alpha \ \wedge \ y = 0, \alpha \epsilon \mathbb{R}\}$ está contenido en $\mathbb{R}^2$ porque "*todos los elementos de S pertenecen a* $\mathbb{R}^2$". Además, afirmó que el vector nulo de $\mathbb{R}^2$ pertenece a *S* porque "*dadas las condiciones de S donde x puede ser cualquier real, cero es cualquier real. La primera coordenada de este vector (indicando al vector (0,0)) es 0 y es un real, y la segunda coordenada es 0 por lo que cumple las condiciones para pertenecer a S"*. Asimismo, reconoció que el vector que resulta de sumar dos vectores de S pertenece a este conjunto y que, si se multiplica un número real cualquiera por un vector de *S*, el resultado es un vector que pertenece a S.

A continuación, en la tarea 2 y luego de que conocieron la definición de subespacio vectorial, Andrés escribió que *S* es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ porque "$* \ (0,0) \in S, * \ S_1 + S_2 \in S, \propto S_1 \in S, con \ S_1, S_2 \in S$". Además, él señaló que en la tarea 1 se habían verificado todas estas condiciones. Aquí, observamos que el conjunto S funcionó como un modelo-de ejemplo de subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

En la tarea 3, Andrés identificó pasos para verificar todas las condiciones que debe cumplir un conjunto *W* para que sea subespacio vectorial de un espacio vectorial *V*. Por ejemplo, para probar la condición $\forall x, y \in W, x + y \in W$, él escribió los siguientes pasos: "tomar 2 vectores genéricos de *W*, sumar los 2 vectores genéricos, ver si el vector obtenido, al sumar los 2 vectores genéricos, pertenece a *W* y concluir ". Finalmente, en la tarea 4, el estudiante Andrés dio indicios de aplicar la definición de subespacio vectorial cuando se le preguntó si podía escribir un ejemplo de un conjunto que no fuera subespacio vectorial de un determinado espacio vectorial y anotó el conjunto *W* que se muestra en la Figura 1. Él indicó que *W* no era subespacio vectorial de $\mathbb{R}_1[x]$ porque "*el vector cero de polinomios de grado menor o igual a 1 no pertenece a W*".

Figura 1.

Ejemplo de Andrés de un conjunto que no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_1[x]$.



CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo exploratorio fue presentar una secuencia de tareas de aprendizaje que apoye la construcción de la definición de subespacio vectorial. Dichas tareas se diseñaron (o seleccionaron) en base tanto en la heurística de diseño de los modelos emergentes como en los estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de subespacio vectorial.

La secuencia de tareas propuesta dio indicios de apoyar la construcción de la definición de subespacio vectorial. Se destaca principalmente porque parte de los conocimientos previos de los estudiantes sobre conjunto solución de un sistema de ecuación lineal con infinitas soluciones y, además, porque da la oportunidad al estudiante de progresar de un modelo-de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con infinitas soluciones que es subespacio vectorial a un modelo-para identificar qué conjuntos son subespacios vectoriales.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue desarrollado gracias a la ANID por medio del proyecto Fondecyt de Iniciación N°11190284 y a la colaboración de la Facultad de Ciencias de la Ingeniería de la Universidad Austral de Chile.

REFERENCIAS

Britton, S., y Henderson, J. (2009). Linear algebra revisited: An attempt to understand students' conceptual difficulties. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(7), 963-974.

Chandler, F., y Taylor, D. (2008). Constructive Learning in Undergraduate Linear Algebra. *PRIMUS*, *18*(3), 299-303.

Dorier, J. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(2), 175-197.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155-177.

Gravemeijer, K. (2020). A Socio-Constructivist Elaboration of Realistic Mathematics Education. En Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Eds.), National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33824-4_12

Gravemeijer, K., y van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. *The Elementary School Journal*, *109*(5), 510-524.

Mutambara, L., y Bansilal, S. (2019). An exploratory study on the understanding of the vector subspace concept. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *23*(1), 14-26.

Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., y Larson, C. (2013). Design research within undergraduate mathematics education: An example from introductory linear algebra. En T. Plomp y N. Nieveen (Eds.), *Educational design research – Part B: Illustrative cases* (pp. 905-925). SLO.

ESTUDIO DE CONFIGURACIONES COGNITIVAS DE ESTUDIANTES RESPECTO A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE 2×2 POSTPANDEMIA

Paulina Águila, Camila Bonet, Daniela Araya

Universidad Central de Chile

paulina.aguila@alumnos.ucentral.cl, camila.bonet@alumnos.ucentral.cl, daniela.araya@ucentral.cl

La presente investigación tiene por objetivo estudiar el aprendizaje desarrollado por estudiantes secundarios del objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 *durante la pandemia ocasionada por el COVID-19. El análisis se sustentará en las herramientas teóricas-metodológicas proporcionadas por el Enfoque Onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticas (Godino et al., 2007), de manera específica, de la configuración ontosemiótica asociada a dicho objeto matemático. La metodología de trabajo se basa en el paradigma cualitativo cuyo diseño metodológico es descriptivo, puesto que se pretende categorizar las respuestas de los estudiantes para establecer las configuraciones cognitivas desarrolladas por éstos.*

Sistemas de ecuaciones de $2x2$, Configuración cognitiva, Aprendizaje en tiempos de pandemia, EOS.

ANTECEDENTES

Desde marzo del 2020 comenzó una crisis sanitaria producto del COVID-19 que afectó a la población a nivel mundial por lo que las autoridades sanitarias hicieron que el país se resguardara realizando cuarentenas. De manera específica, en Chile esto afectó de manera muy significativa al área de la educación, pues a contar del 16 de marzo se decretó la suspensión de clases presenciales a nivel nacional, iniciando un periodo de educación a distancia. Dicha medida ha impactado no solo a nivel del aula en colegios y universidades, sino también en la comunicación entre estudiantes, y entre docente y estudiantes, siendo uno de los factores indispensables para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje. Debido a la pandemia, se realizó un plan de contingencia de enseñanza-aprendizaje en línea que incluyó no solo determinar los contenidos a estudiar, si no también prestar atención en los diversos tipos de interacción que son fundamentales para el proceso de aprendizaje (Peña et al., 2021). La implementación de clases en este tipo de modalidad de enseñanza, tuvo diversas problemáticas, entre ellas, se destaca la complicación que tuvieron los docentes al momento de interactuar con los estudiantes durante las clases online, por ejemplo, los alumnos no contestaban al profesor(a), además, no pudieron observar gestos de sus estudiantes, por tanto los docentes desconocían si los estudiantes estaban presentes en la clase realizada y surgió lo que se denomina como el "fenómeno de pantallas negras" (Peña et al., 2021).

Por su parte, el Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], ha hecho un estudio relevando la existencia de tres factores que influyen en la educación a distancia, siendo el primero de ellos la cobertura de la provisión de educación a distancia, donde menciona que:

> […] el 40% de los estudiantes en Chile se encuentra en establecimientos que han entregado formación a distancia de manera masiva, entendiendo en esta categoría a aquellos establecimientos que declaran que al menos un 80% de sus estudiantes se encuentra utilizando herramientas de aprendizaje a distancia

> como: clases online, videoconferencias, redes sociales, correo electrónico, llamadas telefónicas o guías de trabajo, entre otros. (MINEDUC, 2020, p.4).

El segundo factor es el acceso que tienen los estudiantes a la formación a distancia por medio de la disponibilidad de los recursos tecnológicos, tal como afirma el estudio:

> Los resultados a nivel de dependencia administrativa indican que un 82% de los estudiantes de establecimientos públicos cuenta con acceso a algún tipo de dispositivo que permita su formación a distancia, mientras que este porcentaje alcanza un 97% en el caso de los estudiantes de establecimientos particulares pagados. (MINEDUC, 2020, p.6).

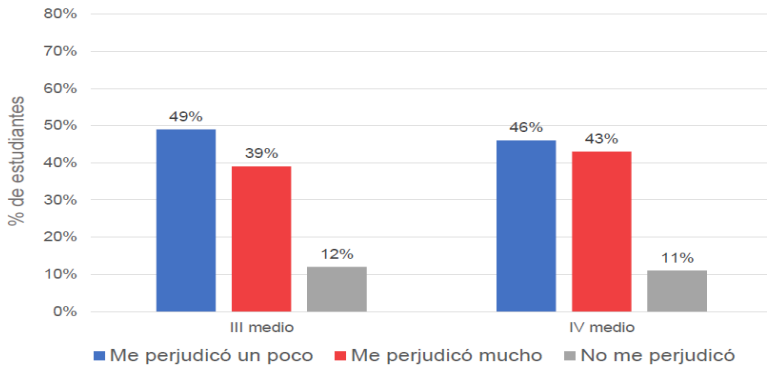
El tercer y último factor es la capacidad de aprender de forma autónoma, siendo un factor de mucha importancia dentro de la educación remota, ya que no basta con que los establecimientos provean de recursos, como se evidencia en el factor uno y dos, además, es necesario que el estudiante pueda tener habilidades desarrolladas necesarias para que sea guía de su propio proceso de aprendizaje de una manera más autónoma (MINEDUC, 2020).

Los factores anteriormente mencionados han tenido impacto en el aprendizaje de los estudiantes, tal como se evidencia en el instrumento Diagnóstico Integral de Aprendizajes (DIA). El objetivo de dicho instrumento es contribuir con información sobre los aprendizajes de los estudiantes respecto a los Objetivos de Aprendizajes (OA) priorizados del nivel académico anterior, además, identificar a aquellos estudiantes que requieren mayor apoyo, y así, entregar información que permita evaluar los ajustes en la planificación del año escolar 2022.

Un aspecto relevante de lo anteriormente señalado son las respuestas evidenciadas en el instrumento de evaluación socioemocional, dónde indica que "9 de cada 10 estudiantes, de 3° y 4° medio, señalaron que el periodo que no asistieron al colegio los afectó negativamente en su aprendizaje. Los estudiantes identifican claramente el daño que la suspensión de clases ha ocasionado" (Agencia de la Calidad de la Educación, 2021, p.12). Lo anterior se puede observar en la Figura 1.

Figura 1.

Porcentaje de respuestas a la pregunta ¿Cuánto Crees que te Perjudicó el Periodo que No Asististe al Colegio en Tu Proceso de Aprendizaje?

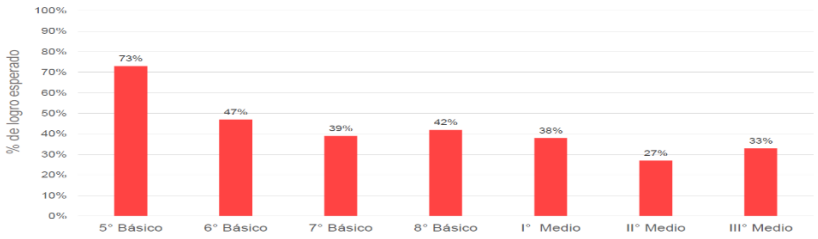


Fuente: Agencia de Calidad de la Educación (2021, p.12).

Adicionalmente, se puede evidenciar el impacto negativo de los resultados de aprendizaje en Matemática debido a la modalidad online, en los niveles de 6° básico a 3° medio. Lo anterior se puede observar en la Figura 2.

Figura 2.

Resultados del Diagnóstico en Matemática.



Fuente: Agencia de Calidad de la Educación (2021, p. 24).

Según los resultados obtenidos, se concluye que la mayoría de los estudiantes asumen que les perjudicó el no asistir al establecimiento de manera presencial, afectando de manera negativa su aprendizaje, provocando una motivación en la mayoría de los estudiantes para retomar actividades relacionadas al ambiente escolar.

En este sentido, la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 no ha estado ajena a las problemáticas mencionadas anteriormente. Además, se ha evidenciado en diversas investigaciones nudos críticos respecto a los procesos de enseñanza-aprendizaje de dicho objeto matemático, por ejemplo, Fernández et al. (2018), concluyeron que el lenguaje cultural en el álgebra, suele ser un conflicto en los estudiantes, debido a su simbología al momento de expresarlo. En general, los estudiantes tienen diversas dificultades y errores en la resolución de problemas matemáticos que implican el uso de conjuntos numéricos, en este sentido, los autores señalan que: "[…] es fundamental que ellos tengan nociones correctas de la matemática, a fin de que puedan resolver problemas mediante situaciones cotidianas a través de planteamientos numéricos que conlleven conclusiones válidas" (p. 94).

Por lo anteriormente expuesto, es importante el estudio de los conjuntos numéricos, ya que son empleados de manera fundamental en sistemas de ecuaciones lineales de dos variables y su poca comprensión puede perjudicar y confundir los diversos métodos de resolución, careciendo de dominio teórico y confundiendo la alteración de términos, esto puede afectar a los estudiantes en identificar los elementos de una ecuación.

Debido a que existen diversas investigaciones que evidencian los errores que emergen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales de $2x2$ en modalidad presencial, se quiere indagar el aprendizaje de este objeto matemático mediante el análisis de las configuraciones cognitivas desarrolladas por un grupo de estudiantes de enseñanza media en tiempos de enseñanza durante la pandemia.

MARCO TEÓRICO

Configuración Ontosemiótica

Para esta investigación se ha adoptado el marco teórico conocido como Enfoque Onto-Semiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemáticos, desarrollado en diversos trabajos por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino y Batanero, 1998; Godino et al., 2007; Font et al. , 2013, Godino, et al., 2020) y se utiliza en esta investigación, pues proporciona herramientas teóricas que componen el EOS y que permiten analizar las prácticas matemáticas asociadas a los sistemas de ecuaciones lineales de $2x2$ en tiempos de pandemia. Para analizar las respuestas de los estudiantes se utilizarán algunas herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al., 2007), concretamente, se utilizará la herramienta configuración ontosemiótica (Pino-Fan et al., 2015) porque permite describir y caracterizar de manera sistemática los objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) que intervienen y emergen de la práctica matemática. Estas configuraciones están asociadas a los significados personales (Pino-Fan et al, 2011) del objeto sistemas de ecuaciones lineales de $2x2$.

Es importante destacar que, las nociones del EOS se han aplicado en diversas investigaciones teóricas y experimentales desarrolladas en tesis doctorales y otros trabajos de investigación, y se utilizan en este trabajo porque poseen herramientas teóricas que nos permitirán realizar un análisis de las configuraciones cognitivas que poseen los estudiantes respecto del objeto matemático sistema de ecuaciones lineales de $2x2$.

METODOLOGÍA

La presente investigación se basa en un enfoque cualitativo cuyo diseño metodológico es descriptivo, ya que se indagará y analizarán los significados personales desarrollados por estudiantes respecto a los sistemas de ecuaciones lineales de $2x2$.

Se escoge este enfoque, ya que es un diseño flexible y la recolección de datos es participativa, en donde las investigadoras participan en la obtención de estos datos mencionados de manera formal, informal y no estructurada, para así llegar a conclusiones interpretadas de manera personal (Hernández, et al., 2016).

A su vez, el tipo de estudio en el que se enfocará esta investigación es exploratorio, ya que hay pocos estudios que indagan sobre el aprendizaje en sistemas de ecuaciones lineales $2x2$ postpandemia del COVID-19.

Los sujetos que participarán en el estudio son alumnos de 14 a 16 años del nivel de 2° año de enseñanza media pertenecientes a un establecimiento educacional mixto, de carácter particular subvencionado. El nivel socioeconómico de los estudiantes es regular, ya que acoge a todos los estudiantes sin excluir y pertenecen a la región metropolitana.

ESTADO DE LA INVESTIGACIÓN

Nos encontramos en la etapa de diseño y validación del instrumento, el cual constará de preguntas abiertas, con el fin de recabar información de las diferentes configuraciones cognitivas desarrolladas por los estudiantes respecto al objeto sistema de ecuaciones lineales de $2x2$.

REFERENCIAS

Agencia de Calidad de la Educación (2021). *Resultados Diagnóstico Integral de Aprendizaje*. Ministerio de Educación.

Fernández, E., Contreras, A., y Álvarez, C. (2018). Tipología de errores manifestados en la resolución de sistema de ecuaciones por estudiantes de 5to año. *Revista Arjé*. *12*(22), 93-102.

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97-124.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as apriority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska, y J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177- 195). Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2020). El Enfoque Ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(2), 3-15.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2016). *Metodología de la investigación* (6ta ed.). McGraw-Hill.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2020). *Impacto del COVID-19 en los resultados de aprendizaje y escolaridad en Chile.* Autor.

Peña, C., Pino-Fan, L., y Assis, A. (2021). Normas que regulan la gestión de clases virtuales de matemáticas en el contexto COVID-19. *Uniciencia, 35*(2), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.21

Pino-Fan, L. R.; Godino, J. D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.

Pino-Fan, L.; Godino, J. D., y Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *Bolema, 29*(51), 60-89.

PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA EL NÚCLEO E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL MEDIADA POR LA MODELACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Diego Fernando Devia Narváez, Vivian Libeth Uzuriaga López, Fernando Mesa

Universidad Tecnológica de Pereira

dfdevia@utp.edu.co, vuzuriaga@utp.edu.co, fmesa@utp.edu.co

En este trabajo se presenta un planteamiento en la enseñanza del curso de álgebra lineal tomando como elemento central el núcleo y la imagen de una transformación lineal, mediado por la modelación de sistemas de ecuaciones lineales, que permite a los estudiantes de ingeniería la comprensión integral de los temas que conforman los diferentes capítulos del curso, la construcción cognitiva de espacios vectoriales y a su vez, estimular la habilidad para crear situaciones del ejercicio profesional. Para tal fin, se propone relacionar los conceptos de linealidad presentes en una solución compatible indeterminada de un sistema lineal, con la proporcionalidad de los elementos de los vectores base del espacio nulo, condicionan las combinaciones lineales del espacio columna.

Espacios vectoriales, Modelamiento, Propuesta de enseñanza, Sistemas lineales, Transformación lineal.

INTRODUCCIÓN

En las diferentes carreras de ingenierías y de tecnologías el curso de Algebra Lineal tiene un aporte esencial para el desarrollo técnico y científico en los estudiantes. No obstante, por la falta de aplicaciones de modelos que describan situaciones en escenarios cercanos a la vida profesional, la falta de transversalización con otros cursos, entre otros, algunos estudiantes no logran conceptualizar (encriptar) los temas del curso, por lo tanto, se obtienen bajos niveles de desempeño y aprobación, que a su vez, alargan tiempos de graduación y generan una mayor inversión de dinero tanto de los estudiantes como de las universidades (Carvajal et al., 2004; Uzuriaga et al., 2008).

El Algebra Lineal reúne varios subtemas que están íntimamente relacionados y la falta de conectarlos en el desarrollo de este curso, impide un entendimiento profundo de los conceptos propios como son dependencia lineal, base, generador, dimensión, núcleo e imagen de una matriz y transformación lineal. La enseñanza de los conceptos del Algebra Lineal, particularmente el tema de los Espacios Vectoriales (EV), se ha limitado a la transmisión de definiciones y teoremas aislados de los demás capítulos que conforman este curso, sin permitir al aprendiz formar un concepto integral de los mismos. Guznes (2012), plantea la necesidad de desarrollar una secuencia en el contenido de este curso con el objetivo de estimular cognitiva y afectivamente al estudiante que permita la integración de conceptos provenientes de diversas áreas.

Por otro lado, la enseñanza del EV se ha centrado en procedimientos algorítmicos, sin la comprensión de temáticas centrales como dependencia lineal, base, conjunto generador y espacios fundamentales de una matriz, que permitan la integración y aplicación de ellos por parte de los estudiantes de ingeniería, en la creación, modelación y el análisis de la solución de ecuaciones lineales. Martín et al.

(2014) menciona que hay tendencia de los estudiantes por manipular mecánicamente los objetos del Algebra Líneal en sí mismos sin relacionarlos entre ellos.

El Algebra Lineal constituye un curso que debe estar en constante actualización de los métodos de enseñanza, en los que se pueda articular temas abstractos como son el espacio vectorial y la transformación lineal, esto con el fin que los estudiantes puedan aplicar estos conceptos en situaciones o problemas concretos y así validar que han sido entendidos. Si el Algebra Lineal no logra concretarse en problemas técnicos difícilmente puede captar la atención de ingenieros en formación que acudan al conocimiento matemático como apoyo analítico y heurístico, más que como un fin en sí mismo. Por lo anterior, en este trabajo se presenta mediante un ejercicio de aplicación, la relación existente entre la proporcionalidad de la solución compatible indeterminada de un sistema lineal y de las combinaciones lineales del espacio columna, con la base del espacio nulo.

TEORÍA

Un sistema lineal *m* ecuaciones y *n* incógnitas tiene la forma (Uzurriaga y Martínez, 2015)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

y puede expresar matricialmente como

$$[a_{11}\ a_{12}\ a_{21}\ a_{22}\ \cdots\ a_{1n}\ a_{2n}\ \vdots\ \ddots\ \vdots\ a_{m1}\ a_{m2}\ \cdots\ a_{mn}\ ][x_1\ x_2\ \vdots\ x_n\ ] = [b_1\ b_2\ \vdots\ b_m\ ]$$
$$Ax = b$$

El conjunto de todas las **x** que satisfacen $Ax = b$, se llama conjunto solución del sistema.

Definición Un vector $v \in V$ es una combinacion lineal de los vectores v_1, v_2, … v_n , sí y solo si, $\exists\ c_1, c_2, \ldots, c_n \in R$, tales que $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + v_nc_n$

El conjunto de **x** que satisfacen $Ax = 0$, es el ***espacio nulo*** de la matriz A_{mxn}.

$$Nul\ A = \{x \in R^n : Ax = 0\}$$

El espacio columna son todas las combinaciones lineales de las columnas de la matriz A_{mxn}

$$Col\ (A) = \{b : b = Ax\ para\ alguna\ x \in R^n\}$$

Una transformación lineal *T* de *V* a *W*, satisface para cada *u* y *v* en *V* y cada escalar α

$$T(u + v) = T(u) + T(v) \quad \text{y} \quad T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

Desarrollo

Para ilustrar la relación de los conceptos de linealidad presentes en una solución compatible indeterminada de un sistema lineal, con la proporcionalidad que la base del espacio nulo condiciona las combinaciones lineales del espacio columna, se desarrolla el siguiente ejemplo:

En una tienda de teléfonos, se venden tres tipos de celulares: Samsung, Iphone y Xiaomi. El Samsung tiene dos simcard y ninguna aplicación. El celular Iphone tiene una simcard y una aplicación. El Xiaomi tiene una simcard y dos aplicaciones. La tienda dispone de 32 simcards y 10 aplicaciones. Asumiendo que cada simcard y aplicación de juegos se usan, halle todas las posibles opciones para vender cada tipo de celular y analizar el comportamiento de la solución.

Las variables del problema son:

$$x = Samsung, \quad y = Iphone \quad z = Xiaomi$$

el modelo matemático

$$2x + y + z = 32$$

$$y + 2z = 10$$

$$[2\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2\ ][x\ y\ z\ ] = [32\ 10\ ]$$

desarrollando la eliminación gaussiana

$$[2\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2\ \vdots\ 32\ \vdots\ 10\ ] = [1\ 1/2\ 1/2\ 0\ 1\ 2\ \vdots\ 16\ \vdots\ 10\ ] = [1\ 0\ -1/2\ 0\ 1\ 2\ \vdots\ 11\ \vdots\ 10\ ]$$

$$x - \frac{1}{2}z = 11, \quad y + 2z = 10$$

se obtiene la solución general

$$x = 11 + \frac{1}{2}t; \quad y = 10 - 2t; \quad z = t;$$

Por lo tanto, se obtiene las siguientes opciones de venta:

$$t = 2 \Rightarrow x = 12; \quad y = 6; \quad z = 2$$

$$t = 4 \Rightarrow x = 13; \quad y = 2; \quad z = 4$$

Para analizar el comportamiento de la solución obtenemos el espacio nulo y el espacio columna de la matriz A

$$[2\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2\ \vdots\ 0\ \vdots\ 0\ ] = [1\ 1/2\ 1/2\ 0\ 1\ 2\ \vdots\ 0\ \vdots\ 0\ ] = [1\ 0\ -1/2\ 0\ 1\ 2\ \vdots\ 0\ \vdots\ 0\ ]$$

$$x - \frac{1}{2}z = 0, \quad y + 2z = 0$$

$$x = \frac{1}{2}z, \quad y = -2z$$

$$[x\ y\ z\ ] = \left[\frac{z}{2} - 2z\ z\ \right] = z\left[\frac{1}{2} - 2\ 1\ \right]$$

Por la tanto $Nul\ A = Gen\left\{\left(\frac{1}{2}, -2, 1\right)\right\}$ y $Col\ A = Gen\{(2,0); (1,1)\}$.

Con el fin de aumentar la cantidad de opciones de ventas y validar la dinámica de la solución, se hace la siguiente combinación lineal con la base del espacio columna:

$$b = c_1 v_1 + c_2 v_2$$

$$[30\ 20\ ] = 5[2\ 0\ ] + 20[1\ 1\ ]$$

desarrollando la eliminación gaussiana con este vector linealmente dependiente del espacio columna

$$[2\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2\ \vdots\ 30\ \vdots\ 20\ ] = [1\ 1/2\ 1/2\ 0\ 1\ 2\ \vdots\ 15\ \vdots\ 20\ ] = [1\ 0\ -1/2\ 0\ 1\ 2\ \vdots\ 5\ \vdots\ 20\ ]$$

$$x - \frac{1}{2}z = 5, \quad y + 2z = 20$$

se obtiene la solución general

$$x = 5 + \frac{1}{2}t; \qquad y = 20 - 2t; \qquad z = t;$$

Por lo tanto, se obtiene las siguientes opciones de venta:

$$t = 2 \ \Rightarrow \ x = 6; \quad y = 16; \quad z = 2$$

$$t = 4 \ \Rightarrow \ x = 7; \quad y = 12; \quad z = 4$$

$$t = 6 \ \Rightarrow \ x = 8; \quad y = 8; \quad z = 6$$

$$t = 8 \ \Rightarrow \ x = 9; \quad y = 4; \quad z = 8$$

Se puede evidenciar que el comportamiento de la solución está supeditado por el vector base del espacio nulo, que también se puede escribir cómo (1, -4, 2). En otras palabras, por cada promoción del celular Samsung que se venda, se dejarán de vender cuatro promociones del IPhone y se venderán dos promociones del celular Xiaomi.

CONCLUSIONES

Se articularon los conceptos de espacios vectoriales con la modelación de sistemas de ecuaciones lineales, permitiendo una aplicación de definiciones tales como combinación lineal, espacio nulo y espacio columna.

Se relacionó los conceptos de linealidad presentes en una solución compatible indeterminada de un sistema lineal, con la proporcionalidad de los elementos de los vectores base del espacio nulo y las combinaciones lineales del espacio columna, para analizar la dinámica de la solución de las ecuaciones lineales.

REFERENCIAS

Carvajal, P., Trejos, A., y Soto Mejía, J. (2004). Aplicación del análisis discriminante para explorar la relación entre el examen de IFES y el rendimiento en algebra lineal de los estudiantes de ingeniería de la UTP en el período 2001-2003. *Scientia et technica*, *10*(25), 191-196.

Uzuriaga l., V., Martínez A., A., y Arias M., J. J. (2008). Algunos medios que contribuyen a mejorar el aprendizaje del álgebra lineal. *Scientia Et Technica, 14*(38), 341-346.

Guzner, C. (2012). El desafío de enseñar Álgebra Lineal por competencias. *Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática, (46)*, 19-38.

Martín, A., Pérez, O., Blanco, R., y Casas, L. (2014). Los espacios vectoriales, como estructuras algebraicas, en el proceso de enseñanza aprendizaje del Álgebra Lineal: una propuesta de investigación. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1073-1082). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Uzurriaga, V. L., y Martínez, A. (2015). *Algebra Lineal desde un enfoque desarrollador*. Editorial Universidad Tecnológica de Pereira.

REFINAMIENTO ANALÍTICO SOBRE UNA TAREA DE SUCESIONES OBSERVADO DESDE LA COMPLEMENTARIEDAD DE TEORÍAS

Paula Verdugo-Hernández[1], Gonzalo Espinoza-Vásquez[2], Carolina Henríquez-Rivas[3]

[1]Universidad de Talca, [2]Universidad Alberto Hurtado, [3]Universidad Católica del Maule

paulasinttia@gmail.com, gespinoza@uahurtado.cl, chenriquezr@ucm.cl

El estudio conjunto de dos modelos teóricos, a saber; el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK) han reflejado un potencial para estudiar y comprender el conocimiento involucrado en la actividad matemática del profesor. En este escrito se presenta un análisis sobre las propiedades y beneficios que ha develado la complementariedad de estos modelos en el análisis de una tarea sobre sucesiones.

Complementariedad, ETM, MTSK, Sucesiones, ETM Idóneo.

INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones han avanzado en la comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a través de la relación entre distintas teorías (p.ej., Radford, 2008; Sriraman y English, 2010; Prediger et al., 2008; Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010;Kidron y Monaghan, 2012; Verdugo-Hernández et al., 2022 y Espinoza-Vásquez et al., 2022). Por su parte, Bikner-Ahsbahs y Prediger (2010) señalan que la conexión entre teorías en Educación Matemática es un proceso que permitiría comprender mejor la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Coincidimos con Radford (2008) en que las conexiones entre teorías son interesantes debido a que conducen a un conocimiento y una comprensión más profunda de los temas. En esta línea, Kidron y Monaghan (2012) refuerzan la postura de Radford, indicando que un beneficio de estas conexiones puede ser la comprensión más profunda de los marcos involucrados, no obstante, advierten la necesidad de ser conscientes sobre la complejidad intrínseca de lo que implica el diálogo entre teorías. Considerando lo anterior, en este trabajo adoptamos el paradigma de conexión entre teorías (en el sentido de Prediguer et al., 2008) para analizar la propuesta y desarrollo de una tarea sobre sucesiones de parte de un profesor universitario, en la asignatura de Cálculo Integral. Para ello, nos planteamos como objetivo evidenciar cómo se ha realizado dicha conexión contemplando dos modelos teóricos en este análisis y distinguir el beneficio que produce esta conexión en el refinamiento del análisis de dicha práctica del profesor.

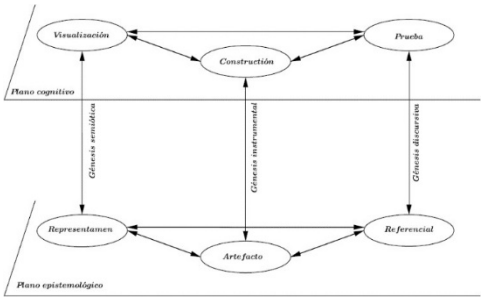
MARCO TEÓRICO

El marco teórico que utilizamos considera el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por su sigla en inglés), que contempla el conocimiento disciplinar y didáctico sobre la matemática (Carrillo et al., 2018) para analizar la práctica del profesor en términos de su conocimiento, y el modelo de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM), que propicia el estudio del desarrollo de tareas matemáticas y la organización de estas como parte de la enseñanza (Kuzniak et al., 2016). En el ETM nos centraremos en el ETM idóneo del profesor, que aborda las adecuaciones de los aspectos matemáticos y cognitivos del trabajo alrededor de un tema con fines de enseñanza. En esta misma perspectiva teórica, consideramos las herramientas semióticas y teóricas que ha propuesto

Kuzniak et al. (2016) y la herramienta operacional, definida por Verdugo-Hernández (2018). Las Figuras 1 y 2 presentan los esquemas de ambos modelos.

Figura 1.

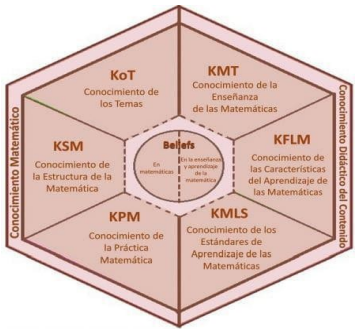
Modelo ETM y sus génesis.



Fuente: Kuzniak (2011).

Figura 2.

Dominios y subdominios del modelo MTSK.



Fuente: Carrillo et al., (2014).

METODOGÍA

Mediante un enfoque cualitativo (Denzin y Lincoln, 2000), y desde un paradigma interpretativo, se analiza la propuesta y resolución de una tarea sobre sucesiones propuesta por un profesor universitario en la asignatura de Cálculo Integral (Cálculo II), para estudiantes de ingeniería. El profesor (que llamaremos Matías) es doctor en matemáticas e investigador activo en el área; posee más de 10 años de experiencia en docencia universitaria y fue observado mientras dictaba dicho curso, asignatura que ha realizado al menos por 5 años. Este estudio de caso (Yin, 2018) forma parte de los resultados expuestos en Verdugo-Hernández et al. (2022) y se han adaptado para el cumplimiento de los objetivos aquí propuestos. En este escrito, mostraremos el análisis y resultados de la primera parte de la tarea propuesta por Matías. La selección de esta tarea que analizamos se basa en la relevancia del tema dentro del curso de Cálculo II, además, resulta ser una tarea ilustrativa del trabajo en el aula de Matías y, especialmente, admite su estudio en profundidad con ambos modelos teóricos, lo cual permite dar cuenta del beneficio que produce la conexión para el refinamiento del análisis de la práctica docente.

RESULTADOS

Tal como se señala en la tarea (Figura 3) propuesta en Verdugo-Hernández et al. (2022, p.135), la cual se fundamenta en el referencial de sucesiones de los números reales e involucra conocimientos sobre comprender el lenguaje de las sucesiones (diferencia entre las variables x e y), notaciones usuales, acotamiento y monotonía y propiedades de los números reales. La tarea solicita varias demostraciones que culminan en la convergencia de la sucesión. Aquí analizamos solo la parte a), en donde se pide demostrar la relación entre el decrecimiento y el acotamiento inferiormente de la sucesión. A modo general, la tarea tiene como intención principal, la activación del plano semiótico-discursivo, dado por la génesis semiótica y la intención en el desarrollo de una demostración, como fuente de validación.

Figura 3.

Pregunta propuesta por el profesor.

PREGUNTA: Para $a > 0$ y $s_1 > 0$ se define la sucesión (s_n) mediante la recurrencia:

$$s_{n+1} = \frac{s_n^2 + a}{2s_n} \forall\, n > 1$$

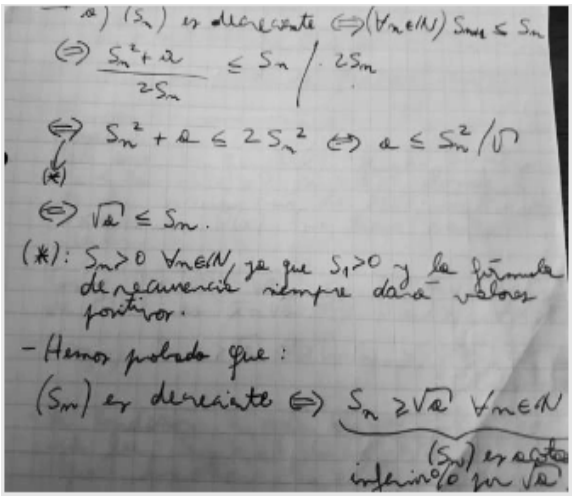
a) Demuestre que la sucesión (s_n) es decreciente $\Leftrightarrow$ (s_n) es acotada inferiormente por $\sqrt{a}$.
b) Demuestre si $s_1 > \sqrt{a}$ entonces la sucesión (s_n) es acotada inferiormente por $\sqrt{a}$.
c) Usando las partes anteriores, concluya que si $s_1 > \sqrt{a}$ entonces la sucesión (s_n) es decreciente y acotada inferiormente.
d) Concluya que la sucesión (s_n) es convergente y calcule su límite.

Fuente: Verdugo-Hernández et al. (2022, p.135).

Para esta tarea, Matías propone el siguiente desarrollo (Figura 4). Se observa que el trabajo desarrollado por Matías se activa desde la componente referencial, debido a que utiliza la propiedad de monotonía de la sucesión (1.a y 2.a), escrita en términos de la relación de orden en los números reales, para utilizarla como una herramienta operacional, que permite establecer las relaciones buscadas entre los términos de la sucesión (líneas 1.a hasta 5.a). A su vez, esto evidencia el conocimiento de Matías sobre la resolución de inecuaciones (diferente al tema de sucesiones) como conocimientos que ayudan a desarrollar la tarea.

Figura 4.

Resolución parte a) y transcripción.



(1.a)	*a)* (s_n) es decreciente $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in \mathbb{N})\ s_{n+1} \leq s_n$
(2.a)	$\Leftrightarrow \frac{s_n^2+a}{2s_n} \leq s_n / 2s_n$
(3.a)	$\Leftrightarrow s_n^2 + a \leq 2s_n^2 \Leftrightarrow a \leq 2s_n^2 / \sqrt{}$
(4.a)	(*)
(5.a)	$\Leftrightarrow \sqrt{a} \leq s_n$
(6.a)	(*): $s_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, ya que $s_1 > 0$ y la fórmula de recurrencia siempre dará valores positivos.
(7.a)	- Hemos probado que:
(8.a)	(s_n) es decreciente $\Leftrightarrow$ $\underbrace{s_n \geq \sqrt{a}\ \forall n \in \mathbb{N}}_{s_n \text{ es acotado inferiormente por } \sqrt{a}}$

Fuente: Verdugo-Hernández et al. (2022, p.136).

En la línea 6.a se observa el principio de inducción matemática, lo que activa la componente de la prueba en relación con el acotamiento inferiormente por cero de la sucesión. Esto también corresponde a conocimiento de temas diferentes a la sucesión, lo que evidencia otro conocimiento sobre la conexión entre las sucesiones y temas que prestan ayuda en su trabajo. Aquí, el uso de la inducción se interpreta como conocimiento sobre formas de demostrar propiedades con números naturales y constituye como una herramienta operacional al ser parte del referencial de los números naturales. Adicionalmente, se identifica el conocimiento sobre la función raíz cuadrada y la

mantención del orden (3.a y 5.a), lo que ayuda a construir la demostración, siendo evidencia de otra conexión auxiliar entre sucesiones y raíz cuadrada evidenciando el uso de las propiedades de la raíz como otra herramienta operacional.

De manera natural, el trabajo se apoya en la génesis semiótica, basado en el registro del lenguaje algebraico y tratamientos en dicho registro (1.a hasta 8.a), lo cual es fundamental para la comunicación y desarrollo de la tarea. El rol del cuantificador universal, de la implicancia y de la equivalencia muestra conocimiento sobre esta comunicación de ideas matemáticas en su conocimiento especializado, que al mismo tiempo caracteriza la génesis semiótica del trabajo de Matías, la cual se relaciona con la génesis discursiva ya que se pretende elaborar (y escribir) los argumentos necesarios para demostrar lo pedido (1.a, 6.a y 8.a).

La resolución de inecuaciones y el uso de la raíz cuadrada también muestran conocimientos sobre notaciones y representaciones vinculadas a las sucesiones. En este sentido, la raíz cuadrada y el principio de inducción adquieren además el rol de herramientas semióticas al permitir operar con las representaciones involucradas. La Tabla 1 resume las relaciones identificadas en la resolución de esta parte de la tarea:

Tabla1.

Relaciones identificadas entre ETM y MTSK en el desarrollo del a) de la tarea.

Herramienta Operacional - Principio de Inducción Matemática - Propiedades de las desigualdades de números reales.	**Conexión Auxiliar (KSM)** - Principio de Inducción Matemática como auxiliar en lademostración de la equivalencia. - Relación de orden en los números reales para mostrarla monotonía
Herramienta Operacional - Principio de Inducción Matemática	**Demostración como práctica matemática (KPM)** - La inducción como una forma de demostrar proposiciones dadas en términos de números naturales.
Herramienta Operacional - Propiedades de las desigualdades de números reales.	**Procedimientos (KoT)** - Resolución de inecuaciones
Herramienta Semiótica - Utilización de $Sn+1 \leq Sn$ $s_{n+1} \leq s_n$ - Manejo de los subíndices	**Registros de representación (KoT)** - Utilización de simbología $Sn+1 \leq Sn$ $s_{n+1} \leq s_n$ - Notación y uso de los subíndices
Herramienta Semiótica - Cuantificador y equivalencia	**Comunicación de ideas matemáticas (KPM)** - Rol y uso de cuantificadores y equivalencia para comunicar la demostración

Fuente: Verdugo-Hernández et al. (2022).

CONCLUSIONES

En la tarea analizada, el conocimiento de Matías sobre las notaciones, procedimientos y propiedades de las sucesiones (como parte del MTSK) le permite estructurar el desarrollo de la demostración. Desde la perspectiva de la investigación, esta relación nos permite interpretar la activación de los

componentes del ETM como conocimientos puestos en juego durante el desarrollo y propuesta de tareas matemáticas. A su vez, la activación de génesis o polos del ETM (por ejemplo, la génesis semiótica o el referencial) y el uso de herramientas necesarias en esta tarea dan cuenta del trabajo que Matías propone para sus estudiantes (como ETM idóneo) y nos muestra cuál es el uso que da a su conocimiento especializado para ello. Específicamente en el caso analizado, la intención de la tarea usada por Matías en su enseñanza en el aula se basa en la activación del plano vertical Semiótica-Discursiva, lo que también, da cuenta de lo que espera que logren sus estudiantes respecto de los estándares de aprendizaje de la matemática en la enseñanza de las sucesiones como parte del curso de Cálculo II. De ese modo, la utilización de ambos modelos, ETM y MTSK, para analizar la práctica del profesor respecto del planteamiento y desarrollo de tareas para la enseñanza, permite ampliar y refinar las interpretaciones que cada modelo puede realizar por separado. Este asunto es parte de lo que destacamos como complementariedad entre ETM y MTSK. Asimismo, destacamos esta complementariedad como una línea para el desarrollo de investigaciones futuras.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

REFERENCIAS

Bikner-Ahsbahs, A., y Prediger, S. (2010). Networking theories an approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of mathematics education* (Advances inmathematics education, pp. 589–592). Springer.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. A. (Eds.) (2014). Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Uni-versidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253 https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Denzin, N., y Lincoln, Y. (2000). *The handbook of qualitative research*. Sage.

Espinoza-Vásquez, G., Verdugo-Hernández, P., Henríquez-Rivas C., y Ponce, R. (2022). Avances en la relación entre MTSK y espacios de trabajo matemático. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*. (pp. 265-276). Dykinson.

Kidron, I., y Monaghan, J. (2012). Complexity of dialogue between theories: Difficulties and benefits. *Pre-Proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (pp. 7078–7084). COEX.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathematique et ses genèses. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16, 9-24.

Kuzniak, A., Nechache, A., y Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical workin the context of the classroom. *The International Journal on Mathematics Education*, *48*(6), 861–874. http://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0

Prediger, S., Arzarello, F., Bosch, M., y Lenfant, A. (2008). Comparing, Combining, coordinating-Networking strategies for connecting theoretical approaches. *Thematic Issue of ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *40*(2), 163-327. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0093-0

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 40*(2), 317–327. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0090-3.

Sriraman, B., y English, L. D. (Eds.). (2010). *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 309-331). Springer.

Verdugo-Hernández, P., Espinoza-Vásquez, G., y Carrillo Yáñez, J. (2022). Análisis de una tarea sobre sucesiones desde el uso de las herramientas y el conocimiento matemático del profesor. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(2), 1-21. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3457.

Verdugo-Hernández, P. (2018). *Espacio de Trabajo Matemático del análisis: enseñanza de las sucesiones en los primeros años de universidad* [Tesis de doctorado, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile].

Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications. Design and methods* (6.ª ed.). Sage.

PRAXEOLOGÍAS PROPUESTAS PARA INTRODUCIR LA INTEGRAL DEFINIDA Y ESTUDIO DE LAS TÉCNICAS UTILIZADAS POR ESTUDIANTES DE INGENIERÍA CIVIL

Pilar Carrasco Espinoza[1], Roberto Vidal Cortés[2]

[1]Universidad del Desarrollo, [2]Universidad Alberto Hurtado

pcarrasco@udd.cl, rvidal@uahurtado.cl

En la enseñanza tradicional del Cálculo se suele dar énfasis en los procesos algebraicos, lo cual no permite una comprensión que recupere la razón de ser de la integral definida desde un punto de vista histórico - epistemológico. En esta comunicación, se exponen los resultados de un trabajo de maestría, de corte cualitativo, bajo un estudio de caso, por medio de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), que analizó las producciones de los estudiantes de Ingeniería Civil cuando son enfrentados a praxeologías cuyo propósito fue introducir la integral definida a partir del método de exhaución arquimediano para el cálculo de áreas, en contraposición con el modelo epistemológico dominante, en el cual el" problema del área" emerge como aplicación de la integral definida.

Método de exhaución, Integral definida, Cálculo integral, Teoría Antropológica de lo Didáctico.

INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones, como en Orton (1983a), Artigue (1991), Turégano (1998), Aldana (2011), reportan las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de la integral definida. Estas dificultades se manifiestan en la utilización mecánica, algorítmica y memorística del concepto de integral definida y la falta de conexión entre el pensamiento numérico, algebraico, geométrico y analítico. La enseñanza del cálculo está centrada en la presentación de definiciones y una excesiva algebrización, que, en el caso de la integral definida, queda relacionada con la aplicación de procedimientos mecanizados en actividades rutinarias que no evidencian su razón de ser de tipo histórica, la cual permite conectar la integral con el problema del cálculo de áreas.

Más aún, diversos libros de texto universitarios, por ejemplo, Zill y Wright (2011), Larson y Edwards (2010) que son frecuentemente recomendados, presentan una corriente formalista, proponiendo el estudio de la integral y el álgebra de integrales como conocimiento previo para llegar al capítulo de las aplicaciones de la integral.

Chevallard (2013) considera que el paradigma vigente, tal como aparece en los libros de cálculo citados en el párrafo anterior y en las instituciones educativas, se caracteriza por la *visita* a las obras matemáticas, que se presentan "como un monumento con valor por sí mismo, que los estudiantes deben admirar y disfrutar, aunque no sepan casi nada sobre sus razones de ser, ni actuales ni del pasado" (p.164). Ante este paradigma, propugna la necesidad de instaurar un nuevo paradigma pedagógico, que se caracterice por la necesidad de dotar de sentido y funcionalidad a las obras matemáticas que se estudian en instituciones educativas, lo que Chavallard denomina como paradigma del Cuestionamiento del Mundo, ya que pone en primer lugar el estudio de las cuestiones a las que las obras matemáticas podrían dar respuesta. En este sentido, se levanta una propuesta que recupera la historia de la integral, para analizar lo que producen los estudiantes cuando se enfrentan

a preguntas que reflejan la necesidad de construir un nuevo conocimiento. En nuestro caso, el de integral definida.

ANTECEDENTES

Orton (1983) realizó un estudio sobre la comprensión que tienen los estudiantes sobre la integración, en el cual, las preguntas planteadas involucraban la comprensión de la integración como límite de una suma, constituyendo una de las principales dificultades para los estudiantes. En Mundy (1984) se realizó una investigación sobre la comprensión visual de los estudiantes asociada a la integración de funciones positivas que evidenció que los estudiantes no relacionan la integral de dichas funciones con el área bajo la curva.

Artigue (1991), describe una serie de dificultades que surgen en un curso introductorio de cálculo en la enseñanza universitaria producto de la enseñanza tradicional basada en una excesiva algebrización, resaltando que hay un predominio a la determinación de primitivas en lugar de dar preferencia a la búsqueda de significados para la integral. En Turégano (1998) se propone una adaptación de la idea geométrica de la integral de Lebesgue que permita introducir la integral definida desde el cálculo de áreas. La hipótesis de trabajo de la autora es que los estudiantes pueden aprender, de forma intuitiva, conceptos de cálculo sin el dominio previo o simultáneo de las usuales habilidades algorítmicas, utilizando la visualización a través del ordenador para dar significado al concepto de integral definida y a sus propiedades mediante la idea de área bajo la curva.

Aldana (2011) desarrolla en su tesis doctoral una investigación donde resume los problemas de aprendizaje del concepto de integral definida, afirmando que los estudiantes identifican “integral” con “antiderivada” o “primitiva”. Esta identificación marca la relación algorítmica dominante entre la derivada y la integral. También afirma que los estudiantes, generalmente, identifican las integrales definidas con la regla de Barrow, incluso cuando ésta no se puede aplicar y por último, afirma que por la falta de relación entre el concepto de integral definida y el de área, los estudiantes no establecen conexión entre la representación gráfica y la representación algebraica de una función y no son capaces de calcular el área bajo una curva a partir de su gráfica. A partir de las dificultades que se han identificado, levantamos una propuesta para considerar la integral definida como primera unidad del curso de cálculo integral, es decir, sin definir previamente antiderivada.

Los cursos de cálculo diferencial e integral son considerados como base para el estudio de análisis matemático en carreras de ciencias e ingeniería. En la mayoría de las mallas curriculares de estas carreras en Universidades chilenas, se encuentra la secuencia de los cursos: cálculo diferencial -, cálculo integral - cálculo multivariable. En dichos cursos, los contenidos de cálculo integral habitualmente comienzan con la definición de antiderivada de una función, lo que conduce a la presentación de distintos métodos para obtener antiderivadas y posteriormente se estudian las aplicaciones de la integral definida, como el cálculo de área de una región, longitud de una curva, volumen de un sólido de revolución, entre otras. Desde los antecedentes descritos, anteriormente las investigaciones muestran las dificultades que tienen los estudiantes para la comprensión de la integral definida y la algebrización excesiva del cálculo, centrando la enseñanza de la integral en procedimientos algorítmicos para la búsqueda de antiderivadas, pero sin abordarla desde la razón de

ser histórica de la integral definida. A partir de lo anterior, es pertinente cuestionarnos sobre ¿Cuáles son las praxeologías que desarrollan estudiantes de ingeniería cuando se ven enfrentados a una propuesta que articula la génesis geométrica de la noción de integral definida con su posterior perspectiva analítica? Así, el objetivo de este estudio ha sido analizar las producciones de los estudiantes de segundo año de ingeniería civil frente a la secuencia de problemas de cálculo de áreas de regiones no poligonales, mediante el uso del método de exhaución para la introducción de la integral definida.

MARCO REFERENCIAL Y METODOLÓGICO

Este estudio se realiza en el marco de la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD en delante). Esta teoría sitúa la problemática en un nivel epistemológico e institucional. Parte de una concepción de la Didáctica de las Matemática como la ciencia que estudia la difusión y adquisición del conocimiento matemático (Chevallard y Sensevy, 2014).

En el ámbito de la TAD, se postula la existencia de fenómenos didácticos ligados a la relatividad institucional del conocimiento matemático y es por ello, que Gascón (2014) señala la necesidad del investigador de cuestionar tanto el modelo epistemológico global de las matemáticas, como los modelos locales de los saberes matemáticos vigentes en las instituciones que intervienen en los procesos de transposición didáctica. Según García et al. (2019) la actividad escolar de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas está mediada, y depende fuertemente del tipo de actividades que se planteen y de la manera en que el docente las gestione. En el sentido del nuevo paradigma propuesto por Chevallard (2013) de cuestionamiento de mundo, se implementó una secuencia didáctica para la introducción de la integral definida a partir del problema del cálculo de áreas. Los principios de la ingeniería didáctica (Artigue 2014) como metodología para el diseño en la TAD cuyos aspectos más importantes se resumen en la Figura 1.

Figura 1.

Ingeniería didáctica como metodología

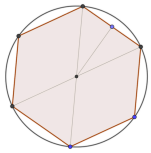
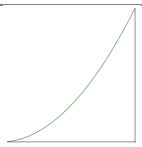
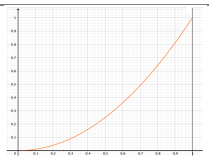
Fuente: Adaptado de Barquero y Bosch (2015, p.252)

Dado que el objetivo de este estudio es analizar las resoluciones de los estudiantes en su propio contexto natural y social, la metodología de estudio es de tipo cualitativa de paradigma interpretativo. El método es un estudio caso, realizado con un grupo de estudiantes de segundo año de la carrera de

ingeniería civil de la Universidad del Desarrollo, en Santiago de Chile. La organización matemática propuesta se presenta, en resumen, en la Tabla 1.

Tabla 1.

Resumen de organización matemática propuesta.

$\boldsymbol{OM_1}$: Calcular el área de un círculo de radio 1 mediante método de exhaución	$\boldsymbol{OM_2}$: Describir método para aproximarse al área de la región presentada	$\boldsymbol{OM_3}$: Describir estrategias para aproximarse al área de la región presentada en el plano cartesiano, asociada a la gráfica de una función
		

Fuente: Elaborado por autores.

RESULTADOS

Los análisis *a priori* y el *a posteriori* realizados en la secuencia implementada, se resumen en la Tabla 2

Tabla 2.

Resumen de análisis a priori y a posteriori realizado.

	Tareas	A priori	A posteriori
$\boldsymbol{OM_1}$	$T_{1,1}$: Relacionar los triángulos fundamentales de los polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia, con la cantidad de lados del polígono	Observación sobre la medida de los ángulos de los triángulos fundamentales,	Los estudiantes afirman que, a mayor cantidad de lados de los polígonos, habrá una mayor cantidad de triángulos fundamentales.
	$T_{1,2}$: Calcular el área del hexágono inscrito y circunscrito a una circunferencia de radio 1.	A partir de que el triángulo fundamental es equilátero, entonces la altura del triángulo puede obtenerse mediante teorema de Pitágoras para el caso del hexágono inscrito y en el circunscrito, la altura	Calcularon la altura de cada triángulo fundamental con el objetivo de obtener el área de uno de ellos, para calcular área total de ambos polígonos.

		coincide con el radio de la circunferencia. Ya obtenida la altura, se puede calcular el área del triángulo y posteriormente, multiplicarla por 6.	
	$T_{1,3}$: Construir sucesión de áreas de polígonos regulares inscritos a la circunferencia aumentando la cantidad de lados.	Identificar una sucesión creciente que representa las áreas de los polígonos inscritos e identificar otra sucesión decreciente que corresponde a las áreas de los polígonos circunscritos. Justificar que las sucesiones tienen el mismo límite que corresponde al área del círculo. En este caso, en ambos casos es π	A partir de las distintas áreas que se obtienen cuando aumenta la cantidad de lados, los estudiantes afirmaron que las áreas "se acercan" al mismo valor π, que el área de los polígonos se va acercando a la del círculo. "a medida que aumentan los lados, se va pareciendo a la circunferencia"
OM_2	T_2: Describir método para aproximarse al área de la región dada.	Subdividir la región dada mediante figuras conocidas como cuadrados, rectángulos, triángulos o circunferencias.	Subdivisión de la región dada utilizando rectángulos, cuadrados y circunferencia.
OM_3	T_3: Calcular el área de la región que está limitada por la gráfica de $f(x) = x^2$, la recta $x = 1$ y el eje de las abscisas para $x \in [0,1]$.	Subdividir la región dada y utilizando la información del gráfico para escoger una figura con la que se pueda obtener los datos necesarios para calcular el área.	Comentan cómo usarían alguna información del gráfico. Usan los valores mostrados en la cuadrícula del gráfico para obtener áreas de rectángulos, triángulos que están contenidos en la región entregada.

Fuente: Elaborado por autores.

CONCLUSIONES

El análisis de las producciones entregadas por los estudiantes fue separado en dos perfiles: los grupos formados por estudiantes que realizaban el curso por primera vez y aquellos que lo estaban cursando en una segunda oportunidad. En el caso del primer perfil de grupos, se notó una influencia del método de exhaución, ya que para las siguientes actividades donde los estudiantes debían proponer técnicas para calcular el área de la región entregada, utilizaron el método exhaustivo, proponiendo una subdivisión de la región inicial, respondiendo de manera acorde a lo esperado en el análisis a priori.

En los grupos de estudiantes que estaban cursando la asignatura por segunda oportunidad, respondieron en coherencia a lo esperado y a diferencia de los otros grupos, proponen directamente una integral definida para calcular el área de la región propuesta en la tercera actividad.

En general, se pudo concluir que introducir la integral definida desde el método de exhaución, promueve en los estudiantes la idea inicial de la subdivisión de una región, utilizando figuras conocidas, tales como rectángulos, triángulos y círculo en los casos analizados. Considerar un análisis histórico epistemológico del objeto matemático que se busca construir, es lo que permite comprender el cómo se construyó y evolucionó un objeto matemático y, con el fin de transitar desde el paradigma de la vista a las obras, hacia el cuestionamiento del mundo, vemos que la perspectiva histórica nos permite responder a este propósito. En el caso del método de exhaución, se pudo ver que, si la introducción a la integral definida comienza con la presentación del método de exhaución, lo que vemos como una oportunidad de construcción de la integral definida sin el uso de antiderivadas, priorizando una visión humana de la actividad matemática, historizada, temporalizada y contextualizada de su construcción, frente a una lista de reglas para calcular sin comprensión de lo que se está haciendo.

REFERENCIAS

Aldana, E. (2011). *Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE"*. [Tesis Doctoral, Universidad de Salamanca, España].

Artigue, M. (1991). Analysis. In Tall, D. (Eds.) *Advanced Mathematical Thinking*. *Mathematics Education Library* (Vol 11, pp. 167-198).

Artigue, M. (2014). Didactic Engineering in mathematics education. En S. Lerman (Ed), *Encyclopedia of Mathematics of Educaction* (pp. 159-162). Springer.

Barquero, B., y Bosch, M. (2015). Didactic Engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), Task design in Mathematics Education (pp. 249-272). Cham, Suiza: Springer.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemática en la sociedad del mañana: Alegato a favor de un contraparadigma emergente. *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161-182.

Chevallard, Y., y Sensevy, G. (2014). Anthropological approaches in mathematics education, Franch perspectives. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 38-43). Springer.

García, F. J., Baquero, B., Florensa, I., y Bosch M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de investigación en Educación Matemática*, 15, 75-94.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática,* (25 años), 99-1023.

Larson, R., Edwards, B., (2010) *Cálculo 1. De una variable*. McGraw_hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V.

Mundy, H., (1984). Analysis of errors of first year calculus students. En A. Bell, B. Low y J. Kilpatrick (Eds.), *Theory Research and Practice in Mathematics Education. Proceeding, ICME 5 Adelaide, Working group reports and collected papers* (pp. 170-172). Shell Centre for Mathematical Education Publications Ltd.

Orton, A. (1983). Student's Understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral: un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *16*(2), 233-249.

Zill, D., Wright, W. (2011) *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V.

ATENCIÓN SELECTIVA: ¿QUÉ OBSERVAN PROFESORES CON EXPERIENCIA EN UN VIDEO SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA RAÍZ ENÉSIMA?

Ledher M. López, Diana Zakaryan

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

ledherlopez@gmail.com, diana.zakaryan@pucv.cl

El noticing, como competencia profesional docente, se caracteriza por distintas dimensiones y niveles. En esta investigación, se considera la dimensión "atención selectiva" del noticing en profesores con experiencia. El estudio se realizó con seis profesores de matemáticas en servicio, quienes observaron un video y atendieron varios aspectos de la enseñanza de la raíz enésima. Los resultados presentan distintos niveles de noticing de los profesores estudiados: dos se encuentran en el nivel de base, dos en el nivel mixto y dos en el nivel enfocado. Se concluye sobre las posibles instancias que podrían ayudar al profesor a mejorar su atención selectiva.

Noticing, Atención selectiva, Profesores de matemática.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, el noticing se ha convertido en un tema de interés en el desarrollo profesional de los profesores (Dindyal et al., 2021). Se entiende por el noticing la competencia profesional que permite al profesor percibir y darse cuenta de eventos relevantes que suceden en el aula de clase y que permiten orientar la práctica docente hacia un aprendizaje significativo de los estudiantes. En el caso del profesor de matemáticas, se espera que esta percepción esté focalizada en aspectos matemáticos y en didácticos específicos de la matemática. Santagata et al. (2021) y Koning et al. (2022) han remarcado que una perspectiva de interés en el estudio del noticing está relacionada con la experiencia, específicamente, focalizándose en las diferencias entre profesores expertos y novatos. van Es (2011) identifica distintos niveles de desarrollo de la competencia noticing, los cuales relaciona con la expertise que los profesores tienen o que pueden adquirir tanto para poder percibir eventos importantes que suceden en el aula de clase como para interpretarlos. Por su parte, Konig et al. (2022) indican que, si bien los estudios centrados en dicha perspectiva son pocos deberían aumentarse en el futuro. Amparados en esta perspectiva, se ha realizado una investigación que permite aproximarnos a la forma en que el noticing de profesores de matemáticas en servicio emerge al observar una situación de aula para posteriormente comparar con el noticing de profesores en formación; y así, aportar a dicha perspectiva del estudio del noticing.

Konig et al. (2022) señalan que una de las características que presentan los estudios de noticing, los cuales han buscado la relación entre experto-novato, se encuentra en la utilización de diferentes definiciones de profesores en servicio como "expertos". La discusión sobre la caracterización de profesores expertos es un elemento que se escapa de este escrito, sin embargo, en esta investigación consideramos como profesor experto a los docentes en servicio, con cinco o más años de experiencia en aula. De este modo**,** en este documento**,** se presentan algunos resultados obtenidos del estudio con profesores en servicio.

NOTICING

En la literatura actual, el noticing ha sido conceptualizado de distintas perspectivas. En esta investigación, nos posicionamos desde la de van Es y Sherin (2021), quienes consideran tres dimensiones del noticing: atención selectiva, interpretación y dar forma. En este escrito, abordaremos la dimensión atención selectiva.

Atención selectiva

van Es y Sherin (2021) han teorizado que la dimensión *atender* consiste en identificar los acontecimientos que tienen lugar en el aula; y que, por lo tanto, esta dimensión consta de dos partes: (1) identificar las características notables de las interacciones en el aula y, (2) desatender características de las interacciones en el aula.

Esta dimensión del noticing hace referencia a dónde dirigen la atención los profesores en aula de clase. Y aunque los profesores no pueden centrarse en todo lo que sucede en el aula al mismo tiempo, pueden llegar a prestar atención a aspectos específicos relevantes en la enseñanza (van Es y Sherin, 2021). Mason (2002) señala que profesores con un alto nivel de sensibilización pueden notar intencionadamente características, eventos, interacciones, formas de pensar, estrategias, etc., que surgen en el aula de clase, hecho que les permite mejorar su práctica. Para van Es y Sherin (2021) mientras la atención del profesor se posiciona más en el pensamiento de los estudiantes o en los conceptos matemáticos, menos atención presta a otros aspectos que surgen de las interacciones.

Lee y Choy (2017), basados en el trabajo de van Es (2011), plantean cuatro categorías o niveles que responden a una trayectoria de desarrollo de la competencia noticing en profesores que participan en un club de video observando distintas clases de matemáticas: línea de base (*baseline*), mixto (*mixed*), enfocado (*focused*) y extendido (*extended*). En el **nivel línea de base**, los participantes, entendiéndose como los profesores que observan el vídeo, se centran en el ambiente, el comportamiento y el aprendizaje de toda la clase, es decir los estudiantes se perciben como un todo, además de esto se fijan en aspectos pedagógicos del profesor que imparte la clase en el vídeo. En este nivel, se encuentran los participantes que atienden detalles irrelevantes que no tienen un impacto directo en el aprendizaje de los alumnos. En el **nivel mixto**, los participantes siguen atendiendo principalmente los aspectos pedagógicos del profesor, pero empiezan a prestar atención a los aspectos particulares de los conceptos matemáticos, así como a los del pensamiento matemático de los alumnos y su comportamiento. En el **nivel enfocado**, los participantes atienden aspectos matemáticos particulares y las posibles confusiones que estos tendrían con los enfoques de enseñanza; además, atienden el pensamiento matemático de determinados alumnos. Esto se diferencia de los niveles anteriores en que el participante ya no se preocupa sólo por el profesor y mira más allá de toda la clase. Por último, en el **nivel extendido**, los participantes prestan atención a la relación que se presenta entre el pensamiento matemático de determinados estudiantes y las estrategias de enseñanza utilizadas por el profesor. En este nivel, el participante puede, por ejemplo, observar que determinados alumnos construyen soluciones diferentes para resolver un problema concreto y, a continuación, examinar las acciones del profesor para crear un entorno que fomentara que los alumnos compartieran múltiples soluciones (van Es, 2011).

METODOLOGÍA

La investigación se realizó con seis docentes de matemáticas con experiencia en educación secundaria, tres hondureños y tres chilenos. Para la recolección de datos se les presentó a los profesores un vídeo de una lección de matemáticas, de 9:30 minutos de duración. En el video se presentan determinados momentos de clase donde Ana, una profesora novel, imparte el tema de raíz enésima a estudiantes de 2do medio. Según declara la profesora, el objetivo de la clase ha sido enseñar a aproximar al concepto de raíz enésima a través del uso práctico del Teorema de Pitágoras y mediante el trabajo colaborativo. Los datos fueron recopilados entre septiembre y octubre de 2021 a través de un cuestionario en LimeSurvey a razón de las restricciones sanitarias vigentes frente al COVID-19. Este instrumento se conformó por cuatro secciones: introducción; siete preguntas generales; una pregunta abierta sobre el vídeo; y seis preguntas cerradas diseñadas para atender aspectos puntuales del vídeo. La pregunta abierta, la que presentamos en este documento, fue diseñada con el propósito de conocer aspectos que el profesor participante destaca en el vídeo, por lo tanto, la pregunta no limitaba los aspectos que el profesor podría notar en el vídeo. Esta pregunta se presenta de manera textual:

> *En función de lo que puedas observar o escuchar, en el espacio asignado escribe todos los aspectos que te llamaron la atención.*

Las respuestas de los profesores han sido analizadas según los cuatro niveles y sus descriptores propuestos por Lee y Choy (2017).

RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados emergidos del análisis de las respuestas de los seis profesores a la pregunta planteada al observar el video, agrupados según los distintos niveles de noticing. Para este proceso, a cada profesor participante se le asignó un número, según el orden en que había enviado la respuesta al cuestionario; P1, P2, P3, P4, P5 y P6.

Nivel línea de base

En este nivel, se encuentran dos profesores (P3 y P4) quienes se limitaron a realizar observaciones que se enmarcan en aspectos pedagógicos. Así, la atención del profesor P3 se centra en el clima de la clase, señalando “la falta de control y desorden” (se infiere que esta respuesta puede deberse al ruido provocado por los estudiantes en el vídeo). Aunque el profesor P4, este mismo hecho, reconoce como participación, igualmente, se observa en él una mirada orientada a la pedagogía general (cuando menciona “el aprendizaje basado en preguntas”). van Es (2011) plantea que es común que los profesores se fijen en aspectos generales que tienen que ver con prácticas pedagógicas (estrategias de la pedagogía general) más que aspectos particulares relacionados con el aprendizaje de los estudiantes, como es el caso de los profesores P3 y P4.

Nivel mixto

En el nivel mixto, se encuentran otros dos profesores (P2 y P5). En este nivel, los profesores ya no solo atienden aspectos generales del aula, sino que *comienzan* a ver con detalle aspectos matemáticos. El profesor P5 atiende aspectos generales del aula, señalando que “los estudiantes participan”. Percibe las prácticas pedagógicas del profesor del video, señalando “utilizó los conocimientos previos de los

estudiantes para introducir los conceptos nuevos.". Además, da indicios de comenzar a prestar atención a los conceptos matemáticos al indicar que el profesor "logra mostrar las diferencias entre los diferentes tipos de números", sin embargo, lo hace desde una mirada general ya que no profundiza más en su observación. El profesor P2, por su parte, también comienza a fijarse en aspectos matemáticos ya que en sus observaciones marca los momentos "La referencia a los sistemas numéricos" y "el momento cuando se cuestiona si 69,9 periódico es o no igual a 70." Tanto P5 como P2, aunque notan aspectos matemáticos no los relacionan con el pensamiento de los estudiantes o las confusiones que se pueda presentar en clase, simplemente las mencionan.

Nivel enfocado

En el nivel enfocado, se encentran dos profesores restantes (P1 y P6). A continuación, para este nivel, presentamos las transcripciones de las respuestas de los dos profesores (Tabla 1).

Tabla 1.

Transcripción de entrevista a profesor.

P1:	**[1]**	**0:59 La pregunta que hace referente a la similitud de los números es algo vaga…**
	[2]	1:45 Habla de conjuntos en vez de sistemas numéricos.
	[3]	2:00 Los números irracionales pueden seguir un patrón…
	[4]	4:25 Lenguaje ambiguo.
	[5]	5:30 "¿Es lo mismo 70cm al cubo que 69,9... bla bla?"…También me parece pertinente mencionar que el "69,9… bla bla" debiese ser nombrado de una mejor manera…
	[6]	6:20 Falta precisión…
	[7]	7:05 El objetivo es mencionado después de institucionalizar el contenido…

Como se puede observar, el profesor P1 atiende aspectos como el lenguaje (P1 [4]) y el objetivo de clase (P1 [7]) que corresponden a prácticas pedagógicas más generales. El P1, al igual que P5 y P2, atiende aspectos particulares de las matemáticas, pero va más allá, por ejemplo, en P1[1] considera que la pregunta respecto a la similitud de los números es vaga y requiere una mayor precisión y en P1[5], considera que la forma de mencionar "69,9… bla bla", debiese ser nombrado de una mejor manera, así como en P1[6] argumenta que se requiere mejorar la precisión al tratar con raíces con índice par. Inferimos que P1 manifiesta posibles confusiones que los aspectos matemáticos seleccionados tendrían con los enfoques de enseñanza.

Tabla 2.

Transcripción de entrevista a profesor.

P6:	**[1]**	**No logré comprender el objetivo de la clase.**
	[2]	Entiendo que la clase comienza con la definición de los números irracionales y, por medio de un problema contextualizado aplicando el teorema de Pitágoras, se busca mostrar que las raíces inexactas pertenecen a este conjunto.
	[3]	Cuestión que los estudiantes entienden a la perfección debido a que, cuando la profesora solicita ejemplos de números irracionales, los alumnos mencionan raíz de cinco y raíz de dos.

En cuanto al P6 (Tabla 2), podemos identificar, en su respuesta, atención a los aspectos pedagógicos, como el objetivo (P6 [1]), pero lo relaciona con aspectos particulares de las matemáticas y sus posibles confusiones, así, observa que la clase inicia con los números irracionales para luego utilizar el Teorema de Pitágoras para abordar el tema de raíces. Consecuentemente, relaciona estos conceptos atendidos con el pensamiento de estudiantes (P6 [2-3]). Lo anterior nos permite ubicar al P6 en el nivel enfocado.

De este modo, hemos caracterizado la atención selectiva de los seis profesores participantes al observar el video presentado, de acuerdo con los cuatro niveles de Lee y Choy (2017). Respecto a los niveles de noticing, los profesores se han ubicado en los tres primeros niveles y ninguno se ha aproximado al nivel extendido.

COMENTARIOS FINALES

Los resultados parciales de esta investigación permiten acercarse, desde la práctica, tanto a la comprensión de la dimensión de atender del noticing, como a identificar aspectos que posteriormente podrían usarse para trabajar con futuros profesores de matemáticas. Así, rescatamos la atención puesta sobre el cuestionamiento sobre si $69,\overline{9}$ es igual o no a 70, que, aunque suele pasar desapercibido, constituye un obstáculo epistemológico (Mena et al., 2015). Dicho obstáculo permite traer a discusión tópicos más complejos y que son fundamentales para la comprensión apropiada del concepto del infinito. Como señalan Santagata et al. (2021), desglosar el noticing de profesores expertos permite poner atención en las habilidades que los principiantes necesitan desarrollar, lo cual puede servir de base para diseñar experiencias de aprendizaje, estructurar programas de formación, y/o diseñar actividades que podrían apoyar el desarrollo del noticing en los profesores en formación. El noticing, como un constructo relativamente nuevo, promete convertirse en un elemento poderoso para el desarrollo profesional docente. Entre las dimensiones del noticing, la atención es el primer proceso que realiza el profesor, por tanto, potenciar dicha habilidad permitirá a los profesores atender aspectos más relevantes para favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

AGRADECIMIENTOS

Beca ANID Doctorado Nacional año 2021, folio: 21210589. Este trabajo está vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

REFERENCIAS

Dindyal, J., Schack, E.O., Choy, B.H., y Sherin, M.G. (2021). Exploring the terrains of mathematics teacher noticing. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 53*(1), 1-16.

König, J., Santagata, R., Scheiner, T., Adleff, A.-K., Yang, X., y Kaiser, G. (2022). Teacher noticing: A systematic literature review of conceptualizations, research designs, and findings on learning to notice. *Educational Research Review, 36*(100453).

Lee, M. Y., y Choy, B. H. (2017). Mathematical teacher noticing: The key to learning from lesson study. En E. O. Shack, M.H. Fisher, y J.A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 121–140). Springer International Publishing.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge.

Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J., Montoya, E., Morales, A., y Parraguez, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *18*(3), 329–358.

Santagata, R., König, J., Scheiner, T., Nguyen, H., Adleff, A.-K., Yang, X., y Kaiser, G. (2021). Mathematics teacher learning to notice: a systematic review of studies of video-based programs. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *53*(1), 119-134.

van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134-151). Routledge.

van Es, E. A., y Sherin, M. G. (2021). Extending on prior conceptualizations of teacher noticing. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 53*(1), 17-27.

¿QUÉ TIPOS DE TAREAS PROPONEN LOS FUTUROS PROFESORES PARA TRABAJAR LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA?

Carlos Ledezma, Gemma Sala-Sebastià, Vicenç Font

Universitat de Barcelona

cledezar25@alumnes.ub.edu, gsala@ub.edu, vfont@ub.edu

En esta comunicación se presentan los resultados preliminares de una investigación en curso, centrada en el análisis y clasificación de tareas propuestas por futuros profesores para trabajar la modelización matemática durante sus prácticas educativas. Para ello se revisaron los trabajos finales (TFMs) de los años académicos 2019–2020 y 2020–2021, elaborados por futuros profesores que cursaban un programa de máster profesionalizante para impartir docencia en educación secundaria y bachillerato en el contexto español. Algunas de las tareas incluidas en los TFMs tenían como propósito trabajar la modelización matemática, las cuales son el foco de esta investigación.

Modelización matemática, Problemas, Tareas.

INTRODUCCIÓN

La modelización matemática se ha hecho un espacio creciente a nivel mundial, tanto en el plano curricular como en su desarrollo competencial (Kaiser, 2020). Dada esta creciente importancia se ha asumido como principio que, a fin de educar a los estudiantes en modelización, se debe educar a los profesores con los contenidos y estrategias de enseñanza necesarios para la implementación de este proceso en el aula (Blum y Borromeo, 2009). En esta línea, Maaß (2007) plantea que la preparación de los futuros profesores debe contemplar experiencias con la modelización, donde una instancia conveniente es la práctica educativa.

En el contexto español, los futuros profesores deben cursar un máster profesionalizante para enseñar matemática en los niveles de educación secundaria obligatoria y bachillerato (estudiantes de 12 a 18 años). Para la obtención del grado, los futuros profesores deben elaborar un trabajo final (TFM), en el cual (a) se describe la unidad didáctica que implementaron durante sus prácticas educativas; (b) se analiza y reflexiona sobre la misma; y (c) se proponen cambios para su mejora. En algunas de estas unidades didácticas, los futuros profesores incluyen tareas que consideran como «tareas de modelización», las cuales son el interés de esta investigación.

En este sentido, esta investigación busca responder a dos preguntas: ¿Qué tipos de tareas proponen los futuros profesores para trabajar la modelización matemática?, ¿Son estas tareas realmente de modelización o de otro tipo? Para responderlas, en este escrito se reportan los resultados preliminares de una investigación en curso, en la que se revisaron los TFMs de – hasta el momento – dos años académicos de un programa de máster profesionalizante para la formación de profesores, y de los cuales se seleccionaron 10 tareas consideradas por sus autores como «tareas de modelización».

REFERENTES TEÓRICOS

Estas tareas se están analizando, por una parte, considerando sus características y, por otra parte, la clasificación correspondiente a cada tarea, todo esto, mediante los referentes teóricos aquí descritos.

El primer referente considerado corresponde a la caracterización de un problema de modelización que propone Borromeo (2018). En primer lugar, la tarea debe ser abierta y compleja, cuya resolución no se limite a una respuesta o procedimiento específicos, y donde los resolutores requieran buscar los datos relevantes. En segundo lugar, la tarea debe ser realista y auténtica, incorporando elementos del mundo real y presentando un contexto coherente con un hecho que ha ocurrido o que pueda ocurrir en la realidad. Finalmente, debe ser un problema que pueda ser solucionable mediante un ciclo de modelización, lo que implica la realización de todas las fases y transiciones que compongan un ciclo.

El segundo referente considerado es la clasificación de tareas de modelización que propone Maaß (2010). Esta clasificación considera aspectos tales como (a) los objetivos que se pretenden desarrollar con la tarea; (b) el tipo de individuos con los que se trabajará la tarea; y (c) las características de la tarea en cuestión. En la Tabla 1 se presentan las clasificaciones propuestas para las tareas de modelización y las categorías que conforman cada clasificación.

Tabla 1.

Esquema de clasificación de tareas de modelización.

Nombre de la clasificación	**Categorías de la clasificación**
I. Foco en la actividad de modelización	(a) Proceso completo; (b) Entender la situación; (c) Establecer un modelo real; (d) Matematizar; (e) Trabajar en la matemática; (f) Interpretar; (g) Validar.
II. Datos	(a) Superfluos; (b) Faltantes; (c) Superfluos y faltantes; (d) Inconsistentes; (e) Pareados.
III. Naturaleza de la relación con la realidad	(a) Auténtica; (b) Cercana a la realidad; (c) Incrustada; (d) Intencionalmente artificial; (e) Fantasía.
IV. Situación	(a) Personal; (b) Ocupacional; (c) Pública; (d) Científica.
V. Tipo de modelo	(a) Descriptivo; (b) Normativo.
VI. Tipo de representación	(a) Texto; (b) Imagen; (c) Texto e imagen; (d) Material; (e) Situación.

Fuente: Adaptado desde Maaß (2010, p. 296).

Las categorías I y II son para tareas que desarrollan sub-competencias de modelización; las clasificaciones III–V y (parcialmente) VI son para tareas que preparan a los estudiantes para su vida futura.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para este estudio se sigue una metodología de investigación cualitativa desde un paradigma interpretativo (Cohen et al., 2018), que consiste en el análisis de tareas propuestas por futuros profesores de matemática en sus TFMs y que ellos consideraron como «tareas de modelización».

El contexto de esta investigación es un programa de máster profesionalizante para profesores de matemática de educación secundaria obligatoria y bachillerato que imparten las universidades públicas de Cataluña (España). Este máster se estructura en tres módulos formativos: genérico, específico, y prácticas. Dentro del módulo de formación específica se incluye un submódulo sobre

modelización matemática, en que se enseña a los futuros profesores el ciclo propuesto por Blum y Leiß (2007). Dentro del módulo de prácticas, los futuros profesores son asignados a instituciones educativas bajo la guía de un profesor mentor, y es donde deben diseñar e implementar una unidad didáctica, tomando en cuenta el nivel educativo, el contenido matemático, el sistema de trabajo del centro educativo, etc.

Posterior a sus prácticas educativas, los futuros profesores deben elaborar un TFM en el cual, por una parte, deben valorar la idoneidad de la unidad didáctica implementada (véase un ejemplo en Ledezma et al., 2021) y, por otra parte, proponer cambios para su rediseño y mejora. Dentro de esta valoración, los futuros profesores comentan, entre otros aspectos, los procesos matemáticos (argumentación, algoritmización, resolución de problemas, modelización, entre otros) que trabajaron en sus unidades didácticas, para lo cual incluyen las tareas que diseñaron e implementaron, relacionando cada una con uno o más de estos procesos. Entre estas tareas se encuentran algunas que los futuros profesores consideraron como «tareas de modelización», las cuales son el foco de este estudio.

Para este estudio se seleccionaron los TFMs de los años académicos 2019–2020 y 2020–2021 del programa de máster antes descrito. Para la selección de tareas se reutilizaron las bases de datos generadas en dos estudios anteriores de los autores con los TFMs: uno del año académico 2019–2020 (véase Ledezma et al., 2022) y otro – en curso – del año académico 2020–2021. En ambos estudios se analizan los aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje que los futuros profesores priorizan cuando reflexionan en sus TFMs sobre la implementación de la modelización durante sus prácticas educativas. Dado que los datos de los TFMs del año académico 2021–2022 aún no han sido totalmente depurados, no se consideran en esta comunicación.

Ambas bases de datos permitieron saber cuáles son los TFMs que contienen referencias a la modelización en la reflexión de los futuros profesores sobre las unidades didácticas. Una vez identificados estos TFMs, se procedió a revisar cuáles de ellos describieron el diseño y/o implementación de tareas que los futuros profesores consideraron como «tareas de modelización». Finalmente, se seleccionaron estas tareas y se analizaron con los referentes descritos en la sección teórica, tomando en cuenta también la descripción de la implementación que realizó cada futuro profesor sobre estas tareas.

RESULTADOS PRELIMINARES

Dado que esta investigación se encuentra en curso, en esta sección se presentan los resultados preliminares con los que se cuentan. Para ello, se presentan dos tareas, las cuales son representativas de las 10 que se encontraron en los TFMs, clasificadas en dos grupos: «problemas de modelización» y «otros tipos de tareas», que se describen y analizan brevemente.

Dentro de los TFMs revisados se destacan dos tareas que pudieron ser consideradas como «problemas de modelización». Una de éstas es la tarea «¡Pizzas y ensaladas para todos!», extraída de una unidad didáctica para la enseñanza del álgebra en el tercer curso de educación secundaria (con estudiantes de 14–15 años).

¡Pizzas y ensaladas para todos!

Nos reunimos tres amigos para ver un partido y, como no queremos cocinar, compramos tres pizzas y dos ensaladas iguales a la compañía MenjaSA – uno de los tres no quería ensalada. Nos dimos cuenta de que sólo tenemos el precio total de esta compra, que fue de 19,90€

El enunciado de la tarea presenta una situación *abierta, compleja, realista, y auténtica.* Además, en la descripción de su implementación, el futuro profesor declara que planteó esta tarea como un desafío para los estudiantes como parte de una evaluación formativa de la unidad didáctica, enfocada en sus habilidades en modelización. De este modo, se puede considerar como un *problema* que es *solucionable mediante un ciclo de modelización.*

Dentro de los TFMs revisados se destacan ocho tareas que pudieron ser consideradas como «otros tipos de tareas». Si bien los futuros profesores que las diseñaron e implementaron consideraron que eran «tareas de modelización», no cumplen con las características para ser consideradas como tal. Una de éstas es la tarea «El problema de la tirolina», extraída de una unidad didáctica para la enseñanza de la geometría en el segundo curso de educación secundaria (con estudiantes de 13–14 años).

El problema de la tirolina

Queremos hacer una tirolina entre dos edificios. Uno mide 35 metros de altura y los otros 25 metros, y están separados por una distancia de 25 metros. Si queremos hacer una tirolina desde el punto más alto de un edificio hasta el punto más alto del otro, ¿cuántos metros de cuerda necesitamos?

El autor de la tarea considera que es una «tarea de modelización» porque está situada en un contexto no-matemático. La resolución de la tarea implica la aplicación del teorema de Pitágoras para responder a la pregunta que plantea. La tarea se asemeja a un enunciado verbal que añadió elementos matemáticos a un contexto más o menos real.

En la Tabla 2 se presentan las categorizaciones correspondientes a la clasificación de las dos tareas presentadas y analizadas en esta sección.

Tabla 2.

Esquema de clasificación para las dos tareas.

Tareas	**Clasific. I**	**Clasific. II**	**Clasific. III**	**Clasific. IV**	**Clasific. V**	**Clasific. VI**
Pizzas y ensaladas para todos	Proceso completo	Faltantes	Auténtica	Personal	Descriptivo	Texto e imagen
El problema	Trabajar en la matemática	Pareados	Intencionalmente artificial	Ocupacional	Normativo	Texto e imagen

de	la	
tirolina		

CONSIDERACIONES FINALES

De los resultados preliminares que se tienen de esta investigación se pueden destacar dos aspectos. En primer lugar, a partir de la revisión de las descripciones de los TFMs, las tareas propuestas no se analizaron desde un ciclo de modelización, a pesar de que el programa de máster incluye la enseñanza del ciclo propuesto por Blum y Leiß (2007) en el submódulo correspondiente. Del mismo modo, los futuros profesores no cuestionaron en sus TFMs si las tareas propuestas cumplían o no con las condiciones para ser consideradas como «tareas de modelización», proponiendo rediseños que, en algunos casos, reducían la calidad de los enunciados para privilegiar otros aspectos (tiempos curriculares, nivel de los estudiantes, etc.); lo cual coincide con los hallazgos de Ledezma et al. (2022).

En segundo lugar, los futuros profesores consideraron como «tareas de modelización» a enunciados con un contexto relativamente real, reduciendo el proceso de modelización a la matematización de un enunciado escrito. Ante esto emergen preguntas sobre la preparación de los futuros profesores como, por ejemplo, ¿conocían las características de un problema de modelización?, ¿consideraron las experiencias previas en modelización de los estudiantes? Derivado de lo anterior, se identificó una tendencia a privilegiar los aspectos matemáticos por sobre los del mundo real, siendo que estos últimos son la esencia de los problemas de modelización, y que se manifestó, por ejemplo, en la desconsideración de fases como la interpretación de los resultados matemáticos en resultados reales y su posterior validación en el contexto de la situación real planteada a los estudiantes.

AGRADECIMIENTOS

Estudio realizado en el marco del Proyecto ANID/PFCHA nro. 72200458 (Chile), y del Proyecto de Investigación en Formación del Profesorado PID2021-127104NB-I00 (MINECO/FEDER, UE).

REFERENCIAS

Blum, W., y Borromeo, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45–58.

Blum, W., y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Educa-tion, Engineering and Economics* (pp. 222–231). Horwood. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Borromeo, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education* (8ª ed.). Routledge.

Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2da ed., pp. 553–561). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_101

Ledezma, C., Breda, A., Sánchez, A., y Sala, G. (2022). Didactic suitability criteria related to reflection on the implementation of mathematical modelling in a virtual context. En *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. CERME12.

Ledezma, C., Sala, G., Breda, A., y Sánchez, A. (2021). Analysis of a preservice teacher's reflection on the role of mathematical modelling in his master's thesis. En M. Inprasitha, N. Changsri y N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 195–204). PME.

Maaß, K. (2007). Modelling in class: What do we want the students to learn? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 63–78). Horwood. https://doi.org/10.1533/9780857099419.2.63

Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(2), 285–311. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0010-2

ESTUDIO DE LA RELACIÓN ENTRE CREENCIAS Y PRÁCTICAS DE PROFESORES: LA MANIFESTACIÓN DE LA CREENCIA

Graciela Rubi Acevedo Cardelas, Luis Roberto Pino-Fan

Universidad de Los Lagos

gracielarubi.acevedo@alumnos.ulagos.cl, luis.pino@ulagos.cl

El estudio de la relación entre creencias y prácticas de profesores de matemáticas ha sido tema de interés, aunque también de controversia, dentro de la Matemática Educativa. Varios investigadores han señalado tanto dificultades teóricas (definición y caracterización de las creencias), como metodológicas (herramientas usadas en los trabajos) para su estudio. En particular, en este trabajo nos centramos en los elementos que se consideran manifestaciones de la creencia, lo cual involucra ambos aspectos. Describimos la perspectiva usada en algunos trabajos, en referencia a este concepto, y presentamos una propuesta basada en la noción de 'norma' propuesta por el Enfoque Ontosemiótico (EOS).

Profesores, Creencias, Manifestación de la creencia, Normas.

INTRODUCCIÓN

El interés de la Matemática Educativa por el estudio de la relación entre creencias de profesores de matemáticas, con respecto a sus prácticas, ha sido visible a través de los diversos estudios y los trabajos de síntesis de estos (Leder et al., 2003; Pajares, 1992; Thompson, 1984). Sin embargo, estos trabajos dan cuenta de la complejidad que ha implicado el estudio de las creencias, desde perspectivas teóricas y metodológicas. Esto ha derivado en la producción de estudios en los que se concluye la consistencia entre las creencias de los profesores con sus prácticas, y aquellos en los que se identifican incongruencias (Fives y Buehl, 2012).

Con respecto a las dificultades teóricas, trabajos como el de Furinghetti y Pehkonen (2002) muestran las diversas definiciones y caracterizaciones que se han hecho de las creencias e identifican varios puntos de discrepancia entre ellas, dentro de los cuales destacan la relación entre creencias y conocimiento, el calificarlas como "incontrovertibles" y su relación con las concepciones. El tener tan variadas caracterizaciones no permite tener consenso respecto a las funciones de las creencias, tales como que, si son explícitas o implícitas, estables o dinámicas e individuales o sistémicas (Fives y Buehl, 2012).

Las dificultades metodológicas en el estudio de las creencias han sido documentadas, señalando la complejidad que implica el "acceder" a las creencias de los individuos. Esto hace visible la relevancia que cobran algunos aspectos, como el lenguaje, el uso de categorías o las herramientas metodológicas utilizadas en este tipo de trabajos. Los problemas asociados al lenguaje se pueden observar, por ejemplo, en aquellos trabajos en los que se utilizan los auto-reportes (Speer, 2005) para analizar las prácticas de los profesores; ya que la interpretación que un profesor expresé de lo que hizo, puede no estar alineada con la conceptualización que tiene el investigador de esos mismos términos (di Martino y Sabena, 2010). Por otro lado, algunos autores han optado analizar las creencias y las prácticas de los profesores utilizando categorías e indicadores; los cuales podrían influenciar de manera no intencionada los análisis de las investigaciones (Speer, 2005).

Estos aspectos dejan ver la pertinencia del desarrollo de aspectos teóricos y metodológicos que permitan la producción de conocimiento científico en esta línea de investigación. En particular, el de determinar en qué aspectos debemos fijar la atención al momento de analizar las prácticas de los profesores; es decir, cuáles serían aquellos elementos en donde se manifiestan las creencias. De tal manera que, a partir de ellos podamos estudiar cuáles son las creencias que dieron lugar a las acciones de los docentes. Si bien, esto constituye una decisión metodológica, desde luego, tendrá que estar alineado con la caracterización que se haya dado de lo que son las creencias.

Este trabajo tiene como finalidad explorar cuáles han sido los elementos, utilizados en la literatura, como manifestaciones de las creencias; así como proponer una alternativa, basada en nociones propias del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS).

LA MANIFESTACIÓN DE LAS CREENCIAS EN LOS PROCESOS DE ESTUDIO

A continuación, describimos dos aproximaciones al estudio de las creencias que nos permiten distinguir la manera en que algunos autores han concebido que las creencias se manifiestan en los procesos de estudio.

Manifestación de las creencias en las valoraciones cognitivas y en ciertos enunciados

Hernández y colaboradores (2020) extienden la clasificación usada comúnmente para el estudio de las creencias –creencias profesadas y creencias atribuidas– a la de *creencias implícitas*, definiéndolas como "aquellas que podemos identificar a través de la valoración cognitiva de las situaciones que desencadenan emociones de los profesores" (Hernández et al., 2020, p. 103). Esta definición implica una visión de las creencias como antecedentes de estas valoraciones, por lo que consideran a éstas últimas como los elementos en donde se manifiestan las creencias.

En este estudio, se les pidió a los profesores sujetos de estudio que mandaran sus auto-informes al terminar su clase a través de WhatsApp. Para ello usaron un protocolo con preguntas abiertas de tres tipos: de control, para conocer sus valoraciones cognitivas del proceso de instrucción y para conocer sus creencias matemáticas profesadas. Estas últimas enfocadas en identificar cambios de creencias.

Para su análisis, los autores transcribieron y se familiarizaron con el lenguaje de los profesores, identificaron extractos que contuvieran valoraciones cognitivas (distinguiendo entre las positivas y las negativas) e infirieron creencias implícitas, a partir de ellas. Además, analizaron el resto de las respuestas para identificar las creencias profesadas.

De esta manera, los autores distinguen a las valoraciones cognitivas como manifestaciones de las creencias implícitas. Y a las oraciones expresadas por los profesores que comienzan con "yo creo que…", "para mi…", "yo pienso que debe ser…", "tal cosa es…", "la verdad es…", "siempre se debe de…", "para… se tiene que", como manifestaciones de las creencias profesadas.

Manifestación de la creencia en los cambios de metas

Por su parte, Aguirre y Speer (2000) basan su estudio en un modelo del proceso de enseñanza que brinda una descripción detallada de las interacciones que se llevan a cabo en el aula, en función de las *metas* y las acciones de los profesores. Aquí, las *metas* son entendidas como "construcciones cognitivas que describen (en varios niveles de detalle) lo que el maestro quiere lograr" (Aguirre y Speer, 2000, p. 332). Este modelo señala que existen varios factores que tienen influencia en dichas

metas: contexto social, conocimientos matemáticos, conocimientos pedagógicos y las creencias. Las investigadoras centran su interés en el análisis de la manera en que las creencias influencian la formación y priorización de las *metas* de los profesores. Para efectos de su estudio, definen las creencias como "filosofías personales (a menudo implícitas) que consisten en concepciones, valores e ideologías" (Aguirre y Speer, 2000, p. 332).

Para su análisis, dividen los videos y audios de las clases en conjuntos coherentes de acciones, denominadas "secuencias de acciones". A partir de ellas, infieren las *metas* y los "planes de acción" (lo que el profesor hace para lograr sus *metas*) que influyen en las interacciones. Este análisis les permite determinar momentos en los que los profesores abandonan o cambian sus *metas*. Este es un aspecto crucial en su investigación, al considerar que un cambio en estas *metas* puede hacer evidentes las creencias y permitir estudiar la manera en que esto influye en la formulación de una nueva *meta*. Posteriormente, cuestionan a los profesores respecto a estos cambios en las *metas* y, a partir de sus respuestas, determinan el *conjunto de creencias* que dieron lugar a dichos cambios.

Las investigadoras precisan que tanto las creencias como las *metas* que ellas infieran pueden no ser expresadas exactamente como el profesor las concibe, sino que cuando dicen que un profesor tiene cierta creencia o meta, se refieren a que se está comportando de manera consistente con esa creencia o *meta*.

De esta manera, podemos identificar que, para estas autoras, los cambios en las *metas* de los profesores son considerados como las manifestaciones de las creencias. Por lo tanto, es a partir de ellas, que identifican los *conjuntos de creencias* que dan lugar a los cambios.

LAS NORMAS EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

En Matemática Educativa las nociones de *contrato didáctico* y *normas sociomatemáticas* han buscado identificar aquellos elementos que condicionan la construcción de significado en un proceso de estudio. La primera noción se utiliza para referirse a las relaciones que determinan, implícitamente, lo que el profesor y los alumnos tienen que hacer y las responsabilidades que tienen ante el otro (Brousseau, 1986). Las *normas* han sido estudiadas dividiéndolas en normas sociales -regularidades en los patrones de interacción que regulan las interacciones sociales en el aula-, normas sociomatemática -regularidades en los patrones de interacción que son específicas del estudio de las matemáticas- (Yackel y Rasmussen, 2002).

Estas nociones han sido retomadas y ampliadas por el Enfoque Ontosemiótico (Godino et al., 2009), derivando en una tipología de normas que permite fijar la atención en: las matemáticas susceptibles de ser enseñadas y aprendidas en una institución -*normas epistémicas*-, la manera en que los alumnos construyen y comunican las nociones, procesos y significados matemáticos -*normas cognitivas*-, las interacciones docente-discente y discente-discente -*normas interaccionales*-, el uso de recursos humanos, materiales, tecnológicos y temporales -*normas mediacionales*-, la afectividad de las personas que intervienen en el proceso de estudio -*normas afectivas*- y la relación con el entorno en el que se desarrolló el proceso de estudio -*normas ecológicas*-.

Si bien, las *normas* son consideradas como tales debido a su regularidad en el proceso de estudio, en Planas e Iranzo (2009) se distingue entre "normas" e "intenciones de norma". Considerando que a las últimas como normas que no han sido establecidas, dado que no se puede identificar un patrón de

comportamiento dentro del proceso de estudio, pero que se pueden identificar en el proceso de instrucción ya que tienen un reconocimiento por los sujetos que las sostienen, y reflejan sus expectativas de actuación. En el caso de los profesores de matemáticas estas intenciones normativas implican la manera en la que consideran que deben comportarse los distintos objetos matemáticos, las obligaciones y conductas que sus alumnos deberían tener, entre otros.

LA MANIFESTACIÓN DE LA CREENCIA EN LAS NORMAS E INTENCIONES DE NORMAS

Compartimos la visión de que las creencias, al ser disposiciones para la acción, implican expectativas que regulan nuestro actuar ante el mundo; es decir, "pueden concebirse como un 'patrón' o 'regla' de conducta" (Villoro, 1982) que explica por qué actuamos de cierta manera y no de otra.

Lo anterior se puede identificar en las aproximaciones teóricas descritas previamente, ya que en el caso de Hernández y colaboradores (2020), el cumplimiento -o no- con la norma esperada por el profesor daba lugar a valoraciones cognitivas (positivas o negativas); mientras que en Aguirre y Speer (2000), los cambios en las *metas* de los profesores daban cuenta de las reglas que los profesores pretendían establecer en el proceso de estudio.

De esta manera, proponemos el estudio de las creencias de los profesores a través del análisis de las normas e intenciones de normas que los docentes ponen en juego en un proceso de estudio; considerando a la norma e intención de normas como elementos donde se manifiestan las creencias.

Un proceso de estudio puede ser analizado a través de los diversos niveles propuestos por el EOS (Godino et al., 2009); de tal manera que, al identificar las normas e intenciones de normas de acuerdo con su tipología, sea posible tener insumos con los cuales conjeturar posibles creencias que expliquen las decisiones y acciones de los profesores. Estas conjeturas podrán ser contrastadas, posteriormente, con los profesores a través de entrevistas.

CONCLUSIONES

El estudio de las creencias de profesores de matemáticas implica una diversidad de complejidades teóricas y metodológicas. Al centro de ellas se encuentra la manifestación de la creencia, al ser el punto en el cual se podrán hacer operativas las nociones teóricas.

Dado que las creencias implican reglas de actuación, proponemos considerar a las normas y a las intenciones de norma como la manifestación de la creencia. Esta idea se puede hacer operativa gracias a los diversos niveles de análisis y la tipología de normas propuestas por el EOS.

REFERENCIAS

Aguirre, J., y Speer, N. (2000). Examining the Relationship Between Beliefs and Goals in Teacher Practice. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(3), 327–356.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomenes d 'enseignement des mathématiques.* Univeridad de Bordeaux.

di Martino, P., y Sabena, C. (2010). Teachers' beliefs: the problem of inconsistency with practice. *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 2, pp. 313-320). PME.

Fives, H., y Buehl, M. M. (2012). Spring cleaning for the "messy" construct of teachers' beliefs: What are they? Which have been examined? What can they tell us? En K. R. Harris, S. Graham, y T. Urdan (Eds.),

Educational Psychology Handbook: Vol. 2. Individual Differences and Cultural and Contextual Factors (Vol. 2, pp. 471–499). American Psychological Association.

Furinghetti, F., y Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. En G. Leder, E. Pehkonen, y G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 39–58). Kluwer Academic Publishers.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., y de Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de Las Ciencias*, *27*(1), 59–76.

Hernández, A., Arellano, Y., y Martínez, G. (2020). Creencias matemáticas profesadas e implícitas de profesores universitarios de matemáticas. *Educación Matemática*, *32*(2), 99–121.

Leder, G. C., Pehkonen, E., y Törner, G. (Eds.). (2003). *Beliefs: A hidden variable in Mathematics Education?* Kluwer Academic Publishers.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy Const. *Review of Educational Research*, *62*(3), 307–332.

Planas, N., y Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de Matemáticas. *Systematic Theory of Argumentation: The Pragma-Dialectical Approach*, *12*(2), 179–213.

Speer, N. (2005). Issues of methods and theory in the study of mathematics teachers' professed and attributed beliefs. *Educational Studies in Mathematics*, *58*, 361–391.

Thompson, A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 105–127.

Villoro, L. (1982). *Creer, saber, conocer* (8va ed.). Siglo veintiuno editores.

Yackel, E., y Rasmussen, C. (2002). Beliefs and norms in the mathematics classroom. En G. C. Leder, E. Pehkonen, y G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 313–330). Kluwer Academic Publishers.

INNOVACIÓN CURRICULAR Y REFLEXIONES DIDÁCTICO DISCIPLINARES EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS

Leslie Jiménez, Alicia Zamorano-Vargas

Universidad de Chile

jpleslie@uchile.cl, alicia.zamorano@uchile.cl

Este trabajo comunica parte del proceso de innovación curricular realizado por una carrera de pedagogía en matemáticas y las reflexiones que matemáticos, matemáticas y didactas de la matemática realizaron en conjunto. Nos enfocamos en los cursos de primer año de matemáticas y los cursos de didáctica de la matemática, mostrando dos tareas propuestas y la progresión de las competencias trabajadas en dos evaluaciones; una en primer año y la otra en tercero. Concluimos que la integración de la matemática y su didáctica y una revisita a la matemática escolar es clave para la formación del profesorado de matemáticas.

Formación inicial docente, Profesorado de matemáticas, Educación superior.

INTRODUCCIÓN

La formación del profesorado de matemáticas está bajo la tutela de varios grupos de profesionales: docentes escolares, didactas de la matemática y de matemáticos y matemáticas de profesión, donde estos dos últimos grupos son los que aportan directamente en la formación inicial, desde la universidad. Son también estos últimos grupos de profesionales quienes generalmente deciden qué matemática se enseñará durante la formación inicial. Siguiendo esta idea es que durante el 2018- 2019 se realizó una innovación curricular en una carrera de pregrado de formación de profesores y profesoras de matemática que permitió desarrollar un trabajo conjunto entre matemáticos, matemáticas y didactas de la matemática para la creación de una malla curricular que atendiera a las necesidades formativas de un docente de matemáticas de enseñanza secundaria.

LA INNOVACIÓN CURRICULAR

Basada en las nuevas leyes chilenas en la formación del profesorado, los procesos de acreditación que nos permiten autoevaluarnos y las diversas investigaciones en didáctica de la matemática (Artigue, 1998a; 2003b), se hizo un proceso de innovación curricular profundo de la carrera. Para la realización de esta innovación, además se trabajó en torno a competencias que tienen como propósito desde el primer semestre y que se integra en los cursos de matemática disciplinar y los cursos de didáctica de la matemática.

Los cursos de matemática disciplinar

En particular, en los cursos de matemáticas de primer año, nos enfocamos en la brecha entre la matemática de la enseñanza media y del primer año de universidad, tomando en cuenta además nuestra experiencia en investigación en matemática y docencia universitaria. Los cursos de primer año propuestos se hacen cargo de gran parte de los ejes temáticos de números, álgebra, funciones, procesos infinitos, geometría y algunas nociones básicas de probabilidades, propuestos por el ministerio para los cursos de enseñanza media de matemáticas; así como también se trabaja en ellos,

las habilidades exhibidas en el currículo nacional; a saber, representar, argumentar y comunicar, modelar y resolver problemas. La idea fundamental es facilitar el tránsito entre la enseñanza media y la universidad revisitando desde una perspectiva universitaria contenidos del currículum escolar para luego dar paso a conceptos propios del nivel universitario. Todo lo anterior siendo coherentes con las competencias y sub-competencias declaradas en el perfil de egreso de la carrera y en consideración al modelo educativo de la universidad (Modelo educativo, 2021).

Los cursos de didáctica de la matemática

En conjunto con la innovación en los cursos de la línea matemática, también se realizaron modificaciones importantes a la cantidad de cursos y a los temas a trabajar en los cursos de didáctica de la matemática.

En la malla actual de la carrera se incluyen dos cursos, en noveno y décimo semestre, que permiten tratar temas de enseñanza de matemáticas propiamente tal y que se desarrollan en una sesión semanal.

En cambio con la innovación se incluyen nuevos cursos y de forma más temprana, a) Didáctica y Pedagogía de las ciencias exactas donde se estudian por primera vez, teorías propias de la didáctica de la matemática y su relación con la práctica docente (sexto semestre); b) Didáctica de la matemática y práctica pedagógica, curso que se introduce en temas de enseñanza de la matemática y su planeación para la enseñanza en el contexto escolar (séptimo semestre); c) Didáctica de la matemática y práctica profesional I y didáctica de la matemática y práctica profesional II (noveno y décimo semestre) que se centran en el diseño e implementación de clases para analizar y discutir los errores frecuentes y las acciones de mejora para la gestión de la enseñanza y la adquisición de herramientas profesionales.

Formación de primer año en los cursos de matemática

Estos cursos propuestos durante el proceso de innovación e implementados desde el año 2020, proporcionan una mirada de la matemática universitaria y secundaria desde diferentes ángulos y dominios, los cuales se integran durante su desarrollo. Aquí se ejecutan principios claves de la innovación realizada para la formación inicial docente que hacemos, dejando de hacer cursos que promueven sólo un estudio formal de las matemáticas ignorando los requisitos de la escuela (Cooney 1988; Romberg 1988).

El primer semestre se realizan cursos de Introducción: al cálculo (9 SCT), el cual motiva nociones claves del cálculo diferencial, a partir de la exploración de procesos asequibles para los estudiantes, con el fin de que desarrollen el pensamiento matemático continuo e infinitesimal, Introducción al álgebra y a la geometría (9 SCT), cuyo propósito es que el estudiante conozca diferentes estrategias para el desarrollo del pensamiento matemático finito y discreto, y los talleres (como parte de los cursos de introducción), los cuales dan un espacio al estudiantado para trabajo personal y colaborativo con la guía de un/a profesor/a y ayudantes. Los problemas matemáticos son propuestos desde una mirada didáctica-disciplinar.

El segundo semestre se hacen dos cursos, como continuación de los cursos de introducción (8 sct cada uno) y tienen como objetivo sentar las bases elementales para el trabajo matemático posterior, a través de la revisión de parte de los ejes temáticos y de los estándares del profesor de educación media, continuando lo visto en el primer semestre.

Ejemplos de problemas en cursos de primer año

El primero dado en contexto de trabajo de taller grupal intenta promover el razonamiento inductivo (Gómez-Chacón, 2009), facilitar el trabajo colaborativo y la argumentación y el encuentro de una expresión general de una sucesión. El segundo está dado en contexto de una tarea del curso con tiempo de una semana, posterior a la resolución en taller de un problema exploratorio similar con la función $f(x) = x$, tiene como objetivos, visualizar la definición epsilon-delta para el límite de una función real con el uso de un deslizador de GeoGebra y trabajar nociones del análisis matemático y el pensamiento infinitesimal.

Encontremos la sucesión de Fibonacci (propuesta y analizada en Jiménez, (2021)

Fibonacci en su libro de aritmética y álgebra "Liber Abaci" que escribió en 1202 estudiando la reproducción de conejos a campo abierto, nota que, teniendo una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado, cada pareja nueva necesita un mes para envejecer y al segundo mes de vida produce otra pareja; cada mes siguiente procrea una pareja.

¿Puede decir cuántas parejas han sido procreadas al cuarto mes?

¿Cuántas parejas son procreadas en un año?

¿Puede realizar un esquema o diagrama que indique cómo obtuvo sus respuestas anteriores?

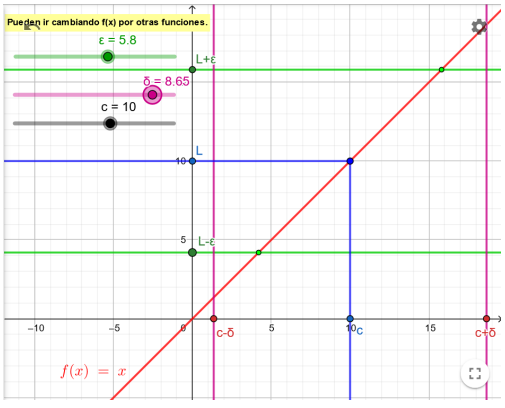
¿Puede encontrar una sucesión de números cuyos términos determinen el número de parejas procreadas en cada mes?

Experimentando con la definición de límite Epsilon-Delta (propuesta curso cálculo 2022)

Usando el mismo programa usado en el taller grupal calificado del pasado Lunes 22, el cual se puede encontrar en este link https://www.geogebra.org/m/gryuvahs. Encuentre todos los valores de δ válidos para que se verifique que el límite de la función polinomial f dada por f(x)= x^3+1 en c=1,5 es igual a 4,375 con ε = 2,051. Al ingresar al link verán algo así, en GeoGebra:

Figura 1.

Visualizando épsilon-delta en GeoGebra.



INTEGRACIÓN DIDÁCTICO DISCIPLINAR EN LOS CURSOS DE MATEMÁTICAS Y DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Se propone también un tránsito desde una evaluación tradicional a una que mide habilidades y competencias progresivamente. En particular lo que mostraremos a continuación trabajan dos competencias del perfil de egreso: la competencia D1, que apunta a dominar los tópicos básicos y avanzados en matemática y así fomentar el pensamiento científico de la matemática y la capacidad de resolver y proponer problemas y la competencia D3, que propone el diseño, implementación y evaluación de secuencias didácticas para la enseñanza de las matemáticas considerando la epistemología de la disciplina teniendo en cuenta las bases curriculares vigentes.

Disertación en primer año en cursos de Introducción al cálculo y Cálculo

Consiste en presentar la resolución de un problema dado en una de las tareas del curso (p.ej. el problema anterior es parte de la tarea 1 del 2022). Las tareas son dadas 2 semanas antes de la disertación. Una semana antes cada estudiante entrega la tarea completa por escrito, y luego elige un problema para disertar. La disertación debe estar preparada tanto oralmente como en un ppt. o canva o documento con su resolución y presentarla en no más de 7 minutos. Se consideran 3 min de preguntas por parte de la profesora y/o ayudantes. Esta evaluación vale el 30% de la nota final del curso, y tiene una rúbrica con los siguientes indicadores, considerando niveles bajo, medio, alto y muy alto: 1) uso de definiciones y conceptos, 2) argumentación de la solución del problema, 3) comunicación de su respuesta (expresión oral), 4) presentación en ppt. o word, 5) responde correctamente las preguntas, y 6) tiempo máximo establecido.

En la versión 2022 del curso se ha incluido en el programa del curso una tabla de correspondencia entre las evaluaciones y las competencias y resultados de aprendizaje (RA) declarados. En el caso de este instrumento, se declaran principalmente que el estudiantado desarrolla la habilidad para argumentar y comunicar de manera oral y escrita, resultados, hechos y demostraciones rigurosas de resultados y propiedades del cálculo infinitesimal, y que sea capaz de elaborar secuencias didácticas en grupo, para ejecutarlas en el aula, analizando su práctica pedagógica asociada en el ámbito del cálculo diferencial e integral. Estos RA tributan a competencias bien definidas en el perfil de egreso en el ámbito didáctico-disciplinar.

Actividades matemáticas para la enseñanza escolar en el curso de Didáctica y Pedagogía de las ciencias exactas

En el curso de sexto semestre de la carrera la evaluación está asociada al resultado de aprendizaje: valoran el conocimiento disciplinar y escolar de la matemática para la creación de oportunidades de aprendizaje adecuadas a los contextos escolares.

La tarea evaluativa consiste en la elección de una actividad matemática que está asociada a un objetivo de aprendizaje curricular y que se justifica tanto desde el punto de vista de las teorías didácticas estudiadas como del conocimiento matemático disciplinar que está presente en la actividad para el aprendizaje.

CONCLUSIONES

Este trabajo conjunto está impactando directamente en las matemáticas que se enseñan a nivel universitario y confiamos impactará en la enseñanza futura que realizará el estudiantado como docente en el futuro (Ruthven 2011 et al., 2018).

La innovación curricular ha intencionado que sea visible para los y las estudiantes la coherencia entre la matemática disciplinar de los cursos de la línea de matemáticas con los cursos de didáctica de la matemática, para que de esta forma adquieran durante la formación inicial herramientas profesionales que les permitan desarrollar una docencia escolar que apunte a la formación de jóvenes que comprendan la utilidad de la matemática en diferentes contextos y además la aprendan con una profundidad disciplinaria que les permitan tener competencias para estudios superiores.

Esta integración de una visión de la enseñanza de la matemática y su didáctica en la formación inicial ha necesitado del trabajo conjunto entre matemáticos, matemáticas y didactas de la matemática, lo que ha sido posible con una apertura profesional poniendo el foco en el perfil de egreso y dejando de lado las propias creencias con que cada uno y cada una de esos profesionales se formó (Wittmann, 2021).

Queda como proyección el seguir trabajando en conjunto y evaluar tanto al interior de los equipos académicos como con los y las estudiantes en formación si la coherencia y la integración propuesta logra los aprendizajes que se esperan en esos futuros docentes de matemática. En este sentido, nos proponemos en particular, evaluar la progresión de las competencias trabajadas en los distintos cursos que el estudiantado tiene a lo largo de la carrera, a saber, retomar en los cursos de didáctica de la matemática, tanto las nociones estudiadas por ejemplo en primer año, como los instrumentos de evaluación propuestos, analizando su coherencia e integración desde los ámbitos didáctico-disciplinar y pedagógico.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *1*(1), 40-55.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario?. *Boletín de la asociación matemática venezolana*, *10*(2), 117-134.

Cooney, T. J. (1988). The Issue of Reform: What Have We Learned From Yesteryear? *The Mathematics Teacher*, *81*(5), 352–363.

Gómez-Chacón, I. M. (2009). Actitudes matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación matemática*, *21*(3), 05-32.

Jiménez, L. (2021). Tránsito desde la secundaria a la universidad en las sesiones de taller de matemática para estudiantes de pedagogía. En R. Vom Hofe, E. Puraiván, E. Ramos-Rodríguez, P. Reyes-Santander, J. Soto-Andrade, y C. Vargas (Eds.), *Matemática enactiva: Aportes para la articulación entre teoría y práctica en la educación matemática.* (pp. 235–256). Graó.

Leikin, R., Zazkis, R., y Meller, M. (2018). Research mathematicians as teacher educators: focusing on mathematics for secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*, 451–473.

Romberg, T. A. (1988). Can teachers be professionals? En *Perspectives on Research on Effective Mathematics Teaching* (pp. 224–244). NCTM.

Ruthven, K. (2011). Conceptualising Mathematical Knowledge in Teaching. En T. Rowland y K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (pp. 83–96). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8_6

Universidad de Chile (2021). *Modelo educativo de la Universidad de Chile.* Disponible en https://doi.org/10.34720/de4p-1k12

Wittmann, E. C. (2021). The Mathematical Training of Teachers from the Point of View of Education. In E. C. Wittmann (Ed.), *Connecting Mathematics and Mathematics Education: Collected Papers on Mathematics Education as a Design Science* (pp. 49–60). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61570-3_4

APROXIMACIÓN AL CONTENIDO DE LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE PRIMARIA QUE ENSEÑARÁN MATEMÁTICA

Macarena Reyes-Bravo, Soledad Estrella

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

macarena.reyes.b@mail.pucv.cl, soledad.estrella@pucv.cl

El presente estudio exploratorio indaga en las concepciones de formadores de profesores de primaria que enseñarán matemática, en particular, acerca de cuál es el contenido de la formación inicial. Inmerso en el paradigma cualitativo, se aplicó un cuestionario online de preguntas abiertas a 12 formadores de profesores, y a través del análisis de contenido se categorizaron las respuestas asociadas al contenido. Dicho análisis muestra una tendencia a privilegiar el conocimiento matemático frente a otros elementos que pudiesen constituir el contenido de la formación inicial, en desmedro del conocimiento sobre prácticas de enseñanza e identidad profesional.

Formador de profesores, Contenido de la formación inicial de profesores, Conocimiento profesional, Prácticas profesionales, Identidad profesional.

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre profesores de matemática en formación y en ejercicio se ha desarrollado con intensidad en las últimas décadas, elaborándose enfoques específicos para comprender sus conocimientos (C.f., Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2018; Rowland, 2005) y sus prácticas, como el desarrollo de la mirada profesional (C.f., Llinares et al., 2019). Sin embargo, la investigación sobre el formador de profesores de matemática ha sido escasa (Beswick y Goos, 2018).

El estudio de UNESCO (2021) publicó un informe titulado "Formadores de docentes en seis países de América Latina", y entre sus hallazgos declara la necesidad de robustecer el conocimiento disciplinar de los futuros profesores y su articulación con la formación pedagógica, indicando que la docencia es una profesión en que "el talento y la vocación no son suficientes, sino que se requiere el dominio de conocimientos pedagógicos y disciplinarios y de estrategias pedagógicas efectivas" (UNESCO, 2021, p. 70).

En este contexto surgen algunas interrogantes sobre los formadores de profesores que enseñarán matemática: ¿cuál es el contenido de la formación inicial de estos profesores?, ¿qué priorizan los formadores en su quehacer con los estudiantes de pedagogía?, ¿hay otros tipos de contenido que desarrollar en futuros profesores que no refiere exclusivamente a conocimiento disciplinar y/o didáctico en la formación inicial?

El objetivo del presente estudio exploratorio es indagar en las concepciones que posee un grupo de formadores de profesores de primaria que enseñarán matemática, particularmente con la intención de dilucidar qué conciben como "contenido" a enseñar en la formación inicial docente.

MARCO CONCEPTUAL

Zopf (2010) estudió en qué consiste el trabajo de enseñar matemática a profesores, señalando que los propósitos de la formación escolar y la formación inicial de profesores son diferentes ya que el objetivo cambia —desde conocimiento matemático a conocimiento matemático para la enseñanza.

Asimismo, Chick y Beswick (2018) propusieron un marco para el conocimiento pedagógico del "contenido" de los formadores de profesores de matemática, declarando que el "contenido" que enseñan los formadores no se encuentra exclusivamente supeditado al conocimiento de la disciplina, sino que al conocimiento para enseñarla.

En esa línea, Escudero-Ávila et al. (2021) plantean que el "contenido" de la formación de profesores se ciñe a la matemática como objeto de enseñanza y aprendizaje, mientras que para para los profesores se supedita a la matemática como disciplina científica en un contexto de enseñanza (Carrillo et al., 2018). Para su escrito consideran el trabajo de Ponte (2011), quien agrupa las investigaciones sobre formación en educación matemática en tres temáticas: conocimiento profesional, asociado al conocimiento del contenido, del currículum, de los estudiantes, de la enseñanza, etc.; las prácticas de enseñanza que responden al qué y cómo lo hacen en su rol de profesores (futuros profesores en este caso); e identidad profesional, atendiendo a quienes son, individual y comunitariamente, y cómo se convierten en profesores que enseñarán matemática, considerando "creencias, interacción con el entorno, actitudes y emociones" (Escudero-Ávila et al., 2021, p. 31) . En consecuencia, postulan estos tres focos —conocimiento profesional, las prácticas de enseñanza y la identidad profesional— como elementos necesarios para el logro del contenido de formación inicial de profesores que enseñarán matemática.

MÉTODO

Este estudio se sitúa en un paradigma interpretativo con enfoque cualitativo (Navarro et al., 2017). Se empleó un cuestionario de tres preguntas; para esta comunicación, se presenta el análisis de solo una pregunta cuyo objetivo fue indagar en las concepciones del "contenido" de la formación inicial de profesores de matemática. La recogida de datos se realizó el año 2022, consultando en formato online a doce formadores de profesores de primaria (F1 a F12) que realizan clases en algún curso referente a educación matemática, en distintas universidades chilenas.

La pregunta que se analiza es: *En el PCK de un profesor que realiza clases de matemática en primaria, el contenido "C" está determinado por temas matemáticos. En su caso como formadora o formador, ¿qué considera como "C" en la formación inicial de profesores que enseñarán matemática en primaria?*

Mediante un análisis de contenido (Fiorentini y Lorenzato, 2015) se interpretaron las respuestas otorgadas por los formadores. Las categorías fueron determinadas a priori, basadas en la interpretación de contenido de la formación planteado por Ponte (2011). En las respuestas, se identificaron apartados o declaraciones que sirvieran como unidades de significado, es decir segmentos de información (una palabra, una frase, un párrafo) que tuviesen estrecha relación con las características descritas sobre el contenido de la formación inicial.

RESULTADOS

Se utilizaron como categorías los elementos distintivos del contenido de la formación inicial: conocimiento profesional, prácticas profesionales; e identidad profesional. Para la interpretación del conocimiento profesional, se empleó el modelo conocimiento especializado del profesor de matemáticas MTSK (Carrillo et al., 2018), considerando los dominios del modelo como subcategorías de análisis: conocimiento del contenido matemático y conocimiento didáctico del contenido.

Conocimiento profesional

- Conocimiento del Contenido Matemático

Seis de los doce formadores encuestados manifiestan que el contenido de la formación inicial se concentra en desarrollar conocimientos del tipo matemático, tal como lo declara uno de los formadores, F1, "Aquellas elaboraciones que la sociedad ha creado y que los matemáticos han formalizado, por ejemplo: definiciones, propiedades, teoremas, etc.". Los otros cinco formadores cuyas respuestas se clasifican en esta categoría, plantean el conocimiento matemático sustentado en los ejes temáticos definidos en el currículo nacional de educación primaria chileno.

De los 6 formadores quienes afirman que el contenido de la formación inicial es netamente matemático, 4 de ellos son profesores de educación básica de formación. Cabe recordar, que no se busca en este estudio el conocimiento matemático del formador, sino el conocimiento sobre qué debe desarrollar en la formación inicial de profesores de primaria.

- Conocimiento Didáctico del contenido

En esta categoría se observan afirmaciones que centran el contenido de la formación en el conocimiento didáctico de contenidos matemáticos. Por ejemplo, el formador F10 responde como contenido de la formación inicial "*Aquellos temas disciplinares, desde el conocimiento profundo, que involucra la matemática (como campo de estudio), la evolución de los temas a tratar (desde la historia) y los aspectos didácticos y metodológicos involucrados en el aprendizaje de estos temas*".

Dentro de las respuestas analizadas se encuentran afirmaciones de formadores que hacen referencia al conocimiento didáctico del contenido de los futuros profesores, como parte esencial del contenido de la formación. F2 señala "*Además de los contenidos disciplinares considerados para la formación, […] que se deben enseñar en la escuela primaria, el profesor debe conocer en profundidad esos contenidos para la enseñanza, […] dentro de su conocimiento debe estar incluido el cómo enseñar esos conceptos, lo que le da un saber más profundo, por lo que el saber enseñar los distintos temas matemáticos deben ser parte de estos contenidos de formación*".

La respuesta anterior alude al contenido de la formación inicial, cuyo fin es que los futuros profesores de primaria que enseñarán matemática sepan hacerlo. Se desprende que el formador F2 concibe el contenido de la formación inicial como contenido matemático en tanto objeto de enseñanza-aprendizaje.

Prácticas profesionales

Esta categoría responde a cómo usarán, en su futuro desempeño como profesor de primaria que enseñará matemática, el conocimiento profesional que se desarrolla en la formación. En la respuesta otorgada por uno de los formadores se desprende esta idea, pero no se mencionan directamente prácticas, sino escenarios que permiten formarse en el cómo se debe llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. F6 expresa "*Además trabajar situaciones de caso del dominio c [contenido matemático] que permita situar el conocimiento del futuro docente entendiendo a la FID [formación inicial docente]. Otro punto a destacar es la reflexión de la práctica educativa, también en consideración al uso de la matemática como conocimiento especializado, pero como este*

conocimiento llega a la escuela para ser enséñale [enseñable] por este profesional o futuro profesional".

En esta respuesta, el formador F6 indica el trabajo con situaciones de caso enfocadas en un contenido matemático, situando al futuro profesor. Además, plantea la instancia de reflexión de la práctica educativa como un componente esencial del contenido a trabajar como formador en la formación inicial, y la importancia de trabajar en instancias en que el futuro profesor pueda transponer el conocimiento profesional en un conocimiento a enseñar.

Otro formador, F8 señala la importancia del desarrollo del conocimiento profesional (matemático y didáctico del contenido), añadiendo "*el qué se debe trabajar, cómo trabajarlo y de qué manera planearlo y evaluarlo*". Estas acciones forman parte de las prácticas habituales de un profesor que enseñará matemática, por lo que se interpreta que el formador F8 la considera como una habilidad profesional constitutiva del contenido de la formación inicial.

Identidad profesional

Otro de los contenidos de la formación inicial es la identidad profesional de los futuros profesores que realizarán clases de matemática. El conocimiento que posea el formador sobre este elemento en la formación inicial es clave en tanto le permite diseñar situaciones que la promuevan; por ejemplo, la creación de simulaciones en que los futuros profesores puedan tomar una postura como un profesor que enseña matemática, beneficiando la construcción de la identidad profesional (Pascual, 2021).

En esa línea, podemos retomar la respuesta presentada previamente, en que el formador F6 propone el estudio de caso y destaca la importancia de la reflexión de la práctica educativa, específicamente en cómo el conocimiento (profesional) llega al aula escolar. No obstante, no hay una declaración explícita sobre la identidad profesional como un elemento a desarrollar en la formación inicial.

En las respuestas entregadas, no se encontraron afirmaciones relacionadas con la identidad profesional de los futuros profesores. Esta situación puede deberse al incipiente desarrollo de ideas e investigaciones sobre el tema, o también a que los formadores asocian la palabra "contenido" con conocimiento solo del tipo disciplinar.

REFLEXIÓN

Este estudio exploratorio entrega información de las concepciones de un grupo de formadores de profesores de matemática en primaria, sobre quienes, como ya se ha declarado, la investigación ha sido escasa. Comprender el objeto de enseñanza que estos profesionales manifiestan frente a cursos de futuros profesores, permite un acercamiento a su concepción sobre los profesionales de la educación que se espera formar en las universidades, en particular, en Chile.

Si bien la mitad de los formadores encuestados ($n = 12$) considera sólo el desarrollo del conocimiento matemático, otros formadores conciben el contenido de la formación como el conocimiento de la matemática tanto objeto de enseñanza-aprendizaje, lo que podría implicar una distinción en su quehacer en las aulas universitarias. Si bien hay una baja representatividad de respuestas que propongan otros contenidos en formación inicial —como las prácticas y la identidad profesional—, los resultados del estudio manifiestan una oportunidad para avanzar en fortalecer dominios más allá del necesario conocimiento matemático y didáctico del contenido.

Este estudio se enmarca en un trabajo doctoral en curso y espera seguir profundizando en los conocimientos del formador de profesores que enseñarán matemática. Asimismo, se busca contribuir sobre las concepciones que poseen acerca del contenido de la formación inicial y a la investigación sobre el formador de profesores, con elementos constitutivos del contenido de la formación inicial.

REFERENCIAS

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177%2F0022487108324554

Beswick, K., y Goos, M. (2018). Mathematics teacher educator knowledge: What do we know and where to from here?. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(5), 417-427.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco-Mora, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A. Ribeiro, M., y Muñoz-Catalan, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education,20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Chick, H., y Beswick, K. (2018). Teaching teachers to teach Boris: a framework for mathematics teacher educator pedagogical content knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Educator, 21*, 475-499. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9362-y

Escudero-Ávila, D., Montes, M., y Contreras, L.C. (2021). What do Mathematics Teacher Educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. En M. Goos, y K. Beswick (Eds.), *The learning and development of mathematics teacher educators: international perspectives and challenges* (pp. 23-40). Springer. https://:doi.org/10.10007/978-3-030-62408-8_2

Fiorentini, D., y Lorenzato, S. (2015). *Investigación en Educación Matemática: recorridos históricos y metodológicos*. Editora Autores Associados LTDA.

Llinares, S., Ivars, P., Buforn, À., y Groenwald, C. (2019). «Mirar profesionalmente» las situaciones de enseñanza: una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 177–192). Ediciones Universidad de Salamanca.

Navarro, E., García, E., Rappoport, S., y Thoilliez, B. (2017). *Fundamentos de la investigación y la innovación educativa*. Unir Editorial.

Pascual, M. (2021). *El conocimiento del formador de maestros en la etapa de formación inicial, en relación con la enseñanza de la Didáctica de las Matemáticas. Un estudio de caso* [Tesis de doctorado, Universidad de Huelva, España].

Ponte, J. P. (2011). Teachers' knowledge, practice, and identity: Essential aspects of teachers' learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(6), 413–417.

Rowland, T. (2005). The knowledge quartet: A tool for developing mathematics teaching. En A. Gagatsis (Ed.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp. 69-81). Cyprus Mathematical Society.

UNESCO. (2021). *Formadores de docentes en seis países de América Latina*. OREALC-UNESCO

Zopf, D. A. (2010). *Mathematical Knowledge for Teaching Teachers: The Mathematical Work of and Knowledge Entailed by Teacher Education* [Tesis de doctorado, University of Michigan, EE.UU.].

CREENCIAS EPISTEMOLÓGICAS DE LOS FORMADORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICA. ALCANCES PARA LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE

Mirko Aguilar[1], Ricardo Salinas[2], Helena Montenegro[2]

[1]Universidad Diego Portales, [2]Universidad de Chile

mirko.aguilar_v@mail.udp.cl, ricardosalinaspaez@gmail.com, helena.montenegro@uchile.cl

El objetivo de esta investigación es caracterizar las creencias epistemológicas de los formadores de profesores de matemática en el contexto de la formación inicial docente en Chile. Desde un enfoque cualitativo los datos fueron recabados mediante una entrevista semiestructurada a seis formadores de profesores del área disciplinar y didáctica de la carrera de Pedagogía en Educación Matemática. Los resultados preliminares reportan que en los formadores prevalecen ideas constructivistas de la enseñanza, alineadas con creencias epistemológicas sofisticadas. Asimismo, señalan ciertos obstáculos y desafíos que tensionan sus creencias y la práctica enseñar a enseñar.

Creencias epistemológicas, Formador de profesores, Formación inicial docente, Matemática.

INTRODUCCIÓN

Los formadores de profesores tienen un rol fundamental en la formación inicial del profesorado (Gómez, 2019). Tradicionalmente existe la idea de que la práctica docente está vinculada al saber teórico y disciplinar, sin embargo, también está supeditada a las creencias que poseen los docentes (Pozo, 2017). Al respecto, existe una extensa línea de investigación sobre las creencias epistemológicas, cuyos principales autores definen como nociones en torno al conocimiento y el proceso de conocer (Schraw et al., 2017). En general, los profesores con creencias epistemológicas sofisticadas propician prácticas de enseñanza constructivistas, donde el estudiante es el centro de la experiencia educativa. Lonka (2018) manifiesta que este tipo de creencias estaría actuando como un obstáculo para que se instalen nuevas prácticas de enseñanza, situación que constituiría un problema al constatar que la práctica pedagógica de los futuros docentes está influenciada por su experiencia en la formación inicial (González-Vallejos, 2018). En otras palabras, las creencias epistemológicas de los formadores de profesores de matemática podrían generar que se mantenga la utilización de estrategias tradicionales de enseñanza, centradas en el docente y en prácticas instructivas con escaso diálogo entre estudiantes. Tomando en cuenta estos antecedentes, el presente estudio investiga las creencias epistemológicas de los formadores de profesores del área disciplinar y didáctica de la carrera de Pedagogía en Matemática en distintos contextos Universitarios de Chile. Lo anterior nos lleva a indagar sobre ¿Cuáles son las creencias epistemológicas de los formadores de profesores de matemática en distintos contextos de formación inicial docente en Chile?

ANTECEDENTES TEÓRICOS Y EMPÍRICOS

Creencias epistemológicas

En el marco de la investigación sobre el pensamiento docente, se señala que el profesorado sostiene un conjunto creencias que incide directamente sobre sus prácticas de enseñanza (Pozo, 2017). A raíz de estos hallazgos, se ha relevado el estudio en torno a las creencias con el propósito de evaluarlas,

contextualizarlas y actualizarlas, ya que estarían a la base de cualquier cambio o progreso que desee implementarse en la experiencia educativa. En particular, las creencias epistemológicas han sido motivo de un creciente interés por parte de la psicología educativa, surgiendo diferentes líneas de investigación (Hofer y Pintrich, 2002). Schommer-Aikins (2004) propone un modelo de creencias epistemológicas conformado por cinco dimensiones: estructura, estabilidad, certeza del conocimiento, control y velocidad del aprendizaje. Esta autora, manifiesta que este tipo de creencias transita desde un polo ingenuo (no desarrollado), hacia un polo sofisticado (desarrollado). En cuanto al estudio de estas creencias en los formadores, la investigación desarrollada por Khan et al. (2020) reporta que en los formadores coexisten creencias ingenuas y sofisticadas, sin embargo, las primeras aparecen reportadas con mayor frecuencia. En Chile la literatura es escasa en torno a este tipo de creencias, y solo se ha desarrollado en profesores y futuros docentes (Guerra y Sebastián, 2015). Es decir, no se ha estudiado este tema en los formadores en general, ni en los formadores de matemática en particular.

Formador de profesores

Tradicionalmente la responsabilidad de los resultados escolares se le ha atribuido principalmente a los profesores, sin embargo, la calidad de su despliegue está íntimamente relacionada con la experiencia que viven en el contexto de la formación inicial, y particularmente de la enseñanza que reciben de sus formadores (Kelchtermans et al., 2018). Esto ha generado que durante los últimos años la investigación en torno a las habilidades, conocimientos y estrategias que utilizan los formadores esté adquiriendo mayor relevancia (Ping et al., 2018). En este sentido, un aspecto distintivo de los formadores es su rol como modelos de enseñanza. Los formadores constantemente están modelando con su forma de enseñar, transmitiendo valores, creencias y biografías personales que implícitamente se expresan en sus decisiones pedagógicas (González-Vallejos, 2018). De modo que no solo se trata de transmitir ciertas habilidades y conocimientos, ya que también, demanda una articulación que debe quedar explícita entre las estrategias de enseñanza y los propósitos que subyacen a ella.

MÉTODO

Enfoque y diseño

Para la realización de esta investigación se adoptó un paradigma interpretativo, asumiendo que los sujetos construyen sus creencias como subjetividades históricas, sociales y culturales. En relación al enfoque, este estudio se ajusta a la metodología cualitativa, ya que ofrece la posibilidad de estudiar fenómenos altamente complejos (Flick, 2015). Esta mirada representa una novedad para el estudio de las creencias epistemológicas, ya que en general sus avances se han fundado en la aplicación y análisis de cuestionarios (Ferguson, 2020).

Participantes y muestreo

El proceso para definir la población y la muestra consideró los siguientes criterios de inclusión: 1) formadores de profesores que estuvieran trabajando en un programa de Pedagogía en Matemática, y 2) formadores de profesores que trabajen en módulos didácticos y disciplinares. La muestra de este estudio quedó conformada por 6 formadores, los cuales serán identificados por un número consecutivo (E1: primer formador entrevistado; E2: segundo formador entrevistado, etc.). En esta muestra tres formadores son hombres y tres mujeres, cuatro de ellos tienen el grado de magíster, los

otros dos tienen el grado de doctor. En promedio tienen 10 años de experiencia como formadores en distintos contextos de formación inicial en Chile. Todos accedieron a participar de manera voluntaria en este estudio y firmaron un consentimiento informado de acuerdo a los estándares éticos de investigación.

Técnicas de producción de datos

El instrumento utilizado para la recopilación de datos corresponde a una entrevista semiestructurada que incluye la revisión de dos viñetas. Este dispositivo fue construido en base a los comentarios y sugerencias de tres expertos en el área de la matemática y la formación inicial docente. Una versión preliminar de este instrumento fue sometido a una etapa de pilotaje. Finalmente se generó una versión final con un guion para la entrevista. Esta técnica resulta adecuada para este estudio ya que es flexible, permite aclaraciones, y le otorga integralidad y sistematicidad al tema a tratar (Piza et al., 2019).

RESULTADOS

El análisis preliminar de los resultados permite identificar tres dimensiones interesantes de consignar: 1) el carácter social y constructivo de la experiencia de aprendizaje en la formación inicial docente; 2) obstáculos y desafíos para implementar estrategias constructivistas en el aula; y 3) la práctica de enseñar a enseñar. Con relación a la primera dimensión el *carácter social y constructivo de la experiencia de aprendizaje en la formación inicial docente,* los formadores en su discurso señalan la importancia de dar espacios de participación y aprendizaje entre los estudiantes, siendo ellos la fuente de aprendizaje en el aula universitaria. Lo relevante de esta perspectiva es que los formadores señalan que este tipo de actividades fortalece la formación profesional de los futuros profesores, en la medida que aprenden prácticas que pueden implementar en el sistema escolar cuando ejerzan como profesores. Esto se aprecia en las siguientes citas: “la idea es que entre ellos puedan compartir la experiencia que traen, sobre todo cuando van avanzando en la carrera y traen sus distintas experiencias de práctica. Eso les ayuda mucho, en el fondo, a proyectar lo que va a ser su carrera como profesores” (E5). “Porque acá uno se supone que deja todo el protagonismo en los estudiantes cuando ellos trabajan de forma grupal. Al final el rol del profesor también es fundamental porque él debe ir monitoreando e ir observando que todos participen, que todos comenten, entregarles la seguridad a los estudiantes” (E4).

Con relación a la segunda dimensión *obstáculos y desafíos para implementar estrategias constructivistas en el aula,* los formadores señalan varias. En primer lugar, emerge como una barrera las debilidades que presentan los estudiantes de pedagogía para trabajar desde una perspectiva compleja, la cual se atribuye a su propia experiencia en el contexto escolar. “Yo creo que todavía hay grandes posibilidades de que estudiantes de pedagogía lleguen con debilidades respecto a las habilidades, podría ser la de modelar, pero también podría ser a las otras, pero en particular la de modelar, dado que desde las bases curriculares eso viene, es más bien reciente” (E1). En esta misma línea, otro formador señala que: “los alumnos no están acostumbrados a este tipo de actividad de modelación, están acostumbrados a clases más estructuradas” (E5). Y, en segundo lugar, respecto a los desafíos que plantean los formadores para avanzar en la implementación de estrategias constructivistas, señalan la necesidad de institucionalizar este tipo de prácticas al manifestar que: “cuando se trata de incorporar metodologías, no puede ser el esfuerzo individual del profesor. Tiene que tener un sentido casi institucional. Una mirada de la forma de trabajo del equipo. Tiene que ser

algo que atraviese a la gran mayoría de los cursos. De esa forma los estudiantes no lo ven como una ruptura" (E3). Por último, con relación a la tercera dimensión *la práctica de enseñar a enseñar,* que surge como una práctica docente fundamental de los formadores, algunos focalizan su actuar solamente en la enseñanza, cuando manifiestan que: "son ellos los que no tienen desarrollada la habilidad de modelar, entonces primero tengo que desarrollarla en ellos y después esperar que sean capaces de enseñarla en el futuro" (E1). Mientras que otros formadores vinculan su práctica con la reflexión sobre la enseñanza, señalando lo siguiente: "preguntarles derechamente a los estudiantes por qué tienden a preferir una dinámica por sobre la otra, qué sienten ellos, dado que ellos van a ser profesores" (E2).

CONCLUSIONES

La literatura reporta que las ideas constructivistas de la enseñanza tienen una estrecha relación con la adopción de creencias epistemológicas sofisticadas. En el discurso de los formadores esta instaurado el carácter social y constructivo de la experiencia pedagógica, señalando la importancia de abordar los contenidos desde una perspectiva compleja del conocimiento, promoviendo el trabajo colaborativo, y situando a los futuros profesores como protagonistas de la experiencia formativa. No obstante, y en congruencia con otros estudios que se han desarrollado en profesores de aula, emergen distintos obstáculos que inhiben la implementación de este tipo de estrategias, y generan tensión con las creencias, como las características institucionales, las habilidades de los estudiantes, y el tiempo y los objetivos que persiguen los programas. Por último, cabe destacar la tendencia de algunos formadores por enseñar la pedagogía desde una perspectiva transmisiva y acumulativa, mientras que otros fomentan la participación activa y enseñan a enseñar. Considerando las limitaciones de este trabajo, los resultados de este estudio surgen como una invitación para reflexionar en torno al rol que tiene este tipo de creencias en la formación inicial del profesorado, con el propósito de discutir y analizar explícitamente sus alcances para la práctica de los formadores y de los futuros docentes.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación corresponde a una tesis de Magíster financiada por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile (ANID) - PFCHA/Magíster en Chile para Profesionales de la Educación/ 2020-50200134, y forma parte del Proyecto FONDEF IDI21110067 desarrollado por el Centro de Modelamiento Matemático (CMM) FB210005 fondo BASAL, financiado también por ANID. Por último, señalar que este estudio forma parte de la Cátedra Unesco*: Formación de docentes para enseñar matemática en el siglo XXI.*

REFERENCIAS

Ferguson, L., y Lunn, J. (2021). Teacher beliefs and epistemologies. En S. Faircloth (Ed.) *Oxford Bibliographies in Education.* Oxford University Press.

Flick, U. (2015). *El diseño de la investigación cualitativa*. Ediciones Morata.

Gómez, V. (2019). Fortalecer al formador de profesores: una agenda pendiente. En A. Carrasco y L. Flores (Eds.). *De la reforma a la transformación: capacidades, innovaciones y regulación de la educación chilena* (pp. 69–93). Ediciones UC.

González-Vallejos, M. (2018). El estudio del formador latinoamericano: un campo de investigación en construcción. *Magis: Revista Internacional de Investigación en Educación, 10*(21), 35–54. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m10-21.eflc

Guerra, P., y Sebastián, C. (2015). Creencias epistemológicas en profesores que postulan al Programa de Acreditación de Excelencia Pedagógica: Análisis descriptivos y comparativos entre profesores que se desempeñan en los diferentes niveles de enseñanza. *Estudios Pedagógicos, 41*(2), 107–125. https://doi.org/10.4067/S0718-07052015000200007

Hofer, B., y Pintrich, P. (2002). *Personal Epistemology. The psychology of beliefs about knowledge and knowing.* Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9780203424964

Kelchtermans, G., Smith, K., y Vanderlinde, R. (2018). Towards an 'international forum for teacher educator development': An agenda for research and action. *European Journal of Teacher Education, 41*(1), 120–134. https://doi.org/10.1080/02619768.2017.1372743

Khan, I., Mahmood, A., y Ahmad, S. M. (2020). Teacher educators' epistemological beliefs and their implications for teacher education. *FWU Journal of Social Sciences, 14*(4), 12–25. https://doi.org/10.51709/fw12722

Lonka, K. (2018). *Aprendizaje extraordinario en Finlandia* (1ª ed.). Siglo del Hombre Editores S.A. https://doi.org/10.2307/j.ctv1f70kjw

Ping, C., Schellings, G., y Beijaard, D. (2018). Teacher educators' professional learning: A literature review. *Teaching and Teacher Education,* 75, 93–104. https://doi.org/10.1016/j.tate.2018.06.003

Piza, N., Amaiquema, F., y Beltrán, G. (2019). Métodos y técnicas en la investigación cualitativa. Algunas precisiones necesarias. *Conrado, 15*(70), 455–459.

Pozo, J. (2017). *Aprender en tiempos revueltos: la nueva ciencia del aprendizaje*. Alianza Editorial.

Schommer-Aikins, M. (2004). Explaining the epistemological belief system: Introducing the embedded systemic model and coordinated research approach. *Educational Psychologist, 39*(1), 19–29. https://doi.org/10.1207/s15326985ep3901_3

Schraw, G., Brownlee, J., Olafson, L., y Vanderveldt, M. (Eds.). (2017). *Teachers´ personal epistemologies. Envolving models for informing practice.* Information Age Publishing.

DISEÑO DE UN INSTRUMENTO DE OBSERVACIÓN PARA CARACTERIZAR EL DESARROLLO DEL NOTICING DE DOCENTES DE MATEMÁTICA SOBRE LA GESTIÓN COMUNICATIVA DE LA INTERACCIÓN

Victoria Arriagada Jofré, Horacio Solar Bezmalinovic

Pontificia Universidad Católica de Chile

vparriagada@uc.cl, hsolar@uc.cl

Noticing se refiere a lo que nota el docente en situaciones diversas de contexto educativo. Este trabajo presenta el proceso de diseño, validación y pilotaje de un instrumento de observación (rúbrica) que permite caracterizar el desarrollo del noticing de docentes de matemática participantes de un programa de desarrollo profesional (PDP) basado en competencias matemáticas respecto de 3 focos de la gestión comunicativa de la interacción docente-estudiante: gestión de oportunidades de participación, del error y de preguntas (Lee, 2010). Esta rúbrica se acompaña de videos y preguntas para elicitar el noticing de docentes, proceso de selección que se detalla en este documento.

Noticing, Atención docente, Competencia docente, Desarrollo profesional, Competencia matemática.

INTRODUCCIÓN

El *noticing* se considera una competencia del docente y un componente esencial de su práctica profesional (Mason, 2002) y se considera una habilidad importante del docente porque recae en el aprendizaje en los estudiantes (Jacobs y Spangler, 2017). Llinares (2013) indica que la competencia del noticing le otorga al profesor la posibilidad de *notar* situaciones de enseñanza diferentes a las observadas por un no docente. Ha sido abordado principalmente cuando los docentes observan el *pensamiento matemático de los estudiantes*. Sin embargo, pocos estudios lo han caracterizado con otros enfoques como la *gestión de la interacción comunicativa* que se refiere a la competencia docente para orquestar las intervenciones de los estudiantes (Fortuny y Rodríguez, 2012).

El currículum nacional e internacional antes basado en contenidos, ha transitado a uno donde los estudiantes aprenden por medio de *competencias matemáticas* promovidas por los profesores (Felmer y Perdomo-Díaz, 2017) como por ejemplo, resolución de problemas, representar y argumentar presentes tanto en PISA (OECD, 2016) como en las bases del Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2015), por lo que un desafío de la enseñanza de la matemática actual es apoyar a docentes formados bajo un modelo anterior basado en contenidos, para que ofrezcan oportunidades reflexivas a sus estudiantes donde tengan que discutir e interactuar sobre procedimientos matemáticos (Solar, 2018). Si los docentes mejoran sus propias habilidades de enseñanza, implementarán mejores prácticas (Borko et al., 2008).

Considerando que existen elementos del noticing que pueden ser abordados desde las competencias matemáticas, el propósito de este trabajo es diseñar, validar y pilotear un instrumento de observación que permita caracterizar el desarrollo del noticing de los docentes de matemática durante un PDP.

MARCO TEÓRICO

Noticing

Es una de las perspectivas para estudiar la atención del docente de matemáticas (van Es y Sherin, 2021). Se enmarca en una perspectiva cognitiva psicológica (Santagata et al., 2021), debido a que lo definimos respecto de los procesos cognitivos asociados al *qué* y *cómo* le da sentido a lo que atiende. Jacobs et al. (2010) estudiaron cómo y en qué medida los profesionales identifican el *pensamiento matemático de los niños*, definiendo el noticing como un conjunto de tres habilidades: *atender* a las estrategias de los niños, *interpretarlas* y *decidir* cómo responder. Este proyecto, lo define como una habilidad caracterizada por: atender, utilizar y establecer conexiones en situaciones de enseñanza (van Es y Sherin, 2002) y que recientemente se ha expandido incorporando la *indagación* que involucra gestionar interacciones para obtener información adicional (van Es y Sherin, 2021).

Gestión comunicativa de la interacción (docente-estudiante)

En particular, en este proyecto se pretende estudiar el desarrollo del noticing del docente participante del PDP respecto de la gestión comunicativa de la interacción (profesor-estudiante) que realiza el docente del video en la clase de matemática, la que se define a través de tres dimensiones provenientes de acciones comunicativas de Lee (2010) y adaptación (Solar y Deulofeu, 2016): Gestión de oportunidades de participación: El participante se refiere a la acción del docente del video para asegurar que todos sus estudiantes tengan la oportunidad de aportar (o ausencia), por ejemplo: promover la intervención de todos los estudiantes, y no tan sólo a aquellos que desean intervenir. Gestión del error: El participante se refiere a la acción del docente del video para transmitir a sus estudiantes que sus ideas/respuestas/procedimientos equivocados son importantes para construir el conocimiento matemático (o ausencia), por ejemplo: promover que alumnos con respuestas correctas e incorrectas expongan, sin validar antes la calidad de éstas. Gestión a través de preguntas: El participante se refiere a la acción del docente del video para formular preguntas adecuadas a la actividad o para interactuar en base a buenas preguntas (o ausencia), por ejemplo: realizar preguntas que favorezcan la descripción y explicación de ideas/procedimientos por sobre preguntas cerradas.

CONSTRUCCIÓN DEL INSTRUMENTO DE OBSERVACIÓN

Se está construyendo un instrumento de observación (rúbrica) en base a episodios de aula. El proceso de elaboración del instrumento está enmarcado en un proyecto de tesis doctoral que ha involucrado dos años de trabajo distribuido en cinco fases que se describen a continuación:

Fase 1: Revisión de instrumentos de observación

En primer lugar, se analizaron instrumentos existentes y utilizados en el campo del noticing. Si bien el mayormente utilizado es el de van Es (2011), el foco de observación es el pensamiento matemático del estudiante y no la gestión del docente. Es por eso, que se requiere de un instrumento de observación más específico que permita caracterizar el desarrollo del noticing del docente a lo largo de un PDP basado en competencias matemáticas. A continuación, se presenta una tabla que presenta algunos instrumentos encontrados y los focos de observación (ver Tabla 1).

Tabla 1.

Síntesis de instrumentos analizados y utilizados en el campo del noticing.

Instrumento	Propósito	Constructo	Características
Marco para aprender a notar el pensamiento matemático del estudiante. Van Es (2011)	Caracterizar el noticing del docente (o el desarrollo) cuando lo que observa es el pensamiento matemático del estudiante.	Atención del docente y calidad de interpretación respecto del pensamiento matemático de los estudiantes.	Rúbrica 4 niveles (Básico, intermedio, focalizado, extendido) 2 dimensiones (qué y cómo notan el docente).
Observar. Seidel y Sturmer (2014)	Modelar y medir la estructura de la visión profesional en futuros docentes.	-Claridad de objetivos -Apoyo al maestro -Clima de aprendizaje	12 videos. 36 ítems de valoración por video, escala de Likert de 4 pts.
Visión profesional de la gestión de aula (PVCM). Gold y Holodynski (2017)	Conceptualizar y desarrollar un instrumento estandarizado en base a vídeo para evaluar la visión profesional de la gestión del aula en futuros profesores de primaria.	-Monitoreo -Gestión del impulso (ritmo apropiado) -Establecimiento de reglas y rutinas	4 videos 36-38 ítems para cada video, a través de escala de Likert de 4 pts.

Fase 2: Definiciones de las características del instrumento a diseñar

A partir de estos antecedentes teóricos, se definió que el instrumento de observación a diseñar estaría compuesto por a) una rúbrica en base a niveles de noticing para continuar la línea de van Es (2011) y b) actividades de análisis de video en base a preguntas para elicitar el noticing de los participantes. Este conjunto de elementos permitirá estudiar el desarrollo del noticing del docente respecto de la gestión comunicativa de la interacción (profesor-estudiante) que realiza el docente del video en la clase de matemática, a través de tres dimensiones: gestión de oportunidades de participación, gestión del error y gestión a través de preguntas (Lee, 2010).

Fase 3: Diseño y validación de la actividad de análisis de video

Selección y validación de los clips

Se creó una cantidad inicial de seis clips provenientes de implementaciones de actividades filmadas en aulas de sexto básico a cuarto medio en PDP de resolución de problemas, argumentación y modelamiento matemático. En ellos, se observaba al docente interactuando con sus estudiantes y la duración era de 6-8 minutos. Posteriormente, se realizaron cuatro entrevistas en grupos de 1-2 docentes a quienes se les presentaron 2-4 de los clips y se les fue haciendo preguntas para elicitar el noticing respecto de los tres focos de interés. De esta manera, se fueron probando las preguntas, los clips, la extensión, etc. Cada uno de los clips fue visto por al menos dos docentes. A partir de estas entrevistas, se observó que cuatro clips generaban más elementos a observar en los participantes, por lo que sólo estos cuatro clips fueron enviados a juicio de experto (ver Tabla 2). Luego, en un focus group realizado con los tres expertos indicaron para cada video la idoneidad del clip respecto de los focos de interés. Dado que se requieren tres clips, el excluido fue el de José Francisco.

Tabla 2.

Puntuación de expertos a los focos de interés en cada clip preseleccionado.

Videos	Focos de atención Gestión	Experto 1					Experto 2					Experto 3					Total
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
Matilde	Oportu. de participación					x					x				x		14/15
	Del error				x						x			x			12/15
	De preguntas					x				x						x	13/15
Ángeles	Oportu. de participación					x			x						x		12/15
	Del error			x							x					x	13/15
	De preguntas				x						x					x	14/15
José Francisco	Oportu. de participación				x					x					x		12/15
	Del error		x					x						x			6/15
	De preguntas				x					x					x		16/15
Mariví	Oportu. de participación					x					x					x	15/15
	Del error				x					x						x	13/15
	De preguntas				x					x					x		12/15

Selección y validación de las preguntas para elicitar el noticing

Los tres expertos, además de validar los videos requeridos para el estudio, observaron respuestas de los entrevistados ante el estímulo de los clips y cómo fueron respondiendo ante las distintas preguntas para elicitar el noticing. En el focus group con los expertos, se acordó que la manera más adecuada de elicitar el noticing de los participantes era la siguiente para cada uno de los tres clips: 1. ¿Qué te llama la atención respecto de cómo la docente gestiona las oportunidades de participación que ofrece a los estudiantes? Obs: Se refiere a la acción del docente del video para asegurar que todos sus estudiantes tengan la oportunidad de aportar. 2. ¿Qué te llama la atención respecto de cómo la docente gestiona el error con sus estudiantes? Obs: Se refiere a la acción del docente del video para transmitir a sus estudiantes que sus ideas/respuestas/procedimientos equivocados son importantes para construir el conocimiento matemático. 3. ¿Qué te llama la atención respecto de cómo la docente gestiona la discusión con sus estudiantes a través de preguntas? Obs: se refiere a la acción del docente del video para formular preguntas adecuadas a la actividad o para interactuar en base a buenas preguntas.

Ajustes a la actividad de análisis de video

Posterior al focus group con los expertos, se realizaron los ajustes sugeridos a los clips.

Fase 4: Levantamiento y validación de la rúbrica

Diseño de la rúbrica

Para levantar la rúbrica se transcribieron las intervenciones de los siete participantes de las entrevistas en base a videos, se codificó una muestra del 20% utilizando como base el sistema de codificación que siguió van Es (2011) ajustando con las siguientes dimensiones: Actor(a), Tópico (t), Postura (p) y Especificidad (e). Un experto en el tema también codificó esta muestra y se calculó αbinario de Krippendorff obteniendo 1.00 en las cuatro dimensiones lo que indica que ambos codificadores notaron relevantes las mismas intervenciones. Además, se calculó el Cu-$\propto$ de Krippendorff que arrojó: a (*0.85*), t (*0.92*), p (*0.4*) y e (*0.3*). Se requieren ajustes para aumentar los coeficientes de acuerdo más bajos. Luego, para elaborar la rúbrica, se clasificarán las intervenciones de docentes en niveles.

Validación de la rúbrica y ajustes

Una vez diseñada la rúbrica, será enviada a los mismos expertos que participaron de la selección de videos para su validación respecto de los siguientes componentes: suficiencia, claridad, coherencia y relevancia. Este proceso a la fecha aún no se ha realizado, sin embargo, se espera que a la fecha del congreso este evento ya haya sucedido y se pueda presentar ahí. Con las respuestas de los expertos, la rúbrica será justada de acuerdo con sus intervenciones.

Fase 5: Pilotaje del instrumento y ajustes finales

De septiembre a noviembre 2022, se está realizando un taller llamado "Gestión de la argumentación en el aula de matemáticas" de siete sesiones con siete docentes, con el propósito de pilotear las tres actividades de análisis de video a lo largo del PDP y posteriormente codificar las intervenciones de los docentes utilizando la rúbrica validada. Se espera que, a la fecha de la presentación de este trabajo, el taller haya terminado recientemente. Luego, se transcribirán las intervenciones de los docentes, se codificarán utilizando la rúbrica, se realizarán los ajustes tanto a la rúbrica como al taller y se realizará una versión final el 2023. Este proceso se realizará con una validación externa.

CONSIDERACIONES FINALES

La construcción completa del instrumento permitirá caracterizar el desarrollo del noticing de docentes de matemática participantes de un PDP basado en competencias matemáticas respecto de tres focos de la gestión comunicativa de la interacción docente-estudiante: gestión de oportunidades de participación, del error y de preguntas (Lee, 2010). Cabe señalar que los tres episodios seleccionados para ser parte del instrumento corresponden a clips que muestran interacciones en el marco de PDP basados en la competencia *argumentar.* Esto puede indicar que actividades de argumentación corresponden a un escenario ideal para observar los focos de atención de Lee (2010).

REFERENCIAS

Borko, H., Jacobs, J., Eiteljorg, E., y Pittman, M. E. (2008). Video as a tool for fostering productive discussions in mathematics professional development. *Teaching and Teacher Education*, *24*(2), 417–436. https://doi.org/10.1016/j.tate.2006.11.012

Felmer, P., y Perdomo-Díaz, J. (2017). Un programa de desarrollo profesional docente para un currículo de matemática centrado en las habilidades: la resolución de problemas como eje articulador. *Educación matemática*, *29*(1), 201-217. https://doi.org/10.24844/em2901.08

Fortuny, J. M., y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *1*, 23–37. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.3

Gold, B., y Holodynski, M. (2017). Using digital video to measure the professional vision of elementary classroom management: Test validation and methodological challenges. *Computers y Education, 107,* 13–30. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2016.12.012

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169–202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Jacobs, V. R., y Spangler, D. A. (2017). Research on core practices in K-12 mathematics teaching. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education*. (p. 766-792). National Council of Teachers of Mathematics.

Lee, C. (2010). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas.* Ediciones Morata.

Llinares, S. (2013). Professional Noticing: a component of the Mathematics teachers' professional practice. *SISYPHUS. Journal of Education*, *1*(3), 76-93.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. Routledge Falmer.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2015). *Bases curriculares de Séptimo a Segundo Medio*. Autor.

OECD (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. OECD Publishing.

Santagata, R., König, J., Scheiner, T., Nguyen, H., Adleff, A. K., Yang, X., y Kaiser, G. (2021). Mathematics teacher learning to notice: a systematic review of studies of video-based programs. *ZDM - Mathematics Education*, 53,119-134. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01216-z

Seidel, T., y Stürmer, K. (2014). Modeling and Measuring the Structure of Professional Vision in Preservice Teachers. *American Educational Research Journal*, *51*(4), 739–771. https://doi.org/10.3102/0002831214531321

Solar, H., y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *30*(56), 1092–1112. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13

Solar, H., Treviño, E., San Martín, E., y Ayala, P. (2018). Modelo de apoyo para el desarrollo profesional docente para estructuras de gobierno municipal y Servicios Locales de Educación (SLE). In *Propuestas para Chile. Concurso Políticas públicas 2017* (pp. 75–104).

Van Es, E. A., y Sherin, M. G. (2002). Learning to Notice: Scaffolding New Teachers' Interpretations of Classroom Interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10, 571–596.

Van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. En M. G. Sherin, V. Jacobs, y R. Philipp (Eds.*), Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134-151). Routledge.

Van Es, E. A., y Sherin, M. G. (2021). Extending on prior conceptualizations of teacher noticing. *ZDM Mathematics Education, 53*(1), 17-27. https://doi. org/10.1007/s11858-020-01211

ESTUDIO DE LAS PRÁCTICAS DOCENTES EN LA ENSEÑANZA DE LÍMITES DE FUNCIONES EN UNA VARIABLE

Marcela Soto González, Daniela Araya Bastías

Universidad Central de Chile

marcela.sotog@alumnos.ucentral.cl, daniela.araya@ucentral.cl

La presente investigación tiene por objetivo analizar las prácticas pedagógicas que desarrollan un grupo de docentes chilenos para enseñar a nivel escolar el objeto límite de una variable real. El estudio está basado en el Conocimiento Didáctico Matemático y las Configuraciones Epistémicas del objeto límite de funciones en una variable real mediante un estudio cualitativo cuyo diseño metodológico es descriptivo.

Límite de funciones en una variable, Conocimiento Didáctico Matemático, Configuración Epistémica.

ANTECEDENTES

Desde la publicación de las Bases Curriculares de Tercero y Cuarto Medio en el año 2019, el concepto de límite se ha incorporado a la enseñanza escolar en el plan diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales (MINEDUC, 2021a), además, los nuevos Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática (MINEDUC, 2021b), publicados por el Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP) publicados recientemente el año 2021, releva la importancia de las habilidades y conocimientos que deben desarrollar los docentes en la enseñanza del cálculo, en particular, del objeto matemático límite de funciones en una variable. En particular, se destaca el estándar D que señala que un profesor en formación y ejercicio de matemática debe: "comprender las nociones de límite (…) lo que le permite planificar y gestionar actividades de aprendizaje para que sus estudiantes incorporen estos conocimientos del cálculo y los apliquen para resolver problemas y modelar fenómenos naturales y sociales" (p. 91).

Por otra parte, existen diversas investigaciones respecto a la enseñanza de límite, por ejemplo, Koirala (1997) declara que la enseñanza del cálculo como asignatura general, y por ende del objeto límite, está dividida en dos amplios campos: la enseñanza tradicional, donde el docente da reglas y los estudiantes deben únicamente aplicarlas, y la segunda es aquella basada en enfoques exploratorios e intuitivos, para desarrollar los significados de los diversos conceptos.

Otras investigaciones muestran la dificultad de enseñar este objeto matemático, muchas de ellas basándose en la complejidad intrínseca del límite en sí y su desarrollo y evolución epistémica, en este sentido, se destacan los trabajos de Cornu (1991), Sierspinka (1985), Artigue (1995), Medrano y Pino-Fan (2016). Por otra parte, se destacan son los trabajos realizados por Barahmand (2017), Mamona-Downs (2001) y Blásquez et al. (2006), en estas indagaciones se da relevancia a los problemas cognitivos que poseen los estudiantes relacionados con el infinito y la complejidad de la noción formal ε, δ.

Según lo anteriormente señalado, se evidencia en la literatura pocos estudios referentes a los diversos objetos matemáticos del área del cálculo que movilizan docentes de enseñanza secundaria escolar en sus prácticas pedagógicas. Por tal razón, esta investigación tiene como finalidad estudiar los diferentes significados de la noción de límite de funciones en una variable que movilizan profesores chilenos en enseñanza escolar para llevar a cabo el aprendizaje de sus estudiantes.

MARCO TEÓRICO

Conocimiento didáctico matemático

El Conocimiento didáctico matemático (CDM) es un modelo propuesto por Godino (2009) basándose en el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) (Godino 2002; Godino et al, 2007), la noción de proficiencia en la enseñanza de las matemáticas (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008) y el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Hill et al., 2008) que permite analizar el conocimiento de un docente de matemática.

Se consideran entonces diferentes herramientas del EOS para proporcionar un sistema dividido en dimensiones y sus respectivas subcategorías de conocimiento donde cada una describe lo que el profesor(a) debe conocer, comprender y saber aplicar (Parra, 2021). Las dimensiones y subcategorías del CDM están representados en la Tabla 1.

Tabla 1.

Primera y segunda dimensión del CDM.

Dimensión	Subcategoría	Descripción de la subcategoría
Dimensión matemática	Conocimiento común del contenido	Conocimiento suficiente para cubrir lo propuesto por el currículo matemático o los planes de estudio locales. Este conocimiento es común entre docente y estudiantes.
	Conocimiento ampliado del contenido	Conocimiento que va más adelante en el currículum y da herramientas para plantear retos en el aula, vincular el objeto con otros y encaminar a los estudiantes al estudio de nociones matemáticas futuras.
Dimensión didáctico-matemática	Faceta epistémica	Conocimiento especializado del docente dentro de la matemática, hace referencia a si los docentes logran transitar por las diversas representaciones del objeto, resolver las tareas por distintos procedimientos y vincular un objeto matemático a otros.

	Faceta cognitiva	Conocimiento que posee el docente respecto a los conocimientos que poseen sus estudiantes respecto al objeto matemático
	Faceta afectiva	Conocimiento del docente respecto a actitudes, emociones, creencias, valores y comportamiento de sus estudiantes y cómo tratarlos.
	Faceta interaccional	Conocimiento del docente respecto a las interacciones que se dan dentro del aula.
	Faceta mediacional	Conocimiento del docente respecto a recursos y medios que se utilizan dentro del aula y la pertinencia de su utilización.
	Faceta ecológica	Conocimiento del docente respecto al currículum matemático como se relaciona con otras asignaturas, aspectos socioculturales, económicos, políticos, contextuales, etc., que influyen dentro del aula.

Fuente: Tomado de Parra (2021).

Si bien dentro del trabajo de Godino (2009) se presenta una tercera dimensión (la meta-didáctico matemática) esta no será considerada dentro del desarrollo de esta investigación.

Configuraciones Epistémicas

Basándonos en lo propuesto por el EOS y el trabajo de Araya (2022), una Configuración Epistémica (CE) es una red de conocimiento respecto a un objeto matemático. En estas se pueden identificar y caracterizar distintos objetos primarios los cuales movilizan cada uno de los significados parciales; en otras palabras, una CE son los distintos significados parciales que son caracterizados por distintos objetos primarios. Así Araya (2022) propone las siguientes CE para el objeto límite de funciones en una variable real:

- CE N°1: Límite como aproximación en la Matemática Griega
- CE N°2: Límite en la concepción de los Indivisibles
- CE N°3: La Noción Intuitiva de Límite de Newton
- CE N°4: La Idea de los Infinitesimales de Leibniz
- CE N°5: Concepciones prefórmales de Límite
- CE N°6: La noción de límite de Weierstrass

Destacamos este trabajo, puesto que nos ayudará a confeccionar los diversos instrumentos de recolección de información para analizar los diversos significados parciales del objeto límite de funciones en una variable que un grupo de docentes chilenos movilizan en sus prácticas pedagógicas.

METODOLOGÍA

El presente trabajo se basa en el paradigma cualitativo, cuyo diseño metodológico es descriptivo, debido a que el propósito de la investigación es describir las prácticas docentes en cuanto al objeto límite de funciones en una variable real. En este sentido, Sandelowski (2000) establece que: "El estudio descriptivo cualitativo es el método que se puede elegir cuando se deseen descripciones rigurosas de los fenómenos" (p. 339).

Los sujetos de estudio son un grupo de 4 docentes se encuentran impartiendo el plan diferenciado de Límites, Derivadas e Integrales (MINEDUC, 2021a) durante este año 2022 en establecimientos particulares, particular-subvencionados y municipales de diversas zonas de la Región Metropolitana. Estos docentes fueron escogidos, debido a que realizan clases en colegios con estudiantes de diversos contextos socioeconómicos y culturales.

La primera etapa de la investigación consistirá en la aplicación de entrevistas semiestructuradas donde se les preguntará aspectos de la dimensión matemática y didáctico-matemática, en particular, la faceta epistémica. Adicionalmente, se estudiará el material que han diseñado y/o replicado para la enseñanza del objeto matemático en sus alumnos. Para el diseño de la entrevista y el análisis de los materiales se utilizará aspectos del CDM y de las CE del objeto límite antes mencionado.

La segunda etapa de la investigación tratará de la observación de clases impartidas por los docentes, la cual se realizará el próximo año por medio de una Pauta de Observación sustentadas en los aspectos mencionados del CDM y de las CE del objeto límite.

PROYECCIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Por el momento, la entrevista que será aplicada se encuentra en el proceso de creación, esperando ser validadas y aplicadas durante la segunda semana de noviembre junto con la revisión del material proporcionado por los docentes. Se espera que los docentes realizan cada uno sus clases de diversas formas, movilizando diversas concepciones del objeto de límite para cumplir con el objetivo planteado por el ministerio.

REFERENCIAS

Araya, D. (2022). *Diseño de tareas sobre los significados parciales de la noción de límite en funciones de una variable* [Tesis de Doctorado, Universidad de Los Lagos, Chile].

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Barahmand, A. (2017) The Boundary Between Finite and Infinite States Through the Concept of Limits of Sequences. *Journal of Science and Mathematics Education, 15*(6), 569-585.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9*(2), 189-209.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*, 153-166. Kluwer Academic Press

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(2/3), 237-284

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Koirala, H. P. (1997). Teaching of calculus for students'conceptual understanding. *The Mathematics Educator, 2*(1), 52-62.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of the limits of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 259–288.

Medrano, I. y Pino-Fan, L.R. (2016). Estadios de comprensión de la noción matemática de límite finito desde el punto de vista histórico. *Journal of Research in Mathematics Education, 5*(1), 287-323.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2021a). *Programa de Estudio Tercer o Cuarto Año Medio Formación Diferenciada Matemática: Límites, Derivadas e Integrales*. Versión web. Autor.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2021b). *Estándares de la Profesión Docente Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media*. CPEIP.

Parra, Y. (2021). *Conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores chilenos de enseñanza media sobre la noción de función: una experiencia en contextos de microenseñanza* [Tesis de Doctorado, Universidad de Los Lagos, Chile].

Sandelowski, M. (2000). Whatever happened to qualitative description? *Research in Nursing y Health,23,* 334-340.

Schoenfeld, A., y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, y T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Sense Publishers.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathèmatiques, 6*(1), 5-67.

ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE BIOLOGÍA: DISEÑO DE UN MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERENCIA

Gretel Alejandrina Fernández von Metzen, Verónica Parra

Universidad Nacional de Misiones

gretel.fernandez@fceqyn.unam.edu.ar, vparra@niecyt.exa.unicen.edu.ar

Este trabajo presenta el diseño preliminar de un posible Modelo Praxeológico de Referencia generado a partir de la pregunta generatriz Q_0: ¿Cómo determinar si ciertas masas de agua son propicias para la vida acuática? Este modelo es la etapa inicial al diseño de un dispositivo didáctico elaborado para enseñar matemática bajo la pedagogía denominada de la investigación y del cuestionamiento del mundo. Ambos diseños, tanto del modelo praxeológico como del dispositivo didáctico, se gestan en el contexto universitario argentino, destinados a un cursado regular de la asignatura Matemática del Profesorado Universitario en Biología.

Modelo praxeológico de referencia, Modelización matemática, Formación de profesores de biología, Teoría antropológica de lo didáctico.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo es parte de una tesis doctoral en curso que tiene por objetivo general problematizar la enseñanza tradicional de la matemática, e implementar una enseñanza funcional y con cierto sentido, en este caso, en aquellas carreras donde la matemática no es objeto de estudio sino instrumento de modelización, tal como ocurre en la formación universitaria de los Profesores en Biología de la Universidad Nacional de Misiones (Argentina). La tesis doctoral comporta, además, entre sus objetivos particulares, diseñar, implementar, describir y evaluar un dispositivo didáctico, denominado recorrido de estudio e investigación (REI) (Chevallard, 2004, 2022) para enseñar Matemática en la formación de profesores de Biología. Una etapa preliminar al diseño de este dispositivo corresponde a la gesta de un modelo praxeológico de referencia (MPR). Debido al avance del trabajo de tesis, presentamos aquí aspectos preliminares del diseño de este MPR.

PLANTEO DEL PROBLEMA

Diversas investigaciones en Didáctica de la Matemática concuerdan en que la enseñanza de la matemática, en los diferentes niveles escolares, se reduce al estudio de temas carentes de sentido, sin razones de ser y desconectados entre sí y con otras disciplinas. Incluso, los trabajos realizados en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 2017), explican esta situación a partir de la analogía con la visita a un museo. Allí, la matemática ocupa el rol de una obra de arte, los estudiantes, el rol de visitantes del museo y el profesor, el guía del recorrido. De esta forma, se describe a la enseñanza de la matemática como la visita a esa obra que no puede manipularse por parte de los visitantes y que está allí, presentada para admirar y venerar. Este fenómeno, denominado *monumentalización de saberes*, se manifiesta incluso más fuertemente en sistemas donde la matemática viene a ocupar el rol de instrumento y no de objeto de estudio, como es el caso, por ejemplo, en la formación de profesores de Biología. Sería deseable que aquí, la Matemática permita generar modelos para describir y predecir acontecimientos de esta disciplina, como podría ser, por

ejemplo, la determinación de las condiciones (y restricciones) para que ciertas masas de agua sean (o no) propicias para la vida acuática. En situaciones de este tipo, la modelización matemática sería la componente clave de los procesos de enseñanza y aprendizaje, pero, bajo la influencia de la epistemología dominante (la que sirve de hábitat para el fenómeno de la monumentalización), la modelización ha sido restringida al nivel de aplicacionismo, entendida como "…una mera "aplicación" del conocimiento matemático previamente construido o, en su caso más extremo, como una simple "ejemplificación" de las herramientas matemáticas en ciertos contextos extra matemáticos artificialmente construidos con este propósito" (Barquero et al., 2014, p. 89).

MARCO TEÓRICO

En el marco de la TAD, se concibe a la modelización como un medio para enseñar matemática, estableciendo relación con alguna (o varias) disciplina(s) del campo profesional en cuestión (Bosch et al., 2006). De esta manera, se piensa a la *modelización matemática* desde una perspectiva codisciplinar, en la que confluye la modelización intra y extra matemática. Aspecto crucial de esta teoría que se opone a la idea de aplicacionismo. Se propone entonces, dentro del marco de a TAD, la noción de *recorrido de estudio e investigación* (REI) como un dispositivo didáctico cuya principal función es hacer vivir a la modelización matemática en los sistemas de enseñanza. Esta función de los REI proviene de una de sus características claves: la construcción (y reconstrucción) del saber matemático (y no matemático) como respuesta a una pregunta en sentido fuerte, denominada *pregunta generatriz*. Preguntas que provengan de la disciplina en cuestión (la Biología en nuestro caso) y que su respuesta no sea la simple búsqueda de información en un libro, en Internet o acudiendo al profesor, sino que requiera la generación de otras sub-preguntas (denominadas *preguntas derivadas*) y la construcción de modelos que pongan en juego, de forma colectiva, saberes matemáticos y no matemáticos.

Así, un REI debe partir de una pregunta generatriz capaz de generar numerosas preguntas derivadas abogando hacia una gran arborescencia de preguntas y respuestas. Respuesta que van a materializarse en la inquietud de indagar qué saberes matemáticos, biológicos, químicos, físicos y ecológicos, entre otros, pueden ser modelizados a través del estudio de esa pregunta generatriz y sus derivadas. Pero ¿cómo formular una pregunta de este tipo? Y ¿cómo garantizar ese poder generador? Aparece aquí la noción de *modelo praxeológico de referencia* (MPR). Como su nombre lo indica, se trata de un posible modelo que construye el investigador donde, una vez formulada la posible Q_0 (pregunta generatriz) evalúa las potencialidades de la misma analizando, describiendo y explicitando las posibles preguntas derivadas y los saberes implicados en las respuestas a esas preguntas. El diseño del MPR se caracteriza por ser una actividad abierta y flexible para el investigador. Este modelo se constituye en una posible propuesta de lo que se llevará a cabo en el aula; sin embargo, el modelo podrá ser enriquecido durante su implementación con nuevas cuestiones derivadas no previstas de antemano, y emergentes en la práctica misma. Por cuestiones de avances de la tesis doctoral, se presenta aquí la pregunta generatriz formulada y la descripción preliminar del MPR en términos de posibles preguntas derivadas a partir de ella.

DISEÑO PRELIMINAR DE UN POSIBLE MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERENCIA

Se espera que la cuestión generatriz propuesta permita vincular a la Matemática con la Biología y otras disciplinas propias de la formación básica de los estudiantes del Profesorado Universitario en

Biología. Para la construcción de la pregunta generatriz se partió de considerar una problemática que posea no sólo interés biológico sino también de impacto ambiental. En este sentido, se asume que actualmente en la humanidad existe consenso en considerar el agua como un recurso natural renovable pero escaso. Si bien un poco más del 70% de la superficie terrestre está cubierta por agua, solo el 3% corresponde a agua dulce. La mayor parte de esta, casi el 69%, se localiza de manera sólida en los casquetes polares y glaciares, el 30% aproximadamente concierne a aguas subterráneas (acuíferos) y tan sólo el pequeño resto es el que se encuentra disponible para la vida humana, ya sea en ríos, lagos, lagunas, humedales y arroyos (Caríssimo et al., 2013). Desde un punto de vista biológico, el agua constituye la sustancia esencial para el crecimiento y desarrollo de todos los organismos vivos del planeta, ya sea a nivel terrestre o acuático, puesto que más del 75% del peso de las células vivas es agua (Smith y Smith, 2007). Nuestra pregunta generatriz se circunscribe entonces al estudio del agua en ambientes acuáticos, en particular, a los ecosistemas de agua dulce. Dado que existe una gran diversidad de ecosistemas acuáticos y que, en ellos, además, convergen diferentes factores ecológicos que influyen en la supervivencia, reproducción y desarrollo de los seres vivos a lo largo de su ciclo de vida. De esta forma, sin dar mayores precisiones por cuestiones de espacio, podemos garantizar que la construcción de respuestas a la pregunta generatriz y a sus derivadas se materializará en el estudio de los modelos exponenciales, modelos de crecimiento logísticos, de ecuaciones diferenciales, entre otros (Ver Esquema 1). En virtud de lo expuesto, se consideró próspero emprender un estudio e investigación a partir de la siguiente *pregunta generatriz*:

Q_0: ¿Cómo determinar si ciertas masas de agua son propicias para la vida acuática?

Como punto de partida, ya que no especifica a qué masas de agua hace referencia, ni a qué tipos de organismos vivos considerar, esta pregunta conduce a la multidisciplinariedad y genera una arborescencia de posibilidades a indagar, de sub-preguntas, para construir una posible respuesta. De ella pueden emanar diferentes *preguntas derivadas* que podrán ser estudiadas desde múltiples disciplinas. Cada una de ellas analiza un aspecto en particular de la pregunta generatriz y a su vez, permite contribuir en la elaboración de una posible respuesta global a Q_0. Algunas de las disciplinas que se pueden considerar a priori son: biología, química, física y ecología.

Del estudio realizado hasta el momento, se enumeran posibles preguntas derivadas:

1. ¿Qué factores intervienen en el estudio de la calidad del agua?

   1.1. ¿De qué manera interviene la luz en el estudio de la calidad del agua?

2. ¿Cómo influye la presencia de aguas residuales en la conservación de la vida acuática?

   2.1. ¿De qué manera se produce la proliferación de algas?

   2.2. ¿Cómo se podría describir matemáticamente la proliferación de algas?

      2.2.1. ¿Qué información proporciona el modelo de crecimiento exponencial?

      2.2.2. ¿Qué información proporciona el modelo de crecimiento logístico?

      2.2.3. ¿Qué es una ecuación diferencial?, ¿Qué significa resolver una ecuación diferencial?, ¿Qué características presenta la solución de una ecuación diferencial? ¿Qué significa resolver un problema de valor inicial? ¿Qué

métodos se podrían utilizar para resolver una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden?

3. ¿Qué indicadores de contaminación se pueden utilizar para medir la calidad del agua en ríos?

   3.1 ¿Qué relación se puede establecer entre el nivel de oxígeno disuelto en agua y la calidad del agua?

      3.1.1 ¿Qué información proporciona el modelo matemático de demanda bioquímica de oxígeno?

4. ¿Qué lugar ocupa la fotosíntesis en el proceso de recuperación del agua?

5. ¿Cómo afecta la contaminación a la vida acuática?

   5.1. ¿Cómo afecta a los peces en cuanto a la diversidad?

   5.2. ¿Cómo afecta a los peces en cuanto a la dinámica?

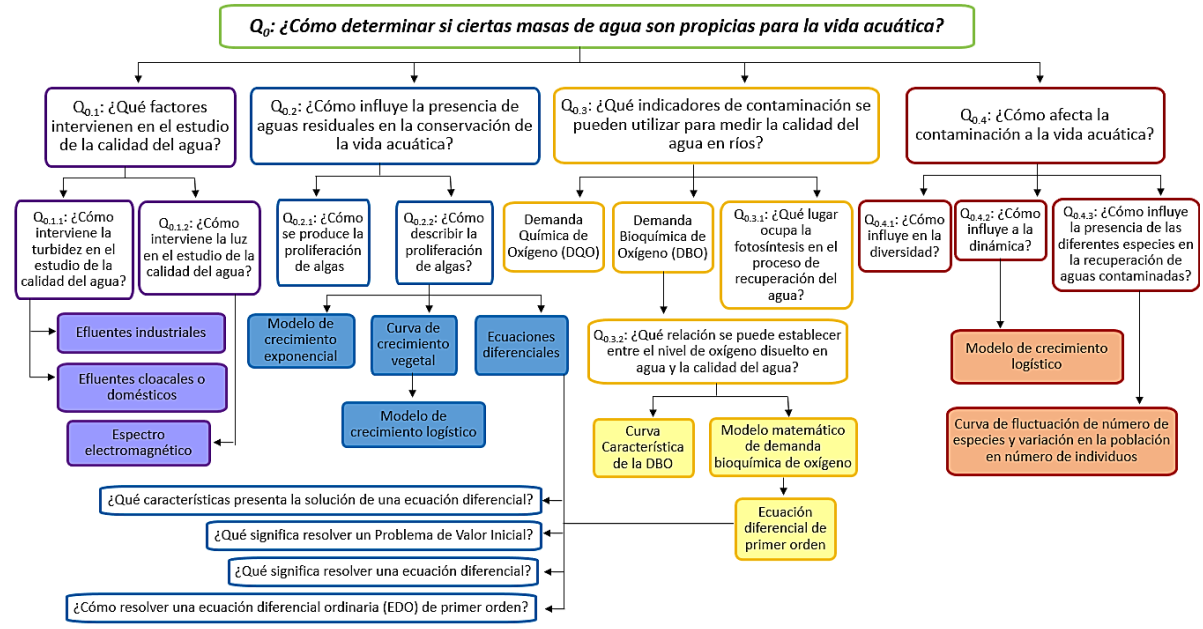
      5.2.1 ¿Qué información proporciona el modelo de crecimiento logístico?

   5.3. ¿Cómo influye la presencia de las diferentes especies en la recuperación de aguas contaminadas?

El Esquema 1 presenta una síntesis de estas preguntas, sus derivadas y los aspectos matemáticos y no matemáticos que permitirán estudiar e investigar de forma codisciplinar.

Figura 1.

Síntesis parcial del diseño preliminar del MPR.



Elaboración de autores.

Por ejemplo, la búsqueda de respuestas a la pregunta $Q_{0.2.2}$: *¿Cómo describir la proliferación de algas?* conduce, en principio, al estudio de las curvas de crecimiento vegetal. Estas curvas son modelizadas a partir de funciones matemáticas considerando el comportamiento de una planta dentro de un ecosistema específico respecto al tiempo. Así, la dinámica de la población de algas permitirá estudiar las ecuaciones diferenciales en términos de un sistema dinámico con determinadas condiciones y restricciones que permitirá predecir la evolución temporal de la cantidad de individuos.

CONSIDERACIONES FINALES

Como ya se indicó previamente, este trabajo pretende presentar los avances preliminares de la construcción de un posible modelo praxeológico de referencia (MPR) generado a partir de la pregunta generatriz Q_0: *¿Cómo determinar si ciertas masas de agua son propicias para la vida acuática?* Esta pregunta Q_0, en virtud de análisis efectuado hasta el momento (y que continuamos realizando) promete ser alentador. Si tomamos en cuenta que una buena pregunta generatriz depende de su poder generador, entonces, podemos asegurar que Q_0 resulta tener esta característica. Además de permitir estudiar la matemática de forma útil a la Biología. Las etapas siguientes en el desarrollo de la tesis son avanzar con el diseño del MPR y luego, durante el ciclo académico del año 2023, implementar esta pregunta generatriz dentro del curso regular de Matemática, con estudiantes del Profesorado de Biología de la Universidad Nacional de Misiones de Argentina.

REFERENCIAS

Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., y Ruiz Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Educación Matemática*, *18*(2), 37-74.

Barquero, B.; Bosch, M., y Gascón, J. (2014). Incidencia del "aplicacionismo" en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 83-100.

Caríssimo, M., Del Cero, P., Fonalleras, M., Silva, P., y Giordano. M. (2013) *Ecosistemas acuáticos*. Instituto Nacional de Formación Docente. Área de Desarrollo Curricular.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. *Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*, 19, 1-13.

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *La Gaceta de la RSME*, *20*(1), pp.159–169.

Chevallard, Y. (2022). On the Genesis and Progress of the ATD. En Y. Chevallard, B. Barquero, M. Bosch, I. Forensa, J. Gascon, P. Nicolás y N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 5-12). Birkhäuser.

Smith, T. M., y R. L. Smith. (2007). *Ecología*. Pearson.

LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA DE LOS FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS AL USAR UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE

María Fernanda Mejía Palomino[1], Andrea Cárcamo Bahamonde[2], Diego Garzón Castro[1]

[1]Universidad del Valle, [2]Universidad Austral de Chile

maria.fernanda.mejia@correounivalle.edu.co, andrea.carcamo@uach.cl, diego.garzon@correounivalle.edu.co

Se presenta la práctica pedagógica de Futuros Profesores de Matemáticas (FPM) en el desarrollo de un experimento de enseñanza colectivo que forma parte de un proyecto de investigación doctoral. El propósito es desarrollar la competencia docente mirada profesional del pensamiento matemático del estudiante cuando los FPM usan una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) para seleccionar y diseñar tareas sobre función cuadrática. En el experimento de enseñanza los FPM conocen y analizan una THA inicial, la cual modifican antes y después de su implementación. Uno de los resultados es que los FPM al usar una THA seleccionan y diseñan tareas matemáticas acordes al nivel de pensamiento de sus estudiantes.

Trayectoria hipotética de aprendizaje, Formación inicial de profesores, Mirada profesional, Experimento de enseñanza colectiva.

COMPETENCIA DOCENTE MIRADA PROFESIONAL DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DEL ESTUDIANTE

En esta investigación, se entiende la Mirada Profesional (MP) como un proceso de razonamiento basado en el conocimiento para dotar de sentido a la enseñanza (Godino y Llinares, 2018; Llinares, 2014; Zapatera, 2015). Para Jacobs et al. (2010), la MP del pensamiento matemático del estudiante se describe como un conjunto de habilidades interrelacionadas que son: (a) atender a las estrategias de los estudiantes, (b) interpretar la comprensión de los estudiantes y (c) decidir cómo responder con base a la comprensión de los estudiantes.

En la actividad profesional del profesor, la MP puede pasar inadvertida, pero hacerla explícita permitiría una enseñanza eficaz (Amador, 2022; Jacobs et al., 2020). Por tal razón, Llinares (2013; 2014) hace un llamado a la comunidad para desarrollar esta competencia docente en la formación inicial, dado que no es de desarrollo innato, pero permitiría el aprendizaje del profesor a lo largo de su vida profesional. En tanto que la práctica pedagógica es un proceso de reflexión, de conceptualización, investigación y experimentación didáctica que articula conocimientos para el desarrollo de sus competencias profesionales (MINEDUC, 2016). Por lo cual, la práctica pedagógica es un espacio de formación permanente que requiere del desarrollo de la competencia docente MP del pensamiento matemático del estudiante.

Respecto a lo expuesto, el objetivo de esta investigación es desarrollar la competencia docente MP de FPM cuando usan una THA sobre función cuadrática para seleccionar y diseñar tareas matemáticas. Para Simon (1995) la THA se compone de: el objetivo de aprendizaje, las actividades de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético (una predicción de cómo evolucionará el

pensamiento y la comprensión de los estudiantes en el contexto de las actividades de aprendizaje). En este caso, la THA es un constructo teórico porque retoma teorías del aprendizaje de las matemáticas para construir sus componentes y también, es un constructo metodológico porque se vincula al desarrollo de una investigación de diseño.

INVESTIGACIÓN DE DISEÑO

La metodología es la investigación de diseño porque el interés propiciar el desarrollo de la MP en los futuros profesores cuando analizan el aprendizaje de sus estudiantes. En particular, se realizó un experimento de enseñanza colectivo en relación con una THA sobre función cuadrática.

Para Wittmann (2021) los experimentos de enseñanza colectivos son una adaptación de estudio de lecciones (o estudio de clases). En tanto, los investigadores reflexivos proponen problemas de investigación a profesores reflexivos para que participen del proceso a través de su práctica diaria. Al igual que Llinares y Fernández (2021) se considera oportuno propiciar espacios de interacción entre los FPM para validar sus argumentos sobre sus acciones en el aula.

De la investigación de diseño se siguen las tres fases propuestas por Bakker (2018) cuando se realiza un experimento de enseñanza con el uso de una THA. Se describe a continuación las etapas de un primer ciclo del experimento de enseñanza:

- Fase 1, preparación y diseño. A los FPM se les presentaron los fundamentos teóricos y prácticos de una THA inicial sobre función cuadrática (THA 0). Luego, los dos FPM se reunieron para analizar la THA 0 y modificarla. En esta fase se tomaron registros escritos de la THA adaptada por los FPM (THA 1) y se realizó una entrevista semiestructurada a los grupos de FPM respecto a su THA 1.
- Fase 2, implementación. En el marco de su práctica pedagógica, los FPM fueron los docentes del experimento de enseñanza en donde aplicaron la THA 1 sobre funciones polinómicas con estudiantes del grado undécimo (15 a 17 años). Las interacciones durante la clase se registraron por medio de una cámara fija y registro de audio o video portable por los FPM.
- Fase 3, análisis retrospectivo y rediseño. Se infiere la trayectoria real de aprendizaje a partir de las respuestas de los estudiantes, las observaciones del investigador y los FPM, además de los registros de audio y video de la implementación. Con el análisis de esta información, se diseñó una entrevista semiestructurada para identificar las habilidades que caracterizan la MP de los FPM respecto a la tarea profesional de selección y diseño de tareas matemáticas.

La fase 3 del primer ciclo genera el inicio de la fase 1 de un segundo ciclo. Para el segundo ciclo, los FPM realizaron la implementación en grado 12 (16 a 21 años). De esta manera, la THA 0 es adaptada para generar una THA 1 en el primer ciclo y una THA 2 en el segundo ciclo del experimento de enseñanza (Figura 1). A continuación, se realiza la descripción del desarrollo de la investigación de diseño respecto al desarrollo de la competencia docente MP.

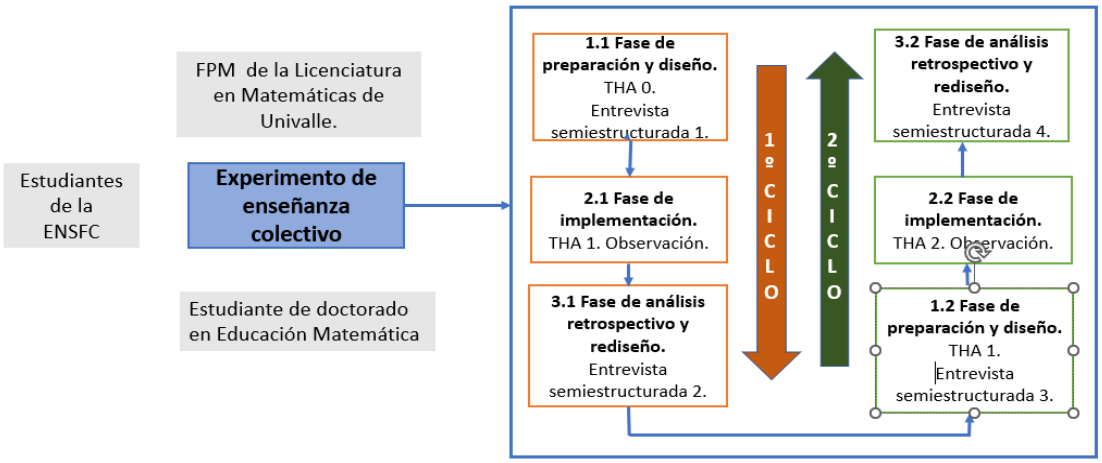
RESULTADOS

Los FPM participantes de esta investigación se encontraban finalizando sus estudios de licenciatura en matemáticas de la Universidad del Valle (Univalle), participaron voluntariamente de este proyecto de investigación doctoral, que a su vez hacía parte del desarrollo de los cursos de Práctica Profesional

I y II. Los FPM realizaron su primera implementación de THA 1 con estudiantes de grado undécimo de una Escuela Normal Superior Farallones de Cali (ENSFC) en una sólo jornada de 4 horas (con interrupciones relacionadas con tiempos de descanso de los estudiantes). La segunda implementación de su THA 2 la realizaron con estudiantes de grado 13 de la ENSFC en dos jornadas de trabajo de 2 horas.

Figura 1.

Resumen del experimento de enseñanza colectivo.



Nota. Este esquema resume el experimento de enseñanza colectivo. El segundo número que acompaña a la fase corresponde al número del ciclo del experimento.

Durante la primera fase del experimento, los FPM conocieron los fundamentos teóricos y prácticos de una THA inicial (THA 0) que aborda el problema de construir una cerca de una huerta con una malla de longitud fija. El propósito de esta actividad de aprendizaje es explorar una familia de rectángulos con igual perímetro. Se invitó a los FPM a realizar cambios, algunas modificaciones de la THA 0 se centraron en la contextualización de las preguntas y los applets de GeoGebra, también adicionaron nuevos materiales para simular el cerco rectángular con la cuerda y agregaron un caso particular en unas preguntas que pretendía generalizar el problema. En el proceso hipótetico de aprendizaje identificaron que una de las dificultades estaba en reconocer que un cuadrado es un rectángulo. Por tanto, los FPM construyeron a partir de THA 0 una THA 1.

En la primera fase de implementación de THA 1, los FPM mostraron dificultades al interactuar con sus estudiantes porque aprueban todas las respuestas y no realizaron oportunamente una socialización y discusión grupal. Sin embargo, los FPM logran identificar dificultades de aprendizaje no previstas en su THA 1, como la relacionada con la obtención de la expresión algebraica del área de la familia de rectángulos con perímetro fijo.

En la entrevista semiestructurada realizada en la primera fase de análisis retrospectivo y rediseño se identifican otras dificultades en el proceso de aprendizaje no detectadas en THA 1, por ejemplo, las relacionadas con el análisis de la gráfica y también necesidad de modificar las preguntas, que en su redacción eran imprecisas.

En la segunda fase de preparación y diseño, los FPM realizaron cambios a los applets de GeoGebra como fijar algunos puntos y ampliar algunos textos. Los cambios se centraron en quitar algunas preguntas y usar tablas para hacer explícita la necesidad de analizar datos particulares. Se generó la discusión de cuándo hacer explícita la diferenciación entre perímetro y área de un rectángulo y cuándo hacer uso las fórmulas para hallar el área y perímetro de un rectángulo. También se determinó cuándo realizar la socialización de las respuestas a las preguntas. En esta fase, los FPM construyen a partir de THA 1 una THA 2.

En la segunda fase de implementación de la THA 2, los FPM lograron sostener conversaciones con los estudiantes que permitían acercarlos al problema. Las preguntas fueron más precisas y las tablas de datos particulares permitían un mejor análisis de la relación entre las variables. Las respuestas de los estudiantes muestran que lograron entender el problema.

En la segunda fase de análisis retrospectivo los FPM al participar en una entrevista semiestructurada logran usar en sus argumentos evidencias de aprendizaje y ampliar el proceso hipotético de aprendizaje. También reconocen sus dificultades en la interacción con los estudiantes porque en algunos momentos revelan demasiada información del problema.

CONCLUSIÓN

La participación de los FPM en el desarrollo de un experimento de enseñanza con una THA fue posible debido al uso de conocimientos profesionales sobre el aprendizaje de las matemáticas en el ejercicio docente. El proceso hipotético de aprendizaje de la THA se usó para precisar las teorías sobre el aprendizaje relacionadas en este caso sobre la función cuadrática y establecer un vínculo entre la selección y diseño de las actividades de aprendizaje.

El desarrollo de las fases de la investigación de diseño permitió a los FPM realizar adaptaciones a la THA. Por tal razón, la participación de los FPM en el experimento de enseñanza colectivo generó el desarrollo de la competencia docente MP el pensamiento matemático de los estudiantes respecto a la tarea profesional de selección y diseño de tareas matemáticas acordes al nivel de aprendizaje de los estudiantes.

Aunque en esta investigación existen aspectos por mejorar, tales como los instrumentos de recolección de información y la misma THA, se muestra que existe una ruta de investigación que da cabida a establecer los vínculos entre los aspectos teóricos, prácticos e investigativos en la formación inicial de los profesores de matemáticas.

REFERENCIAS

Amador, J. M. (2022). Mathematics teacher educator noticing: examining interpretations and evidence of students' thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 25(2), 163–189. https://doi.org/10.1007/s10857-020-09483-z

Bakker, A. (2018). Design principles, conjecture mapping, and hypothetical learning trajectories. En A. Bakker. (Ed.). *Design Research in Education. A Practical Guide for Early Career Researchers* (pp. 46–67). Routledge.

Gravemeijer, K., y Van Eerde, D. (2009). Design Research as a Means for Building a Knowledge Base for Teachers and Teaching in Mathematics Education. *The Elementary School Journal*, 9(5), 510–524.

Godino, J. D., y Llinares, S. (2018). Competencia docente en el análisis de procesos instructivos y desarrollo de una "mirada profesional". Aportes desde el interaccionismo simbólico. En A. Avila (Ed.), *Rutas de la*

Educación Matemática (pp. 19–37). Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., y Philipp, R. A. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41, 169–202. https://doi.org/10.2307/20720130

Lesh, R., y Kelly, A. (2000). Multitiered Teaching Experiments. En R. Lesh y A. Kelly (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 197-230). Lawrence Erlbaum Associates Publishers. https://doi.org/https://doi.org/10.4324/9781410602725

Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista*, 50, 117–133. https://doi.org/10.1590/s0104-40602013000400009

Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, 26, 31–51. http://funes.uniandes.edu.co/13296/1/Llinares2015Experimentos.pdf

Llinares, S., y Fernández, C. (2021). Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática. *La Gaceta de la RSME*, 24(1), 185–205.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2016). La práctica como escenario de aprendizaje. Autor.

Simon, M. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114–145. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.26.2.0114

Wittmann, E. C. (2021). Collective Teaching Experiments: Organizing a Systemic Cooperation Between Reflective Researchers and Reflective Teachers in Mathematics Education. En E. C. Wittmann (Ed.), *Connecting Mathematics and Mathematics Education: Collected Papers on Mathematics Education as a Design Science*. (pp. 239–248). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61570-3

Zapatera, A. (2015). La competencia "mirar con sentido" de estudiantes para maestro (EPM) analizando el proceso de generalización en alumnos de Educación Primaria [Tesis de doctorado, Universidad de Alicante, España].

NOCIÓN DE REALIDAD Y MODELACIÓN EN FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Josefa Castillo-Funes, Carolina Guerrero-Ortiz.

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Josefa.castillo@pucv.cl, carolina.guerrero@pucv.cl

Esta investigación indaga, de manera exploratoria, la noción sobre modelación matemática que sostienen futuros docentes de Educación Básica y reconoce las maneras en que resuelven un problema realista. Los resultados permiten determinar que la mayoría de los futuros docentes plantean la modelación como una representación y que, al enfrentarse a un problema realista, responden de manera estandarizada, con argumentos que emergen de operaciones aritméticas, sin considerar aspectos de la realidad. Con base en estos resultados, se pretende favorecer la construcción de concepciones en futuros profesores para potenciar las habilidades de modelación y resolución de problemas.

Modelación, Resolución de problema realista, Formación inicial docente.

INTRODUCCIÓN

Verschaffel et al. (2020) definen los problemas de palabras (o problemas verbales) como situaciones problemáticas presentadas en un aula de clases, los cuales plantean preguntas cuya respuesta se puede obtener por la aplicación de operaciones a los datos en el problema. Los problemas de palabras difieren de los problemas que se presentan en la vida cotidiana, que en algunos casos también se pueden resolver por la aplicación de operaciones matemáticas, sin embargo, en la vida real hay menos claridad sobre la pregunta o sobre la información numérica u operaciones que se utilizarán.

La revisión de la literatura evidencia que los niños de enseñanza primaria y secundaria, incluso los estudiantes de enseñanza superior, resuelven problemas matemáticos de palabras sin tener en cuenta la realidad de la vida cotidiana (Verschaffel et al., 2000). Para la mayoría de los educadores matemáticos este hecho es problemático, puesto que la función históricamente más importante de los problemas de palabras es ofrecer a los estudiantes la oportunidad de aprender a aplicar las matemáticas que han aprendido en la escuela a la vida real (función de aplicación) (Verschaffel et al., 2000). Desde la perspectiva de la modelación matemática, Blum y Borromeo-Ferri (2009) asumen que la "realidad" es todo aquello externo a la matemática, es decir, al resto del mundo, lo cual incluye la sociedad, la naturaleza, la vida cotidiana y otras disciplinas científicas. Sin embargo, las concepciones que tienen los profesores en formación sobre el concepto de modelación; entendiendo concepciones como estructuras mentales que incluyen creencias, significados, conceptos, reglas, imágenes mentales y preferencias (Philipp, 2007), están mayormente relacionadas con la representación de un objeto matemático, por sobre la conexión con la realidad (Guerrero-Ortiz y Reyes-Rodríguez, 2021). Si bien, hay una amplia gama de trabajos relacionados con las creencias y concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, poco se ha profundizado en la exploración en relación con la modelación matemática (Frejd y Bergsten, 2018), menos aún se pueden encontrar resultados que aborden la concepción que tienen los profesores de enseñanza básica y media sobre la realidad en contextos de modelización (Guerrero y

Reyes, 2021). Es por esto que se hace necesario indagar tanto en las concepciones de los futuros docentes sobre la modelación matemática y cómo estos resuelven un problema realista en el que no basta con operar los números, sino que deben integrar su conocimiento o experiencia con situaciones reales.

ANTECEDENTES

En relación con los problemas realistas, Verschaffel et al. (1994) distinguieron entre problemas estándar que son problemas de palabras clásicos, los cuales pueden resolverse mediante una operación o algoritmización sencilla con los números del problema; y los problemas de palabras problemáticos, que requieren la consideración de aspectos de la situación del mundo real. Al respecto, Dewolf et al. (2014) realizó una investigación en donde les pidió a los estudiantes de primaria superior que resolvieran distintos problemas estándar y problemas de palabras, para su análisis de datos codificó las respuestas de acuerdo a no-realistas (NR) o realistas (RR), dependiendo del uso del conocimiento cotidiano y de las consideraciones realistas en su respuesta y/o en sus posibles comentarios adicionales. Dewolf et al. (2014) encontraron que la mayoría de los estudiantes responden de manera No Realista (NR), por lo que al momento de enfrentarse a problemas que deben considerar la realidad, los estudiantes no la consideran.

El problema para un profesor o investigador es cómo crear problemas o situaciones que no se reduzcan a los problemas típicos que se presentan en los textos. Más aún, cómo inducir -en los estudiantes de pedagogía- procesos de modelación matemática para construir contenidos matemáticos y cómo desarrollar otras competencias adicionales, como la de modelación (Huincahue et al., 2016; Morales y Cordero, 2014). Para responder al desafío curricular de incluir a la modelación en el aula de clases no basta la presentación de buenas tareas de enseñanza, como lo hacen algunos libros de texto, ya que el conocimiento y las concepciones del docente respecto de lo que significa modelar determinan la gestión de las actividades para el aprendizaje (Guerrero-Ortiz y Reyes-Rodríguez, 2021). En la investigación de Guerrero-Ortiz y Reyes-Rodríguez (2021) se evidencian las concepciones de los profesores en formación con respecto al modelado, donde destacan cuatro aspectos principales: modelación como un medio de representación (Representación); modelación como aquellas actividades que pueden ser relacionadas con la solución de un problema en un contexto particular (Contexto); modelación como una actividad asociada a un objetivo (Objetivo), y la modelación asociada a las fases o procesos que la constituyen (Proceso).

La variedad de interpretaciones sobre modelación que se pueden encontrar en la literatura y la ambigüedad de su definición en algunos programas curriculares plantean la necesidad de conocer cuáles son las concepciones que sostienen futuros profesores de Educación Básica, con la finalidad de comprender cómo se forman u organizan estas concepciones y de esta manera tomar acciones desde la formación de profesores.

El foco de atención en esta investigación se centra en el futuro profesor de Educación Básica, buscamos explorar cuál es la relación entre la concepción sobre modelación y la resolución de un problema verbal, considerando aquellos aspectos de la realidad que profesores y profesoras en formación de educación básica identifican al resolver este problema verbal.

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

El siguiente estudio es de un paradigma cualitativo, con un enfoque exploratorio (Bizquerra, 2009). La metodología se alinea con dos objetivos orientadores: indagar la noción de modelación matemática de futuros docentes de Educación Básica y reconocer las maneras en que futuros docentes de Educación Básica resuelven un problema realista. En esta investigación, se indagó en las categorías existentes en la literatura acerca de la modelación matemática y la resolución de un problema realista. Se aplicó un cuestionario a los estudiantes de la muestra, al tratarse de un instrumento exploratorio, este consta solo de una pregunta: ¿qué entiendes por modelación matemática? y un problema realista: "un hombre quiere tener una cuerda suficientemente larga para atar dos postes separados por 18 m, pero solo tiene trozos de cuerda de 1,5 m de largo. ¿Cuántas de estas piezas necesitará atar juntas para luego atarlas a los postes? Este problema fue tomado y modificado de Dewolf et al. (2014),

Puesto que el foco es la noción de modelación y la resolución de problemas realistas, se consideran las siguientes dos preguntas que guían el estudio: ¿Cuáles son las concepciones de modelación matemática de futuros docentes de Educación Básica? y ¿Cómo resuelven un problema realista futuros docentes de Educación Básica?, ambas preguntas aportan al desarrollo de la pregunta central, ¿cuál es la relación entre la concepción sobre modelación y la resolución de un problema verbal, en futuros docentes de Educación Básica?.

Participantes

El muestro que se trabajó fue por conveniencia, debido a su facilidad de acceso y disponibilidad de los participantes de formar parte de la muestra (Hernández-Sampieri, et al., 2018). Es por esto, que el instrumento se aplicó a 53 estudiantes que cursan su cuarto semestre de Pedagogía en Educación Básica, de una Universidad privada chilena.

Los estudiantes han cursado previamente 1 asignatura de formación matemática y 2 de didáctica de las matemáticas y no han tenido experiencias previas con actividades de modelación. Se revisaron los programas de estudio de cada asignatura y en ninguna de estas asignaturas se aborda explícitamente la enseñanza de la modelación matemática.

RESULTADOS

Para realizar el análisis de ambas preguntas del cuestionario, nos basamos en los tipos de respuestas de Dewolf et al. (2016) para el problema realista y para la noción de modelación matemática se utilizaron las categorías de Guerrero-Ortiz y Reyes-Rodríguez (2021).

En particular, Dewolf et al. (2014), codifica como (NR) cuando el resultado es una respuesta directa a la operación matemática, sin ningún comentario adicional sobre la naturaleza del problema o sin consideración de elementos de la vida real que pudiera poner en peligro la idoneidad de la operación realizada. Al contrario, se considera (RR) cuando la respuesta indica algún tipo de estimación, o el resultado del uso de conocimientos del mundo real relacionados con el problema de modelización realista, considera incluso cuando un estudiante ofrece una respuesta directa no realista (aritmetizada) pero hace un comentario adicional reconociendo elementos realistas, también (RR). Para esta investigación nos apoyamos en el trabajo de Dewolf et al. (2014) para categorizar las respuestas de los estudiantes de Pedagogía en Educación Básica en relación a respuestas (NR) o (RR).

En relación a las respuestas que dieron los docentes en formación inicial al problema realista, solo 6 de los 53 estudiantes (11%) respondieron de manera realista (RR), esto quiere decir que consideraron

los aspectos de la realidad (como contemplar que necesitan cuerda extra para atar alrededor de los postes); por otra parte, 26 estudiantes (49%) respondieron de manera no realista (NR) puesto que solo consideraron los datos y los operaron, sin tener en cuenta la atadura de las cuerdas 18/1,5. Cabe destacar que 21 estudiantes (40%) del grupo no logran dar una respuesta, omitiendo el problema.

En relación con la pregunta ¿qué entiendes por modelación matemática?, través del análisis cualitativo descriptivo, las producciones de los estudiantes fueron estudiadas a partir del análisis de contenido (Flick, 2004), donde 2 nuevas categorías surgen de los conceptos atribuidos a la modelación matemática, puesto que no fueron reportadas en la investigación de Guerrero-Ortiz y Reyes-Rodríguez (2021), como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1.

Categorías, definiciones y número de respuestas sobre la noción de Modelación Matemática.

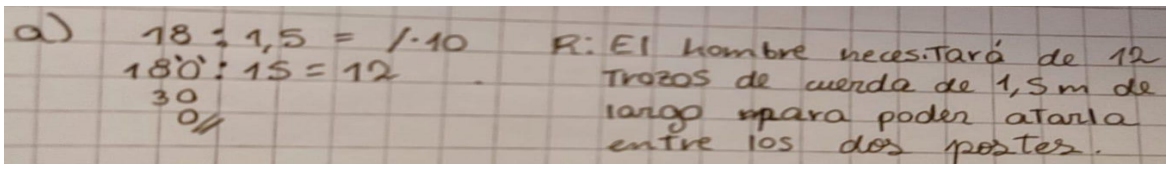
Categoría	Definición	Nº de respuestas
Representación (como modelo y como actividad)	Modelos matemáticos relacionados con una representación gráfica.	8 (15%)
Modelación como un proceso	Solo una parte del ciclo de modelación realidad - modelo matemático es considerada.	3 (6%)
Objetivo de modelar	Un modelo matemático es considerado un medio de representación útil y como medio para aplicar las matemáticas.	5 (9%)
Desde el ámbito comunicativo (categoría emergente)	Modelación entendida como comunicar la resolución de la situación.	6 (11%)
Desde el ámbito pedagógico (categoría emergente)	Modelación entendida desde una idea pedagógica	4 (8%)

Análisis de resultados

Con respecto a los resultados que dan respuesta al primer objetivo se encontró que la mayoría de los estudiantes responden de manera No Realista (NR), un ejemplo es el trabajo de E3 en donde desarrolla el siguiente proceso para responder al problema:

Figura 1.

Resolución del problema verbal del Estudiante 3.

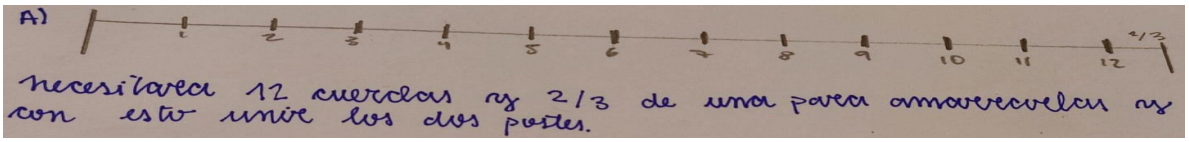


Como se observa en la Figura 1 el estudiante E3, toma los datos del problema y los opera realizando la división de la distancia entre los postes por la medida de la cuerda, realizando un algoritmo sin considerar la realidad en la que debe atar las cuerdas, y por tanto considerar trozos que se pierden al momento de amarrar las cuerdas.

Pese a que la mayoría de los estudiantes respondieron de manera similar a la respuesta de E3, hubo estudiantes que sí consideraron esa realidad, y dieron la siguiente respuesta. (Figura 2).

Figura 2.

Resolución del problema verbal del Estudiante 19.



Como se evidencia en la Figura 2, el estudiante E19, considera que no basta con las 12 cuerdas exactas, sino que necesitará más puesto que debe amarrar las cuerdas. Es por esta razón que este tipo de respuestas se considera de tipo Realista (RR) en términos de Dewolf et al. (2016).

En relación al análisis que da respuesta al segundo objetivo, sobre las concepciones que tienen los futuros docentes sobre la modelación matemática, se obtuvieron diversas respuestas, donde la minoría de las respuestas fue relacionar la modelación como un proceso (Tabla 1) y la mayoría de los estudiantes (27 estudiantes, 51%) no respondieron la pregunta. Pese aquello, la segunda mayoría (8 estudiantes) consideran que la modelación es una representación, como se observa en la Figura 3 y 4.

Figura 3.

Noción de Modelación Matemática, entendida como un proceso, del estudiante 7.

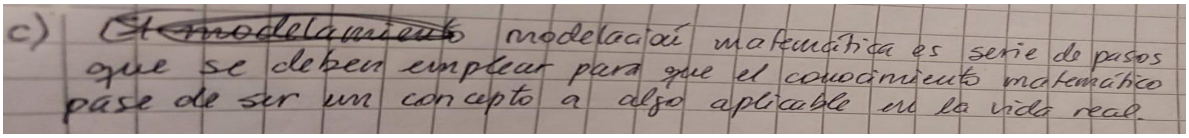
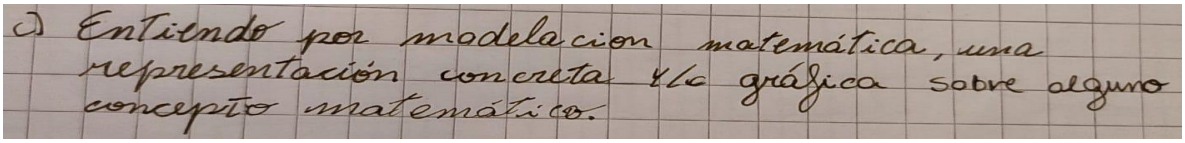


Figura 4.

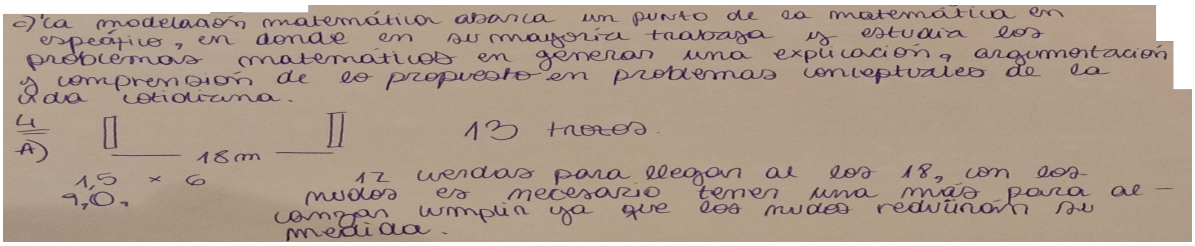
Noción de Modelación Matemática, entendida como representación gráfica, del estudiante 3.



Un aspecto relevante de esta investigación, es que la pregunta inicial sobre cuál es la relación entre la noción de modelación matemática y la forma de abordar un problema verbal, se tiene que solo un estudiante (E35) tiene una noción de modelación matemática relacionada con la realidad, la vida cotidiana y al mismo tiempo da una respuesta realista (RR) al problema verbal planteado (Figura 5).

Figura 5.

Noción de Modelación Matemática, entendida como objetivo de modelar y la resolución del problema verbal, del estudiante 35.



Como observación final, 15 de los estudiantes (28%) no respondieron ninguna de las dos preguntas.

CONCLUSIONES

En un primer acercamiento y dado que la resolución de problemas verbales puede constituir un paso inicial para abordar la modelación de situaciones más complejas, en donde la consideración de diversos aspectos de la realidad juega un papel relevante para la obtención de modelos más o menos precisos, es que a la luz de este trabajo sostenemos que es necesario que la formación docente proporcione espacios de trabajo, en los cuales exista un desarrollo de conocimiento desde la modelación y la resolución de problemas realistas, que les permita a los futuros docentes definir adecuadamente situaciones que modelen un objeto matemático determinado.

AGRADECIMIENTOS

Parcialmente financiado por la Beca de doctorado No.21220556 y Fondecyt/iniciación No.11200169.

REFERENCIAS

Bizquerra, R. (2009). *Metodología de la Investigación Educativa*. La Muralla S.A.

Blum, W., y Borromeo, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Dewolf, T., Van Dooren, W., Ev Cimen, E., y Verschaffel, L. (2014). The impact of illustrations and warnings on solving mathematical word problems realistically. *Journal of Experimental Education*, 82, 103–120.

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Morata.

Frejd, P. y Bergsten, C. (2018). Professional modellers' conceptions of the notion of mathematical modelling: ideas for education. *ZDM*, *50*, 117-127.

Guerrero-Ortiz, C., y Reyes-Rodríguez, A. (2021). Matices que dan forma a las concepciones sobre la modelación de futuros profesores. *REIEC*, 16, 48-61.

Hernández-Sampieri, R., y Mendoza, C (2018). *Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. Mc Graw Hill Education.

Huincahue, J., Morales, A., y Mena, J. (2016). Postura científica de la modelación matemática y su impacto en la enseñanza y aprendizaje. Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 1, 467-478.

Morales, A., y Cordero, F. (2014). La graficación-modelación y la Serie de Taylor. Una Socioepistemología del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(3), 319-345.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 257-318). Information Age Pub.

Verschaffel, L., De Corte, E., y Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, 4, 273–294.

Verschaffel, L., Greer, B., y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., y Star, J., y Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey, *ZDM*, 52, 1-16.

FORMACIÓN CONTINUA DE PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA EN PROBABILIDAD

Mayra Alexandra Mosquera Morales, Eliécer Aldana Bermúdez

Universidad del Quindío

mayraa.mosqueram@uqvirtual.edu.co, eliecerab@uniquindio.edu.co

Esta investigación tiene como objetivo aportar al desarrollo profesional docente para el fortalecimiento del Conocimiento Didáctico-Matemático en probabilidad, de profesores en educación básica primaria, quienes suelen tener poca o ninguna preparación para enseñar probabilidad. Las teorías que fundamentan la investigación parten de los trabajos de Godino et al. (2013), Alsina (2019) y Vaillant (2016), y la metodología se configura a partir de cuatro elementos: los profesores de educación básica primaria como sujetos de investigación, la investigación cualitativa como enfoque, la investigación basada en diseño como método y el paradigma crítico-social como perspectiva.

Conocimiento Didáctico-Matemático, Probabilidad, Profesores de Educación Primaria.

PROBLEMÁTICA

En el territorio nacional (Colombia), las orientaciones curriculares son definidas y divulgadas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN en adelante), siendo importante mencionar que hasta la fecha y de forma particular para el área de matemáticas, existen cuatro documentos en los que se presentan las orientaciones curriculares que se tienen para las instituciones educativas de básica primaria (T a 5°), básica secundaria (6° a 9°) y media (10° y 11°), los cuales son: Lineamientos curriculares (Ministerio de Educación Nacional, 1998), Estándares Básicos de competencias (Ministerio de Educación Nacional, 2004), Derechos Básicos de Aprendizaje (Ministerio de Educación Nacional, 2015) y Mallas Curriculares (Ministerio de Educación Nacional, 2017).

Las orientaciones que se presentan en los documentos oficiales del MEN, para el área de matemáticas, no solo explicitan la necesidad y obligatoriedad de la enseñanza de la estadística y la probabilidad desde los primeros grados de escolaridad, sino que también indican que contenidos se deberían enseñar en cada uno de los grados y se proporcionan ejemplos contextualizados que sirven como guía a los profesores en ejercicio, esperando que se trabaje en el desarrollo del pensamiento aleatorio.

Estas orientaciones de carácter nacional deben ser integradas en los planes de estudio de cada una de las instituciones educativas del país, donde también han de ponerse en consideración circunstancias particulares asociadas por ejemplo al modelo educativo que se considere apropiado o pertinente para la enseñanza de las matemáticas y el contexto donde este ubicada la institución educativa. Siendo oficiales las orientaciones dadas por el MEN, se esperaría que las propuestas curriculares de las instituciones educativas integren la enseñanza de la estadística y la probabilidad en sus planes de área para cada uno de los grados que se oriente, pero no siempre se cumple con esta disposición y en el país se tienen algunas instituciones educativas donde la enseñanza de la estadística y la probabilidad no es considerada para ninguno de los niveles de formación y en otras instituciones solo se contemplada para algunos grados de escolaridad, situación que genera un grado de afectación considerable en la formación integral de los estudiantes.

Partiendo del reconocimiento de estas condiciones particulares, esta investigación tiene como foco de indagación las prácticas didáctico-matemáticas de los profesores que enseñan matemáticas en los primeros grados de escolaridad quienes, por lo general en el contexto colombiano, no cuenta con formación específica en matemáticas y en pocas ocasiones enseñan probabilidad en los grados que orientan, argumentando en algunos casos que los tiempos de trabajo en el aula de clases no permiten abordarla. De acuerdo con este foco de indagación, la investigación se interesa en el desarrollo profesional docente de los profesores en ejercicio de educación básica primaria que enseñan matemáticas, su conocimiento didáctico–matemático para la enseñanza de la probabilidad en los primeros años de escolaridad y en el uso de recursos para el desarrollo de sus prácticas didáctico-matemáticas. Se plantea entonces, la siguiente problemática ¿Qué aportes al desarrollo profesional docente permiten el fortalecimiento del conocimiento didáctico-matemático en probabilidad, de profesores de educación básica primaria? y en concordancia con la problemática planteada, se tiene como objetivo general, aportar al desarrollo profesional docente para el fortalecimiento del Conocimiento Didáctico-Matemático en probabilidad, de profesores en educación básica primaria, mediante una investigación basada en diseño.

MARCO TEÓRICO

De acuerdo con la problemática que se establece, los elementos teóricos que fundamentan esta investigación parten de los trabajos de Godino (2009), Godino y Pino-Fan (2013) y Godino et al. (2013) en relación al Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor (CDM), Alsina (2019) frente a la enseñanza de la Probabilidad en los primeros grados de escolaridad, Vaillant (2016) para el Desarrollo Profesional Docente (DPD) y Gravemeijer y Van Eerde (2009) con relación a la Investigación Basada en Diseño (IBD).

El concepto de Desarrollo Profesional Docente (DPD en adelante), se abordará tomando en consideración las investigaciones realizadas por Vaillant (2018); quien establece que el DPD puede ser implementado de diversas formas y en diferentes contextos, que puede involucrar un número considerable de actores del sistema educativo y que puede darse dentro o fuera de los ámbitos formales de aprendizaje de los profesores en servicio indicando, que la participación de los profesores en relación con su aprendizaje incide de manera positiva en el éxito de los procesos formativos que se realicen. Desde la perspectiva del autor que se pone en consideración, el DPD se estructura en cuatro etapas las cuales se consideran claves a la hora de re-pensar el desarrollo profesional y sugerir estrategias que impacten en el aula y logren cambios significativos. De manera específica, cada una de estas cuatro etapas abordan los siguientes aspectos: las etapas previas de los aspirantes a profesores, la formación inicial en una institución específica, la iniciación signada por los primeros años de ejercicio profesional y la formación continua.

Siendo la cuarta etapa, la de mayor interés en el marco de esta investigación, la cual también hace parte del proceso de aprender a enseñar y está signada por la formación continua del profesor, donde se considera que esta formación es un proceso que puede ser individual o colectivo y que opera a través de experiencias de diversas índoles, tanto formales como informales, contextualizadas en los centros educativos. Vaillant (2016), presentan una definición clara de lo que se consideran como Formación Continua, indicando que esta tiene que ver con el aprendizaje del profesor, hace alusión al trabajo que este realiza, toma en consideración su trayectoria, incluye todas aquellas oportunidades

que puede tener el profesor para mejorar su práctica, se relaciona con la formación de los profesores y actúa sobre cada profesor como sujeto particular y no como programa.

La Formación Continua a la que se hace alusión, tiene entre sus intereses el poder mejorar los conocimientos profesionales de los profesores, en este sentido, se considera necesario asumir dentro de esta investigación una perspectiva teórica con relación al conocimiento del profesor de matemáticas y de manera particular se asume la propuesta de Godino et al. (2013), denominada Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM en adelante).

El CDM tiene el interés de determinar el complejo de conocimientos que un profesor debería tener para la enseñanza de un tópico matemático concreto, se propone entonces un modelo que incluye seis facetas o dimensiones para el estudio y análisis del conocimiento didáctico-matemático, estas facetas son:

1. Epistémica: Distribución, a lo largo del tiempo de enseñanza aprendizaje, de los componentes del significado institucional implementado (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).
2. Cognitiva: Desarrollo de los significados personales (aprendizajes).
3. Afectiva: Distribución temporal de los estados afectivos (actitudes, emociones, afectos, motivaciones) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
4. Interaccional: Secuencia de interacciones entre el profesor y los estudiantes orientadas a la fijación y negociación de significados.
5. Mediacional: Distribución de los recursos tecnológicos utilizados y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
6. Ecológica: Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico, que soporta y condiciona el proceso de estudio (Godino, Font y Pino-Fan, 2013, p. 3)

Godino et al. (2013), contemplan para cada una de estas facetas o dimensiones, diversos niveles que permiten el análisis del CDM del profesor de acuerdo con el tipo de información que se necesite para la toma de decisiones instruccionales. Los niveles son los siguientes:

1. Prácticas matemáticas y didácticas. Descripción de las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También se describen las líneas generales de actuación del docente y discentes.
2. Configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos). Descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje.
3. Normas y metanormas. Identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones.

4. Idoneidad. Identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica. (Godino et al., 2013, p. 4)

En el modelo se proponen también, una serie de pautas para la formulación de consignas que permiten evaluar el conocimiento didáctico-matemático en los profesores. De este modo, en la investigación, se pretende hacer uso de este modelo en dos sentidos, el primero en relación con la posibilidad de evaluar los conocimientos de los profesores de educación básica primaria en probabilidad y el segundo, con relación al diseño e implementación de un ciclo formativo para los profesores que permita fortalecer su conocimiento didáctico-matemático en probabilidad.

Siendo importante entonces tener claridad en relación con lo que se espera que los estudiantes de educación básica primaria aprendan en probabilidad y para esto se ponen en consideración los elementos teóricos propuestos por Alsina y Vásquez (2016), quienes advierten que, el desarrollo de los conocimientos de probabilidad pasa por diferentes fases:

- Actividades informales, centradas en juicios que emiten los alumnos con base en sus propias experiencias empleando términos como «seguro», «probable» o «imposible».
- Experimentos aleatorios con material concreto para comenzar a cuantificar la posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso.
- Cálculo de probabilidad de sucesos compuestos sencillos, dejando para la siguiente etapa el cálculo de probabilidad de sucesos dependientes e independientes, así como conceptos de mayor complejidad.

Alsina (2019) indica que es importante reconocer que los cambios sociales de las últimas décadas requieren conocimientos que permitan a los ciudadanos responder preguntas cuyas respuestas no son inmediatamente obvias, a la vez que les faciliten la toma de decisiones en situaciones en las que la incertidumbre es relevante, siendo necesario ofrecer a los estudiantes una educación de alta calidad que se ajuste a estas nuevas exigencias. Las orientaciones dadas por Alsina (2019), quedan en concordancia con los intereses investigativos que se tienen, pues no solo se preocupa porque la probabilidad sea enseñada en los primeros grados de escolaridad, sino que también reconoce la necesidad de que los profesores en ejercicio se hagan participes de planes de formación permanentes y cuenten con los conocimientos necesarios para enseñar probabilidad.

MARCO METODOLÓGICO

En cuanto a la metodología de investigación, con la cual se aborda la problemática propuesta, se hace necesario explicitar que esta se estableció a partir de la organización de los siguientes elementos:

Para empezar, se tiene el interés de realizar una investigación de corte cualitativo de acuerdo con los desarrollos teóricos de Flick (2004), este tipo de investigación es de gran relevancia para el estudio de las relaciones sociales, gracias a la pluralización de los mundos vitales y que en ella, se tienen en cuenta aspectos tales como la elección correcta de métodos y teorías apropiados, el reconocimiento y el análisis de perspectivas diferentes, las reflexiones de los investigadores sobre su investigación como parte del proceso de producción del conocimiento y la variedad de enfoques y métodos. En concordancia con la investigación cualitativa, se asume la Investigación Basada en Diseño (IBD en

adelante) como método, tomando como referente los desarrollos teóricos de Gravemeijer y Van Eerde (2009), según estos autores, en la IBD se investigan elementos específicos de los entornos de instrucción que pueden ser esenciales para lograr el aprendizaje previsto refiriéndose, por ejemplo, a la cultura del aula, el papel del profesor, el papel de los símbolos o el papel del lenguaje en la educación matemática. Al considerar la IBD como un método de investigación, se pueden discernir dos características sobresalientes: (a) el rol específico del diseño y (b) el rol específico del experimento. Teniendo en cuenta que la IBD tiene como objetivo la mejora educativa y las nuevas formas de aprendizaje, es necesario un diseño instruccional bien considerado y se debe tener cuidado para garantizar que el experimento de diseño se base en investigaciones previas y principios de diseño o teorías de diseño bien fundamentados. Se pueden distinguir entonces tres fases en cada experimento de diseño: (1) la preparación para el experimento; (2) el experimento de enseñanza; y (3) el análisis retrospectivo.

En cuanto a la perspectiva metodológica se asume una mirada Critico-Social, tomando en este caso los desarrollos teóricos de Habermas (1986) y Popkewitz (1988) como referente, pues se parte de la intencionalidad de lograr no solo el reconocimiento de una realidad en el campo educativo, sino procurar su transformación. Este paradigma, se fundamenta en la crítica social con un marcado carácter auto reflexivo, considerando que el conocimiento se construye siempre por intereses que parten de las necesidades de los grupos, pretende la autonomía racional y liberadora del ser humano, la cual se consigue mediante la capacitación de los sujetos para la participación y transformación social. Por último y no menos importante, se reconocen como sujetos de investigación, los profesores de educación básica primaria que enseñan matemáticas. Siendo importante resaltar que los elementos que se ponen de manifiesto, con relación a la metodología de investigación, hacen explicito que, en el desarrollo de esta, los sujetos de investigación juegan un papel de suma importancia, pues mediante un proceso de construcción y reconstrucción sucesiva de la teoría y las prácticas didáctico-matemáticas de estos, el investigador promueve la generación de transformaciones que den solución a situaciones específicas en cuanto a la enseñanza de la probabilidad.

RESULTADOS ESPERADOS

Finalizada esta investigación, las conclusiones se constituirán en concordancia con las unidades de análisis establecidas y las transformaciones que se generen en la institución educativa en la cual laboran los sujetos de investigación. De este modo, se espera tener contribuciones con relación a la formación que pueden recibir los profesores que se encuentran en el ejercicio de su labor, siendo está fundamentada desde uno de los modelos que se tienen en cuanto al conocimiento profesional del profesor de matemáticas, se tiene también una gran expectativa en cuanto lo que se puede lograr con relación a la enseñanza de la probabilidad en la educación básica primaria y en como la investigación basada en diseño puede permitir el reconocimiento de las realidades de la institución educativa y sus profesores, para el establecimiento de propuestas innovadoras y transformadoras. En correspondencia con este último aspecto, donde se hace alusión a la institución educativa, se considera valioso resaltar que es importante que estas se consoliden como un espacio de aprendizaje no solo para los estudiantes, sino también para los profesores, generándose la oportunidad de materializar cambios significativos en la enseñanza de las matemáticas a partir de los diferentes avances que se tienen en el campo de la educación matemática.

REFERENCIAS

Alsina, A. (2019). La estadística y la probabilidad en educación infantil: un itinerario de enseñanza. En J.M. Contreras, M.M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Alsina, Á. y Vásquez, C. (2016). La probabilidad en educación primaria. De lo que debería enseñarse a lo que se enseña. *Uno*, 71, 46-52.

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa* (Trad. T. del Amo). Morata.

Godino, J. D., Font, V., y Pino-Fan, L. (2013). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En C. Dolores, M. García, J. Hernández y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 137 – 151). Ediciones D. D. S. y Universidad Autónoma de Guerrero.

Godino, J.D., y Pino-Fan, L. (2013). The Mathematical Knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 3325–3326). Antalya, Turkey: CERME.

Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas [Categories for analyzing the Knowledge of mathematics teachers]. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Gravemeijer, K., y van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. *The elementary school journal, 109*(5), 510-524.

Habermas, J. (1986). *Conocimientos e interés en ciencia y técnica como ideología*. Tecnos.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas* (1. ed). Autor.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2004). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden* (1. ed). Autor.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje* (Vol. 2). Autor.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2017). *Mallas Curriculares Grado Segundo* (1. ed.). Autor.

Popkewitz, T. (1988). *Paradigma e ideología en investigación educativa*. Editorial Mondadori.

Vaillant, D. (2018). El desarrollo profesional docente en la educación superior: temas emergentes y brechas de investigación. *Estreantes no ofício de ensinar na educação superior*, 63-78.

Vaillant, D. (2016). El fortalecimiento del desarrollo profesional docente: una mirada desde Latinoamérica. *Journal of Supranational Policies of Education*, (5).

ESTUDIO BIBLIOMÉTRICO DE LA PRODUCCIÓN CIENTÍFICA REALIZADA POR LOS ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, DE LA UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO, EN SUS ACTIVIDADES DE TITULACIÓN ENTRE 2017 Y 2021

Marco Antonio Rosales Riady

Universidad del Bío-Bío

mrosales@ubiobio.cl

La presente comunicación da cuenta de un estudio en curso, cuyo objetivo es establecer líneas de investigación en la producción científica de los estudiantes y su relación con las de sus profesores guías. La Biblioteca y la Web Institucional fueron las fuentes de información. Se analizaron 69 trabajos de investigación. Para determinar las líneas se establecieron indicadores: áreas de investigación, palabras claves, entre otros. Los trabajos de investigación se ubican principalmente en las áreas de formación: didáctica, matemática y pedagógica-profesional. Preliminarmente existe una relación parcial entre las líneas de investigación de los egresados y de las declaradas por los profesores guías.

Actividad de titulación, Egresados, Producción Científica, Bibliometría, Líneas de investigación.

INTRODUCCIÓN

La carrera de Pedagogía en Educación Matemática, anidada en la Facultad de Educación y Humanidades, en el Campus La Castilla de la Universidad del Bío-Bío en Chillán, actualmente tiene dos planes de estudios vigentes, antiguo y renovado. El plan renovado se encuentra en el segunda año de implementación, por lo que aún no se posee egresados. El plan antiguo, vigente desde 2007, ha entregado más de diez promociones a la fecha. Cada promoción de egresados ha generado diversos trabajos de investigación, en el último año de su formación, requisito académico para la obtención del Título Profesional de Profesor, y denominada, "Actividad de Titulación", con duración de dos semestres lectivos. La investigación versa sobre un tema de interés que responda a problemáticas en alguna de las áreas de la Formación de Especialidad o de Formación Pedagógica-Profesional. Tres son las modalidades de desarrollo de la investigación a las que puede optar: de Tesis, consistente en un trabajo individual; de Seminario, en el que pueden participar de dos a cinco integrantes; o Monografía, realizada de manera individual. El o los estudiantes pueden elegir el área temática y la modalidad. La Actividad de Titulación es asesorada por un profesor guía y un profesor colaborador o informante. El producto del trabajo de investigación en cualquiera de sus modalidades, al ser aprobado, es entregado bajo los protocolos establecidos para ello a la Biblioteca de la Facultad, incorporándose al Repositorio del Sistema de Bibliotecas (REPOBIB) de la Universidad. De esta manera la producción científica elaborada por los profesores en formación es publicada por la Red de Bibliotecas UBB, y se encuentra a disposición de la comunidad.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Cada año, cada promoción, genera una cantidad considerable de Actividades de Titulación, es decir, trabajos de investigación en sus tres modalidades y en sus áreas de formación (Matemática, Didáctica,

Pedagógica-Profesional), que cierran el proceso de formación docente. Pero nada se conoce sobre esta productividad científica, salvo por el o los estudiantes investigadores, el profesor guía, el profesor informante, y quizás por algunos integrantes del centro educativo dónde se realizó. No obstante, algunos de estos trabajos pueden o no estar relacionados con las líneas de investigación de los profesores asesores. Pero esto, también es desconocido por la comunidad. La Universidad promueve la incorporación de estudiantes tesistas de pregrado en proyectos que tiene el cuerpo académico, sin embrago, no todos los hacen. Por otro lado, es necesario mencionar que en los procesos de acreditación a los que se ha presentado la carrera, unas de las preguntas recurrentes es cómo se aborda la investigación. En este contexto es preciso señalar, que en la estructura organizacional de la Universidad, los académicos no se encuentran adscritos a las Escuelas, sino a los Departamentos, los cuales le prestan servicio a éstas, por lo que la investigación que se produce en la Escuela, corresponde a todas las Actividades de Titulación. A raíz de lo expuesto cabe preguntarse, ¿Cuáles son los parámetro bibliométricos de la productividad científica de los egresados de Pedagogía en Educación Matemática? ¿Cuáles son las áreas que abordan? ¿Se generan líneas de investigación? ¿Son concordantes con las líneas de investigación de los profesores guías?

OBJETIVOS GENERAL Y ESPECÍFICOS

G: Establecer líneas de investigación en la producción científica de los Egresados de Pedagogía en Educación Matemática de la Universidad del Bío-Bío y su relación con las de sus profesores guías, entre los años 2017 y 2021.

E1: Describir indicadores bibliométricos de la productividad científica de los Egresados de Pedagogía en Educación Matemática de la Universidad del Bío-Bío, entre los años 2017 y 2021.

E2: Determinar líneas de investigación a partir de la productividad científica de los Egresados de Pedagogía en Educación Matemática de la Universidad del Bío-Bío.

E3: Identificar las líneas de investigación de los profesores guías de las actividades de titulación.

E4: Analizar la correspondencia entre las líneas de investigación de los egresados y la de sus profesores guías.

DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA

La Bibliometría es una rama de la Cienciometría que permite estudiar la actividad científica. Se centra esencialmente en el cálculo y en el análisis de los valores de lo que es cuantificable en la producción y en el consumo de la información científica. (Ardanuy, 2012). Los estudios bibliométricos están incluidos en la categoría de los estudios ex post facto retrospectivo, pues ponen a prueba relaciones entre variables en una situación ya pasada; la unidades de análisis son habitualmente documentos. (Montero y León, 2002). Se caracteriza por la aplicación de la matemática y métodos estadísticos a toda fuente escrita, tales como autores, título de la publicación, tipo de documento, idioma, resumen y palabras claves o descriptores. (Solano et al., 2009). El análisis de las variables bibliométricas es descriptivo.

La fuente principal de información del trabajo de los egresados la proveyó el Repositorio del Sistema de Bibliotecas (REPOBIB), quien entregó una base de datos en Excel con los siguientes datos

bibliográficos: número de pedido, nombre del autor (primer), título del trabajo de investigación, nombre de la editorial, año de publicación, número de ejemplares disponibles y biblioteca en que se encuentra. La base de datos constó de 69 trabajos de investigación, recopilados en el quinquenio 2017-2021. Posteriormente se construyó una nueva base de datos, en la que se incorporaron nuevas variables como número de autores, lo que permitió clasificar según la modalidad: tesis, seminario o monografía. A partir de palabras claves, se estableció el área en el cual se desarrolló el trabajo de investigación: área matemática, área didáctica, área pedagógica-profesional. También, se agregó el profesor guía y el departamento del cual dependen, de modo que se pueda hacer el análisis de correspondencia de líneas de investigación. Para completar el análisis, se elaboró una segunda base de datos con los profesores guías y sus líneas de investigación declaradas en las respectivas páginas web de los departamentos a los cuales pertenecen.

ALGUNOS RESULTADOS

Producción Temporal: Los 69 trabajos de investigación se distribuyen de la siguiente manera en la Tabla 1. Información recogida de la base de datos entregada por Biblioteca.

Tabla 1.

Producción Temporal.

Año de Publicación	Número de publicaciones
2017	14
2018	9
2019	14
2020	16
2021	16
Total	69

Modalidad de Trabajo: El recuento de la modalidad de trabajo por año de publicación está dada en la Tabla 2. Información obtenida del sistema de búsqueda de la web (REPOBIB) de la Biblioteca.

Tabla 2.

Modalidad de trabajo por año de publicación.

Modalidad de	**Año de Publicación**					
Trabajo	2017	2018	2019	2020	2021	Total
Tesis	2	3	6	3	6	20
Seminario	11	3	5	8	9	36
Monografía	1	3	3	5	1	13
Total	14	9	14	16	16	69

Área de Formación: Corresponde al área dónde se realiza el trabajo de investigación y está dada por la Tabla 4. Información obtenida de la lectura de los títulos y resumen de los trabajos de investigación, como en el siguiente ejemplo, Tabla 3.

Tabla 3.

Ejemplo de título del Trabajo de Investigación y área de formación dónde se realiza.

Nombre Actividad de Titulación (trabajo de investigación)	**Área de Formación**
Competencias de los estudiantes en la Transición del Liceo a la Universidad en la Resolución de Problemas de Funciones	Didáctica
El Modelo Matemático SIR para la Epidemiología	Matemática
Influencia de la autoestima en el rendimiento académico de estudiantes de cuarto medio en el Liceo Arturo Prat Chacón de Ninhue	Pedagógica-Profesional

Tabla 4.

Área de formación dónde se desarrolla el trabajo de investigación.

Área de	**Año de Publicación**					
Formación	2017	2018	2019	2020	2021	Total
Matemática	6	3	6	7	4	26
Didáctica	7	6	3	6	8	30
Pedagógica-Profesional	1	0	5	3	4	13
Total	14	9	14	16	16	69

Profesores Guías: En la Tabla 5 se muestra la unidad de análisis de los profesores guías, el departamento al cual están adscritos, el área de formación en el que se desempañan en la carrera., y el número de trabajos de investigación que han dirigidos.

Tabla 5.

Profesores guía, departamento académico, área de desempeño y número de trabajo dirigido.

Profesor Guía	**N° de**	**Área de**	**Profesor Guía**	**N° de**	**Área de**
Ciencias Básicas	Trabajos guiados	Desempeño	Ciencias de La Educación	Trabajos guiados	Desempeño
PC-01	3	Matemática	PE-01	1	Pedagógica-Profesional
PC-02	1	Matemática	PE-02	1	Pedagógica-Profesional
PC-03	10	Matemática	PE-03	3	Pedagógica-Profesional
PC-04	6	Matemática	PE-04	4	Didáctica
PC-05	1	Matemática	PE-05	5	Pedagógica-Profesional
PC-06	1	Matemática	PE-06	3	Pedagógica-Profesional
PC-07	1	Matemática	PE-07	2	Pedagógica-Profesional
PC-08	6	Matemática	PE-08	5	Didáctica
Total	29		PE-09	6	Didáctica
			PE-10	3	Didáctica

	PE-11	7	Didáctica
	Total	40	

Palabras claves: Con el objeto de establecer las líneas de investigación a la que tributan los trabajos de investigación de los egresados se construyó una tabla que recogía las palabras claves, cómo en el ejemplo de la Tabla: 6

Tabla 6.

Palabras claves de los trabajos de investigación de los egresados.

Nombre Actividad de Titulación (trabajo de investigación)	**Palabras Claves**
Logaritmos Discretos y Criptosistema de ElGamal	Algoritmo de ElGamal, Cambio de clave de Diffie-Hellman, Criptografía.
Evaluación de las habilidades del pensamiento crítico y de sus componentes metacognitivos y motivacionales en estudiantes de pedagogía de la Universidad del Bío-Bío	Pensamiento crítico, metacognición, motivación.
Propuesta de apoyo con actividades lectivas en la asignatura de matemática a estudiantes diagnosticados con NEE del primer y segundo nivel de educación de jóvenes y adultos del Liceo Polivalente Pueblo Seco	Actividades lectivas, necesidades educativas especiales, Educación de Jóvenes y Adultos.

Líneas de investigación del profesor guía: Las líneas de investigación de los profesores guías se obtuvieron de la Web Institucional, en la página del Departamento académico, donde están adscritos. La Tabla 7 muestra como ejemplo. Ella está en relación a los profesores guías de los trabajos de investigación indicados en la Tabla 6.

Tabla 7.

Líneas de investigación del profesor guía.

Profesor guía	**Grado Académico**	**Línea de Investigación declarada**
PC01	Magíster en Matemática	Álgebra Lineal, Criptografía,
PE07	Doctor en Psicología	Factores cognitivos y emocionales en el aprendizaje y la Calidad de vida laboral en educación.
PE11	Doctor en Educación Matemática	Didáctica de las Matemáticas, Formación Docente, Integración Curricular, y Uso de las TICs en la Educación.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Los resultados preliminares indican que: a) en el área de las didácticas, prevalecen en álgebra, geometría, estadística y probabilidad, y no así la didáctica del cálculo; b) en el área matemática, las líneas que se evidencian están relacionadas con la teoría de números, criptografía, cálculo diferencial

e integral, análisis matemático, álgebra abstracta y biomatemática; c) en el área pedagógica-profesional, las líneas corresponden a identidad profesional, etnomatemática, estudios socioculturales, habilidades y competencias, creencias, autoestima y socio-emocionalidad. En cuanto a la relación con las líneas de investigación de los profesores guías, ésta es parcial. Existen profesores que han dirigido actividades de titulación que no se condicen con lo declarado por ellos.

REFERENCIAS

Andanuy, J. (2012). *Breve introducción a la Bibliometría. Biblioteca Virtual FAHUSAC*. Consulta 14 de junio de 2022. Disponible en https://bvhumanidades.usac.edu.gt/items/show/764.

Montero, I, y León, O. (2002). Clasificación y descripción de las metodologías de investigación en Psicología. *International Journal of Clinical and Health Psychology*, 2(3), 503-508.

Solano López, E., Castellanos Quintero, S., López Rodríguez del Rey, M., y Hernández Fernández, J. (2009). La bibliometría: una herramienta eficaz para evaluar la actividad científica postgraduada. *MediSur*, *7*(4), 59-62.

Experiencias de Aula

ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN CONTEXTOS REALES: TABLAS DE FRECUENCIAS Y GRÁFICOS DESDE LA EXPERIENCIA EN EL OBSERVATORIO VULCANOLÓGICO DE LOS ANDES DEL SUR DE NIÑOS Y NIÑAS DE TERCER AÑO DE PRIMARIA

Reina San Martín Aedo, Catalina Muñoz Ramírez

Universidad Católica de Temuco

reina.sanmartin@uct.cl, catalina.munozramirez2018@alu.uct.cl

El aprendizaje matemático tiene vínculos con el mundo circundante. Para que este tenga sentido, y profundice su comprensión, la Educación Matemática Realista propone diseños de aprendizaje basados en contextos reales, trabajo colaborativo e interrelación de saberes. Se propone un diseño de aprendizaje de tablas de frecuencias y gráficos desde este enfoque. Se diseña una experiencia que vincula contenidos con el trabajo del Observatorio Vulcanológico de los Andes del Sur (OVDAS), con estudiantes de tercer año de enseñanza básica, de una escuela pública en Temuco, región de La Araucanía. El diseño se implementa en modalidad presencial y virtual.

Educación matemática realista, Enseñanza de las matemáticas, Educación primaria.

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones en Educación Matemática dan cuenta que el aprendizaje de niños y niñas se debe situar desde una perspectiva práctica, basado en situaciones de la vida cotidiana que les permitan reconocer su utilidad real. Se requiere que los estudiantes desarrollen situaciones de aprendizaje con diversidad de enfoques, técnicas, contextos y modelos, para experimentar la aplicación de algoritmos, métodos de aproximación, modelación, estrategias heurísticas que desarrollen el pensamiento matemático. Desde esta perspectiva, se desarrollan habilidades como analizar, comprender, relacionar y razonar, a través de situaciones orales y escritas, que permitan a los estudiantes comunicarse utilizando el lenguaje matemático. Es importante que estas situaciones consideren el nivel del sistema educativo en el que se encuentren niños y niñas, para la construcción del pensamiento matemático (Shoenfeld, 2016).

En Chile, los textos escolares no fomentan la contextualización ni la vinculación de las matemáticas con la vida real, pues presentan situaciones problemáticas que se adaptan artificialmente a una cotidianidad que no se relaciona con la vida circundante. Al mismo tiempo, los contenidos matemáticos son adaptados para que puedan relacionarse con las situaciones problema. Este fenómeno tensiona la relación vida real-aprendizaje matemático, pues muestra el contenido escolar descontextualizado a la cotidianidad de niños y niñas en edad escolar (Pino y Blanco, 2008).

La enseñanza de las matemáticas es parte importante del curriculum escolar chileno. De acuerdo con las horas asignadas en el plan de estudio en educación primaria, el 19% de la carga horaria disponible para el trabajo lectivo corresponde a la asignatura de matemáticas. Esto quiere decir que, en una jornada de 32 horas semanales, 6 están destinadas como mínimo a la clase de matemáticas (MINEDUC, 2018).

Chile, en la prueba Pisa aplicada el 2018 obtiene 417 puntos en la competencia matemática. En tanto, el promedio de los países latinoamericanos es de 387 puntos y el de los países de la OCDE es de 489 puntos. Por lo tanto, Chile se encuentra sobre la media de los países latinoamericanos por 30 puntos, y bajo los países de la OCDE en 72 puntos. Esta evaluación también muestra que el 51,9% de los estudiantes no han desarrollado competencias matemáticas mínimas (Agencia de Calidad, 2019). Los resultados de los estudiantes en el Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE) en matemáticas en cuarto básico, no han demostrado variaciones significativas desde el 2012, con un promedio de 260 puntos. Respecto a la distribución de los estudiantes por niveles de logro, el 37% ha logrado aprendizajes insuficientes, el 38,5% elementales y el 24,6% posee aprendizajes adecuados en matemáticas, lo que se mantiene estable desde el año 2014 (Agencia de Calidad, 2018). Frente a esta situación, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo diseñar clases de matemática desde contextos reales para el aprendizaje de tablas de frecuencias y gráficos en niños y niñas de educación primaria?

Para responder a esta pregunta, se construye un diseño de aprendizaje basado en los principios de la matemática realista (Freudenthal, 1983). En este contexto, se visita el Observatorio Vulcanológico de los Andes del Sur (OVDAS), entidad gubernamental chilena que monitorea los volcanes activos de Chile, desde la ciudad de Temuco, en la región de La Araucanía.

MARCO TEÓRICO

La Educación Matemática Realista surge en los años sesenta en Holanda. Sus postulados señalan que la matemática no debe enseñarse como un conjunto de elementos o contenidos aislados entre sí, pues las ideas matemáticas se interrelacionan y se vinculan con situaciones de la vida real, por lo que es fundamental diseñar clases de matemática que den cuenta de estas relaciones (Van Den, 2019; Giménez et al., 2004; Freudenthal, 1983). Por lo tanto, la matemática se considera como parte de la actividad humana y de su entorno, lo que le otorga valor educativo en sí misma (Freudenthal, 1983). Para esto es fundamental que niños y niñas comprendan, participen, critiquen su entorno natural y social dando cuenta de las matemáticas en estos espacios (Zolkower et al., 2006).

Desde esta perspectiva, una clase de matemáticas debe considerar situaciones problemáticas en contextos reales que permitan desarrollar la actividad matematizadora de los estudiantes, es decir, el énfasis está en los procesos de aprendizaje progresivo matemático (Freudenthal, 1991). Desde esta perspectiva se reconoce que una situación es significativa cuando puede ser imaginada, pues imaginamos lo que hemos observado y conocido, para dar cuenta de las matemáticas presentes en el mundo circundante. Por ejemplo, frente a situaciones problemáticas de estas características, niños y niñas pueden expresar sus ideas a través de modelos y esquemas. Para el desarrollo del aprendizaje matemático, se promueve el trabajo en grupos, desde este sentido el docente es un guía que orienta el proceso de construcción de conocimientos (Zolkower et al., 2006; Freudenthal, 1983; Alsina, 2009). Es fundamental que los estudiantes desarrollen habilidades matemáticas que aumenten su nivel de dificultad a través del tiempo. Se considera primordial comenzar este proceso desde la educación infantil, y que la complejidad de las temáticas tratadas aumente considerando características cognitivas y etarias, para el desarrollo de la matematización progresiva (Treffers,1987).

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

Para responder a la problemática propuesta se plantea a estudiantes de la carrera de Pedagogía Básica, con Mención en Matemáticas de la Universidad Católica de Temuco, el desafío de construir un diseño de aprendizaje que considere los principios del enfoque de la Educación Matemática Realista, para niños y niñas de una escuela pública de educación básica en la ciudad de Temuco, región de La Araucanía, Chile. Este diseño se construye durante los meses de junio-julio de 2022, y se implementa en el mes de septiembre del mismo año. La temática del mundo circundante escogida fue: conocimiento de volcanes, riesgos asociados y protección de las personas frente a alertas volcánicas. Se selecciona esta temática pues, en la región se encuentra uno de los volcanes más activos del país, el Villarrica. Además, en la ciudad de Temuco opera el Observatorio de los Andes del Sur (OVDAS) que es una institución gubernamental que se encarga de monitorear la actividad de volcanes a lo largo del país, para proteger la vida de las personas frente a posibles erupciones volcánicas. El contenido matemático asociado es: construcción e interpretación de tablas de frecuencias y gráficos de barras, que se vinculan con el eje de Datos y Probabilidad propuesto por el currículum chileno para tercer año de educación básica.

Participantes

En esta experiencia participaron 35 estudiantes de tercer año básico, 10 niños y 24 niñas de una escuela pública de la ciudad de Temuco, Chile. La encargada de implementar el diseño fue una estudiante de quinto año de Pedagogía Básica con Mención en Matemáticas de la Universidad Católica de Temuco, quien realiza su práctica profesional. Las clases se desarrollan en modalidad presencial y online, pues el establecimiento se encuentra con clases virtuales.

IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA

Este diseño de aprendizaje inicia con la visita al OVDAS. En sesiones posteriores se desarrolla trabajo grupal a través de la plataforma Meet. Todas las actividades propuestas se relacionan con la temática conocimiento de volcanes, riesgos asociados y protección de las personas frente a alertas volcánicas en conjunto con el análisis y construcción de tablas de frecuencias y gráficos. El diseño considera 12 horas pedagógicas. La propuesta se inicia con la visita presencial al Observatorio Volcanológico de los Andes del Sur (OVDAS). Esta visita fue guiada por vulcanólogos expertos de la institución, quienes prepararon una charla considerando la edad de los participantes. Durante todo el proyecto, niños y niñas asumen el papel de “vulcanólogos”, para vincularlos con la temática realista aprendida.

Durante las sesiones virtuales, los estudiantes, en grupos de trabajo, analizan datos históricos sobre erupciones de un volcán chileno que varía de acuerdo a la sesión y determinan si es seguro para visitar según a los datos presentados. Durante el proceso construyen una bitácora física para la recolección y registro de datos.

Para dar cuenta de los peligros de un volcán, los niños analizan alertas volcánicas según la simbología utilizada por el Servicio Nacional de Minería y Geografía de Chile, elementos predictores de actividad volcánica categorizadas por color (alerta verde, alerta amarilla, alerta naranja y alerta roja), para posteriormente organizarlos a través de gráficos de barra.

Los estudiantes oralmente presentan los instrumentos que han construido (tablas y gráficos) dando cuenta de la interpretación y análisis desarrollado en sus equipos. De esta manera, vinculan los conocimientos matemáticos con la labor de los vulcanólogos/as en el monitoreo de volcanes.

Finalmente, se aplica una encuesta de valoración a los estudiantes, para que reflexionen sobre el proceso desarrollado en la unidad, aprendizajes y percepciones respecto de la experiencia.

RESULTADOS PRELIMINARES

La visita al OVDAS es ampliamente valorada por niños y niñas, pues en actividades orales manifiestan su curiosidad y aprecio de lo aprendido en esa instancia. Esta situación fortalece su compromiso con el desarrollo de las actividades propuestas en la unidad.

Durante la implementación del proyecto, se observa que el trabajo en equipo de niños y niñas fortalece el diálogo y profundiza la comprensión de los contenidos. Las discusiones generadas en los grupos de trabajo ayudan a construir aprendizajes colectivos, corregir errores y fortalecer sus conclusiones.

En las actividades de construcción de tablas de frecuencia desde el análisis de alertas volcánicas, se observa que niños y niñas comprenden las relaciones de los datos presentados y son capaces de organizarlas adecuadamente, con criterios claros y consensuados. Son capaces de reflexionar respecto a los cuidados necesarios cuando se visita una zona volcánica.

Los gráficos construidos por niños y niñas, les permite profundizar respecto a los análisis desarrollados en sesiones anteriores, dando cuenta del trabajo de elementos espaciales, distribución de frecuencias en intervalos claros, organización de variables y datos, vinculándolos con sus aprendizajes respecto a las alertas volcánicas.

Durante la implementación del diseño, niños y niñas vinculan los contenidos matemáticos trabajados y el contexto real (volcanes). Esto fortalece la comprensión de los contenidos del currículum trabajados, la vinculación con la realidad y profundiza las interrelaciones existentes.

La encuesta de autoevaluación muestra alta percepción respecto a la comprensión de los contenidos trabajados (91%), necesidad de fortalecer el respeto a la opinión de los otros en el trabajo grupal (65%). Las opiniones expresadas en una pregunta abierta dan cuenta de una alta valoración respecto a la vinculación volcanes - matemáticas propuesta en la unidad.

CONCLUSIONES PRELIMINARES

El desarrollo de diseños de enseñanza desde la Educación Matemática Realista mejora los aprendizajes de niños y niñas. Además, les permite dar cuenta de la presencia de las matemáticas en el mundo circundante, lo que otorga sentido a sus aprendizajes.

El trabajo grupal es una necesidad en la clase de matemáticas, pues fortalece la discusión, análisis y construcción de conocimiento colectivo. Se considera importante potenciar el desarrollo de actividades grupales, para fortalecer en niños y niñas el respeto a la opinión del otro.

Es necesario diseñar más experiencias de este tipo con niños y niñas del sistema escolar, desde otras situaciones del mundo circundante. Es un desafío para las y los docentes, pues se requiere de apoyo institucional y recursos que no siempre los docentes tienen acceso.

REFERENCIAS

Agencia de Calidad de la Educación (2018). *Resultados educativos 2018*. Autor. http://archivos.agenciaeducacion.cl/Conferencia_EERR_2018.pdf

Agencia de Calidad de la Educación (2019). *PISA 2018. Entrega de Resultados. Competencia Lectora, Matemática y Científica en estudiantes de 15 años en Chile*. Autor. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/9286/PISA2018-Resultados.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 119- 127). SEIEM.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47235-X

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.

Giménez, J., Santos, L., y da Ponte, J. (2004). *La actividad matemática en el aula*. Graó.

Van Den, M. (2019). El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: Ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje, *Certidumbre e incertidumbre*, *160*, 36-64.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2018). *Plan de estudios 2018*. Autor. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/14414/Plan%20Estudio%202018.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Pino, J., y Blanco, L. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad, *Publicaciones, 38*, 63-88.

Shoenfeld, A. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics, *Journal of Education, 196*(2), 1–38. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in Mathematics Education: The Wiskobas Project*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-3707-9

Zolkower, B., Bressan, A., y Gallego, F. (2006) La Corriente Realista de Didáctica de la Matemática. Experiencias de un Grupo de Docentes y Capacitadores, *Yupana, 1*(3), 11-33. https://doi.org/10.14409/yu.v1i3.247

ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD CON FOCO EN SOSTENIBILIDAD: ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA EN EL AULA DE EDUCACIÓN BÁSICA

Jessica Sánchez, Fresia Núñez, Juan Carlos Estay

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

jdsanche@uc.cl, fresia.liliana@gmail.com, juancarlosestay14@gmail.com

La siguiente experiencia de aula tiene como objetivo introducir lenguaje probabilístico en estudiantes de educación básica. Se planificaron e implementaron tres sesiones que consideraron como eje articulador el Objetivo de Desarrollo Sostenible (ODS) N°6 "Garantizar la disponibilidad de agua y su gestión sostenible y el saneamiento para todos", teniendo el juego y el trabajo en equipo como elementos didácticos centrales. Los resultados evidencian que los estudiantes pudieron distinguir un evento aleatorio de uno determinista, evaluar la posibilidad de ocurrencia de un evento, establecer escala subjetiva de posibilidades y reflexionar acerca del cuidado del recurso hídrico con el fin de generar una campaña de concientización.

Experiencia de clases, Juego, Lenguaje probabilístico, Sostenibilidad, Probabilidad.

INTRODUCCIÓN

La presente experiencia de aula se centra en la enseñanza de los elementos iniciales de la probabilidad que se materializan en el contexto de un Estudio de Clases, que responde al Objetivo de Aprendizaje 24 "Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento en base a un experimento aleatorio, empleando los términos "*seguro-posible-poco posible-imposible",* de quinto básico (MINEDUC, 2012, p. 43), la que se concreta en tres sesiones de clases, que además usa como eje articulador el ODS N°6: "*Garantizar la disponibilidad de agua y su gestión sostenible y el saneamiento para todos".*

Este trabajo surge de la inquietud por diseñar e implementar una experiencia que sea innovadora y que busque plasmar situaciones de aula exitosas y cercanas a la vida cotidiana de los estudiantes donde, a través de problemas matemáticos que son resueltos por medio de experiencias que involucran al juego como recurso, les permita desarrollar las habilidades de argumentar y comunicar sus hallazgos. A su vez, el plan de clases fue analizado a la luz de tres marcos teóricos: La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y la Teoría de Situaciones Didácticas.

MARCO TEÓRICO

Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME)

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa plantea que para estudiar fenómenos didácticos relacionados con las matemáticas escolares se hace necesario realizar un análisis detallado del saber, denominado problematización. Éste se lleva a cabo desde una perspectiva múltiple, reconociendo la construcción social del conocimiento matemático considerando los escenarios históricos, culturales e institucionales de la actividad humana, generando una "descentración del

objeto" (Cantoral et al., 2014). Para ello relaciona las dimensiones planteadas por Cantoral y Farfán (2008): Epistemológica, Didáctica, Cognitiva y Social.

Estas dimensiones se pueden evidenciar en el plan de clases propuesto, a través del estudio y análisis del objeto matemático, donde se reconoce que el conocimiento probabilístico se desarrolló a partir de los juegos de azar, elemento considerado en el plan de clases; una revisión a los textos escolares que evidencian la visión tradicional de la enseñanza centrada en el objeto matemático (DMe); la revisión de investigaciones relacionadas a la adquisición del lenguaje probabilístico y de otros elementos que favorecen el aprendizaje como el juego, permitiendo que, desde los estudiantes, emergiera la escala subjetiva de probabilidades y que comprendieran que algunos números tenían mayor posibilidad de ocurrencia que otros; y la dimensión que concibe que los conocimientos son dotados de significado a través de su uso y su funcionalidad, está presente en la propuesta por dos razones: por un lado, al considerar que el objeto matemático y su significado se pensó y materializó de manera colectiva, donde todos los estudiantes podían dar su opinión para lograr llegar a la escala subjetiva de probabilidades.

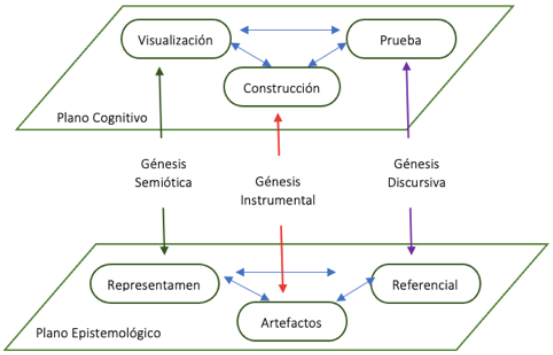
Por otro lado, el contexto macro del uso del agua permite hacer uso de la escala asociada, clasificando situaciones contextualizadas y reales relacionadas con el recurso hídrico y su cuidado, dando espacio para la reflexión y la acción. Dicho contexto responde al Objetivo de Desarrollo Sostenible N°6 propuesto por la Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación (FAO). Además, es posible considerar el plan de clases propuesto como un rediseño del Dme, ya que permite que los conocimientos matemáticos relacionados con la adquisición del lenguaje probabilístico, y la posibilidad de ocurrencia de un evento, surjan a partir de la práctica comunitaria mediante el juego. Esto permite percibir distintos resultados y compararlos, además de dar argumentos que pueden ser articulados para construir la escala subjetiva de posibilidades, lo que se enmarca, además, en un contexto (el agua) desarrollando el carácter funcional del saber (Noesis).

Teoría del Espacio de Trabajo Matemático ETM_P

Este marco entrega herramientas analíticas desde una dimensión semiótica, discursiva e instrumental para el estudio específico del trabajo matemático con estudiantes, al enfrentarse a tareas en un dominio específico de la matemática en su entorno educativo (Kuzniak et al., 2016).

Figura 1.

Diagrama ETM planos epistemológicos y cognitivos, articulación a través de las génesis.



Fuente: Tomado de Kuzniak y Richard (2014).

La articulación entre estos dos planos se lleva a cabo, a través de las génesis *semiótica*, *instrumental* y *discursiva*, y son fundamentales para codificar signos como para comprender validaciones y razonamientos, la selección de artefactos y sus usos, que para el caso particular de este trabajo se centra en el dominio de la probabilidad.

En cuanto a los planos verticales, estos se configuran cuando se articulan dos de las génesis, denominados semiótico-instrumental ([Sem-Ins]), semiótico–discursivo ([Sem-Dis]) e instrumental–discursivo ([Ins-Dis]. El desarrollo y evolución del trabajo matemático se puede ver reflejado mediante la circulación entre estos diferentes planos.

Para esta propuesta de aula, el enfoque se centra en el ETM personal de los estudiantes de quinto básico, en el dominio de la probabilidad. Puesto que se relaciona con la forma en como los estudiantes resuelven una tarea matemática con sus propios conocimientos, capacidades cognitivas, también con la construcción y evolución de su ETM personal en un ambiente organizado. Del mismo modo se basa en el planteamiento de Parzysz (2014) y en el Paradigma 1 (P1): que se caracteriza porque existe una modelización inicial de la realidad. Se habla de un experimento aleatorio concreto y de hipótesis que originan un experimento pseudo-concreto.

Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)

La teoría de las situaciones didáctica, propuesta por Brousseau (2007), toma por objeto el estudio del sistema didáctico (sistema de enseñanza) que, se sustenta en el triángulo epistemológico que contempla al docente – saber matemático – estudiante y sus relaciones. Según Brousseau, el termino situación corresponde a una serie de eventos en las cuales convergen el sujeto y las relaciones que lo unen con el medio didáctico; introduciendo desde este punto la noción de situación adidáctica donde será el estudiante el que se apropie de la situación planteada por el docente, esta "adidacticidad" es la que permitirá al estudiante acceder al saber matemático.

Las fases de una SD son:

- **Acción:** donde el sujeto se enfrenta a un medio que interactúa con él, donde el estudiante escoge sus herramientas tomadas del medio en relación con sus propios intereses y motivaciones.
- **Formulación:** los estudiantes comienzan a desarrollar situaciones de comunicación (explicita) de sus conocimientos a otro compañero de grupo.
- **Validación o de Prueba:** los estudiantes comienzan a emitir aseveraciones y conclusiones, de tal forma de lograr unificar ideas de acuerdo con la verdad o falsedad de estas ideas.
- **Institucionalización**. Corresponderá al momento en que el docente debe darle vida al conocimiento es decir personalizar y contextualizar el saber.

METODOLOGÍA

La experiencia de aula que aquí se reporta es parte de un trabajo que llevamos realizando durante el presente año, y que tiene el propósito de diseñar e implementar un plan de clases que se enmarca en el OA priorizado Nº 24 "describir la posibilidad de ocurrencia de un evento de acuerdo a un

experimento aleatorio, empleando los términos seguro-posible-poco posible-imposible" (MINEDUC, 2012). Del mismo modo, esta propuesta vincula el Objetivo de Desarrollo Sostenible N.º 6 planteado por La Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación (FAO) "Garantizar la disponibilidad de agua y su gestión sostenible y el saneamiento para todos".

Se llevaron a cabo implementaciones sucesivas en colegios municipales, tanto de la región Metropolitana (comunas de Independencia y Las Condes) como en la región de Los Lagos. Se trabajó bajo la metodología de Estudio de Clases, donde se analizó cada una de las implementaciones con el fin de incorporar mejoras al Plan de Clases original. Los docentes responsables de las implementaciones son parte del equipo de trabajo de la propuesta de aula.

Las clases fueron grabadas en video, se utilizó la observación participante y se recogieron producciones de los estudiantes desde la segunda implementación en adelante.

Con los resultados de las grabaciones y material recopilado se analizó la propuesta bajo los tres marcos teóricos señalados anteriormente, producto de este análisis se pudo evidenciar cómo fueron emergiendo los conceptos probabilísticos por parte de los estudiantes cuando se enfrentan a un problema que involucra el juego como recurso de aprendizaje.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

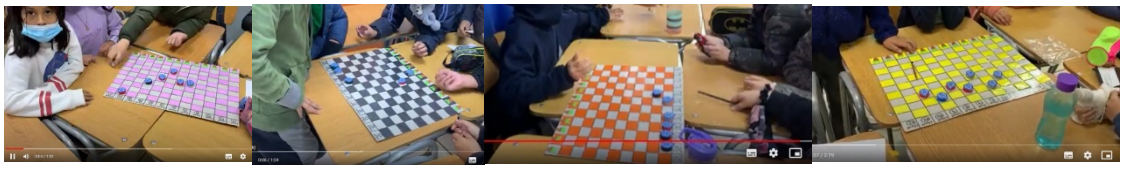
Tras analizar las videograbaciones, los diálogos, las producciones de los estudiantes y la información de los observadores participantes, se pudieron establecer los siguientes resultados:

Los elementos basales de la TSD son:

- Los estudiantes son capaces de identificar hechos aleatorios y deterministas, ya sea dando ejemplos de su cotidianeidad como clasificando hechos relacionados con el agua, argumentando su decisión.
- Los estudiantes realizan conjeturas, desde sus creencias, sobre el problema planteado en la sesión 2, el que es modelado a través del juego de tablero.
- Los estudiantes comparan los resultados de la primera tanda de juego mediante los registros gráficos y, reconocen que no todos los números tienen la misma posibilidad de ocurrencia.
- Al realizar la segunda tanda de juego, los estudiantes, de manera implícita, reconocen que los números del centro tienen más posibilidades de ganar, lo que se evidencia en la Figura 2.

Figura 2.

Imágenes de los tableros de juego.



- Los estudiantes reconocen que la posibilidad de ocurrencia de un número dentro del juego depende de las combinaciones que se dan con los dos dados.

- Los estudiantes, en conjunto, establecen la Escala Subjetiva de Posibilidades y evalúan los números del juego, estableciendo hechos que nunca ocurren, que tienen pocas posibilidades, que tienen muchas posibilidades y hechos que ocurren siempre.
- Los estudiantes reconocen que, al cambiar las condiciones del juego, las posibilidades de ocurrencia de un número cambian.
- En la sesión 3, los estudiantes clasifican hechos relacionados con el agua utilizando la escala subjetiva de posibilidades, dando argumentos de su elección y generando discusión cuando no había acuerdo.
- Los estudiantes reflexionan acerca de la importancia del cuidado del agua y dan ideas para generar una campaña de cuidado del recurso hídrico dentro de su comunidad.

CONCLUSIONES

La propuesta de aula presentada se desarrolló con base en un juego que se compone de un tablero, fichas, dos dados y una tabla de registros, donde se busca que los estudiantes sean capaces de describir eventos de posibles resultados en juegos de azar, que tengan la suficiencia de referirse a la posibilidad de ocurrencia de un evento y, que puedan dar ejemplos de dichos eventos descritos y su posibilidad de ocurrencia. Dicha idea la asociamos al concepto de "esperanza matemática" acuñado por Christian Huygens (1629 -1695) citado en Mora (1989), lo que nos muestra que los estudiantes mediante esta "esperanza" son capaces de tomar decisiones a la hora de escoger una determinada casilla decidiendo cuál número podría salir por ende con qué número podrían "ganar el juego".

Desde la perspectiva del desempeño de los estudiantes se concluye que, a través de la puesta en práctica de una propuesta innovadora e interdisciplinaria, se pudo evidenciar el interés y la motivación de los estudiantes por participar de cada una de las actividades propuestas. Del mismo modo, la experiencia de enfrentarse a una tarea cuya demanda fue interactuar con juegos que cautivaran su atención, les permitió ir descubriendo, formulando conjeturas e ir argumentando sobre las ideas probabilísticas.

Mediante esta actividad pudimos observar que los estudiantes comienzan a anticipar internamente todas las posibles combinaciones en la obtención de cada número al lanzar dos dados, por ende, su razonamiento los lleva a concluir sobre qué número tiene más o menos posibilidades de salir según la cantidad de casos favorables. No obstante, son conscientes que se trata de un juego en el cual está involucrado el azar y por tanto no existe la certeza absoluta. Finalmente, nuestra innovadora propuesta relacionada con los objetivos de Desarrollo Sostenible ofrece un contexto real, pertinente y con sentido social para el trabajo con experimentos aleatorios a los estudiantes quienes mediante la investigación y la reflexión dieron posibles soluciones a los problemas planteados, fortaleciendo los conocimientos y habilidades en el aprendizaje de la probabilidad.

REFERENCIAS

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2008). Socioepistemología y matemáticas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21* (pp. 740-753). CLAME.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática*, *7*(3), 91-116.

Huygens, C. (1656-1657). *De Ratiociniis in Ludo Aleae*. Ex officinia J. Elsevirii.

Mora, C. (1989). Los inicios de la Teoría de la Probabilidad. Siglos XVI y XVII. Servicio Editorial Universidad del País Vasco.

Kuzniak, A. Montoya, E., y Vivier, L. (2016). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*(15), 237-251.

Kuzniak, A., y Richard, P. R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *17*(4-1), 5-39. https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2012*). Matemática. Programa de estudio. Quinto año básico.* Autor.

Parzysz, B. (2014). Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : une étude de cas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *17*(4-1), 65-77. https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1743

TANGRAM: UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA ESTUDIANTES CON TDA/H EN EL ÁREA DE GEOMETRÍA

Karla Hernández, Paulina Luna, Daniela Mayorga, Anahí Huencho

Universidad Católica de Temuco

karla.hernandez2019@alu.uct.cl, pluna2019@alu.uct.cl, dmayorga2019@alu.uct.cl, ahuencho@uct.cl

Esta propuesta de aula presenta los resultados de implementar un proceso de enseñanza aprendizaje con material tangible tangram en geometría contenido de semejanza, para estudiantes de primer año medio, con foco en los efectos para los estudiantes con TDA/H, debido a que el uso de material tangible influye en su aprendizaje. Así, se puede observar que el tangram permite a los estudiantes con TDA/H mantener la atención por periodos más prolongados de tiempo, posibilitando caracterizar el concepto de semejanza, pero requiriendo de una ruta de trabajo que permita al estudiante volver a focalizarse cuando pierde la atención.

Material tangible, Tangram, Geometría, TDA/H.

INTRODUCCIÓN

Una de las problemáticas presentes en las aulas hoy en día es la escasez del uso del material tangible en la asignatura de matemática, lo que afecta a todos los estudiantes, pero en especial a aquellos que tienen un trastorno de déficit atencional y trastorno de déficit atencional e hiperactividad (TDA/H) (Estévez y Guerrero, 2015).

En los establecimientos escolares existe una educación de la geometría que está centrada principalmente en un aprendizaje memorístico, lo cual complica su enseñanza, debido al nivel de abstracción visual, mental y espacial que exige en los estudiantes de educación secundaria, por lo que les es difícil principalmente a los estudiantes con TDA/H (Briceño y Alamillo, 2017). Para favorecer el aprendizaje de los alumnos que presentan este trastorno se debe tener un entorno distendido que les posibilite experimentar individualmente y que sea entretenido, permitiéndoles mantener la concentración por periodos prolongados de tiempo (Yanes y Marrero, 2018).

Por lo anterior, se decide apoyar el aprendizaje con un Tangram, que es un material tangible el cual estimula aprendizajes como la semejanza de triángulos, permitiendo a los alumnos con TDA/H acompañar el concepto con estímulos visuales y generar aprendizajes a través de una estrategia kinestésica (Estévez y Guerrero, 2015; Yanes y Marrero, 2018).

Debido a lo anterior, el objetivo de esta investigación consiste en evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje del material tangible Tangram en el eje de geometría para estudiantes TDA/H de secundaria.

MARCO DE ANTECEDENTES

El eje de geometría es aquella división de la matemática, en donde sólo se abordan conocimientos geométricos (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2015). En la actualidad la geometría se está enseñando a través de la reproducción y la enseñanza memorística (Briceño y Alamillo, 2017).

Una estrategia distinta a la que se utiliza actualmente para enseñar los contenidos presentes en este eje es a través del uso del material tangible, que es un objeto manipulable que le permite al estudiante modificar sus esquemas cognitivos para así poder crear un aprendizaje que estimulan los sentidos y ejercitar el conocimiento (Manrique y Gallego, 2013).

Un material tangible que se puede utilizar para enseñar geometría es el tangram, este permite que los estudiantes desarrollen las habilidades de dibujo, comunicación, razonamiento y aplicación en geometría (Briceño y Alamillo, 2017; Villarroel y Sgreccia, 2011). Este recurso se encuentra compuesto por siete piezas, cinco triángulos, un cuadrado y un paralelogramo, con este se pueden crear diversas representaciones y se puede utilizar en el aula para la enseñanza de la semejanza de figuras geométricas, porque gracias a él se pueden crear diversas formas de distintos tamaños y que resultan ser semejantes entre sí (Briceño y Alamillo, 2017).

En las aulas de clases hay estudiantes que tiene trastorno de déficit atencional e hiperactividad TDA/H, el que se encuentra caracterizado por alterar las áreas del cerebro encargadas de controlar emociones, focalizar la atención, regular y mantener actividades y orientar conductas (Yanes y Marrero, 2018). Con conductas de inatención, es decir, problemas para mantener la atención por periodos largos de tiempo, de hiperactividad e impulsividad que presenta el individuo, los procesos de enseñanza debe considerar los recursos adecuados a utilizar para lograr aprendizajes significativos (Yanes y Marrero, 2018). Así, es importante ofrecer a los estudiantes con este trastorno materiales didácticos con enfoques de trabajo cooperativo, práctico en el ámbito matemático, ya que cumple un rol esencial para el aprendizaje instrumental básico del estudiante (López y Fioravanti, 2015).

METODOLOGÍA

La presente investigación tiene un enfoque cualitativo, pues en ella se busca describir el fenómeno subjetivo del aprendizaje que logran los estudiantes con TDA/H a través de la utilización del material tangible, su perspectiva y las percepciones que tienen acerca de este (Hernández et al, 2014).

El alcance de esta investigación es descriptivo debido a que en la investigación es importante analizar las características del comportamiento que tienen los estudiantes frente a un material y describir el aprendizaje que logran con ellos. De esta forma, establecemos causas y podremos explicar ciertos eventos que traen como consecuencia un aprendizaje para los estudiantes (Flick y Morata, 2007; Hernández et al., 2014).

Esta indagación se realizó en el establecimiento educativo particular subvencionado, el que imparte enseñanza básica y media, contando con 25 salas en donde educa a aproximadamente a 35 alumnos por cada una, para los alumnos con necesidades educativas especiales posee el Programa de Integración Escolar (PIE), además dicho centro está ubicado en la ciudad de Temuco. El estudio se realiza en dos cursos de primer año medio junto a sus correspondientes profesores de matemáticas y educadores diferenciales. A cada curso se le aplicó una sesión de clase de matemáticas con el objetivo de construir el concepto de semejanza y sus características. Los estudiantes no tuvieron información previa de este concepto. La clase la dirigen las autoras de este estudio y se apoyan de una guía que conduce las demandas de la sesión, junto al material tangible Tangram (ver Figura 1), regla y transportador entregada a cada estudiante. Los correspondientes profesores y educadores

diferenciales se encuentran presentes en la sesión de clase a modo de observadores, con el objetivo de conocer sus impresiones al término de la sesión en una breve entrevista en profundidad.

Figura 1.

Sección de Guía Instrumento: Tangram.

Instrucciones

Construya usando el tangram un triángulo de las siguientes características:

1. *Construya un **triángulo 1** utilizando las A, B piezas.*

Dibújelo:

Con ayuda de una regla mida los lados de triangulo construido y registre en la siguiente tabla.

	Medidas de los lados (cm)		
	Lado 1	Lado 2	Lado 3
Triángulo 1			

Los datos de análisis corresponden a las respuestas de los estudiantes sobre la guía de trabajo y los registros de audio de la sesión. Para este trabajo, el análisis se centrará en las respuestas de los 8 estudiantes diagnosticados con TDA/H de ambos cursos y sus profesionales a cargo. De forma preliminar para este estudio se hará una selección de evidencia que permita describir el impacto del trabajo desarrollado.

La guía y las demandas incorporadas fueron piloteadas con estudiantes diagnosticados con TDA/H. Se cumplieron con los protocolos de participación a menores y se informó que se resguardará la identidad de los participantes.

RESULTADOS PRELIMINARES

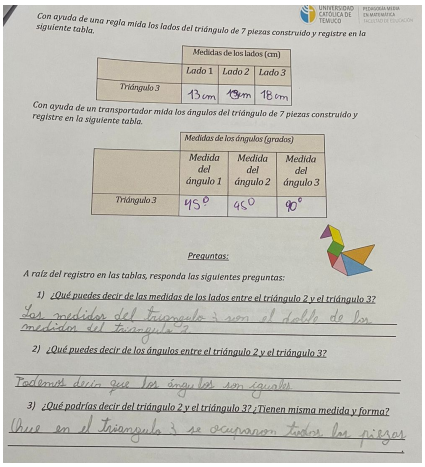
La aplicación del material tangible en la sala generó entusiasmo en los estudiantes debido a que se mantuvieron atentos y participativos durante gran parte de la implementación, en particular los estudiantes que presentaban TDA/H recibieron con agrado la actividad y la realizaron de manera completa o casi completa. Otra observación es el hecho de que al recibir los materiales (antes de que se entregará las instrucciones para comenzar a realizar la guía) los estudiantes se dedican a explorarlo, intentando armar figuras con las piezas del tangram, por lo cual se puede decir que este tipo de material tangible es interesante y atrae la atención de los alumnos, desde nuestra percepción como futuros docentes.

Además, se pudo apreciar que los estudiantes con TDA/H al igual que el resto de sus compañeros interactuaban de manera activa con el material tangible y este les ayudaba a mantener la concentración por periodos más largos de tiempo, pues pasaban largos periodos atentos, construyendo y tomando los datos que se le solicitaban (ver figura 2), se puede afirmar esto debido a que se obtuvieron respuestas de la última parte del instrumento cuando ya habían transcurrido aproximadamente 50

minutos. Aun así, había ocasiones en donde se distraían, sobre todo en aquellas donde no manipulaba el material, por ejemplo, esto sucedía en el cierre de la clase en el que se formalizaba el contenido.

Figura 2.

Respuesta de Guía Instrumento: Tangram.



Con ayuda de una regla mida los lados del triángulo de 7 piezas construido y registre en la siguiente tabla.

	Medidas de los lados (cm)		
	Lado 1	Lado 2	Lado 3
Triángulo 3	13cm	13cm	18cm

Con ayuda de un transportador mida los ángulos del triángulo de 7 piezas construido y registre en la siguiente tabla.

	Medidas de los ángulos (grados)		
	Medida del ángulo 1	Medida del ángulo 2	Medida del ángulo 3
Triángulo 3	45°	45°	90°

Preguntas:

A raíz del registro en las tablas, responda las siguientes preguntas:

1) ¿Qué puedes decir de las medidas de los lados entre el triángulo 2 y el triángulo 3?
Las medidas del triangulo 3 son el doble de las medidas del triangulo 2

2) ¿Qué puedes decir de los ángulos entre el triángulo 2 y el triángulo 3?
Podemos decir que los ángulos son iguales

3) ¿Qué podrías decir del triángulo 2 y el triángulo 3? ¿Tienen misma medida y forma?
Dice en el triangulo 3 se ocuparon todas las piezas

Durante el cierre de la clase se pudo notar que gran parte de los estudiantes logra comprender el concepto de semejanza, este hecho también se aprecia en los estudiantes con TDA/H, aunque hay algunos de los alumnos con este trastorno que se distrajeron en este momento de la aplicación no lograron una comprensión completa del concepto, pero si se les preguntaba en que caso dos figuras eran semejantes respondían que los ángulos de ambas figuras debían ser iguales, sin embargo no consideraban la relación que existía entre los lados de las figuras semejantes, por lo cual se aprecia que a partir de la actividad se logra establecer la idea de semejanza a través de la interacción con el material y la orientación dada por la guía.

En cuanto a lo que observaron las docentes, inicialmente la educadora diferencial remarca el hecho de que la actividad con el uso del material tangible permite hacer más evidente el aprendizaje, resulta motivadora para los estudiantes y el trabajo en equipo les ayuda a reforzar el uso de habilidades como la argumentación, una cita de esto es "la manipulación del material permite evidenciar aprendizajes y motivación en el estudiante" PD1, además, se destaca el hecho de que los estudiantes con TDA/H estuvieron muy participativos, la evidencia de esto corresponde a *"*los estudiantes demuestran interés en la actividad, lo que se vio reflejado en la autorregulación en la plenaria y su participación fue a raíz de su comprensión*"* PD1 y que el realizar la actividad en equipos de trabajo les ayudo a autorregularse y a reforzar la habilidad argumentativa. Por otro lado, la profesora de la asignatura nos indicó que es *"*una actividad buena debido a que al ser lúdica siempre motiva a los estudiantes" PM1. A pesar de todo ello, también señalan el hecho de que se hace necesario tener una ruta de trabajo que les permita a los estudiantes con TDA/H el volver a focalizarse en el momento que pierden la atención.

CONCLUSIONES

En base a lo sucedido durante la aplicación se puede concluir que el uso de material tangible les permite a los estudiantes con TDA/H mantener la atención por periodos más largos de tiempo, y si

además se combina con trabajo colaborativo les ayuda a autorregularse, generando que el estudiante logre un mejor aprendizaje del concepto trabajado (López y Fioravanti, 2015; Yanes y Marrero, 2018).

El uso del Tangram, genera una buena estimulación en el aprendizaje de los estudiantes, y colabora positivamente en la enseñanza de la semejanza, pues les permite el crear figuras que cumplen con estas condiciones, fomentando en todos los estudiantes y en particular en los estudiantes con TDA/H el aprendizaje a través de la manipulación (Briceño y Alamillo, 2017; Manrique y Gallego, 2013).

El trabajo colaborativo asociado al material tangible y la guía de trabajo permite en los estudiantes con TDA/H y sus compañeros el fomentar la habilidad matemática de argumentar y comunicar, usado principalmente para explicar y convencer a los pares en las construcciones y análisis de relaciones entre éstos. El cierre de la clase provocó los principales focos de desconcentración de los estudiantes con TDA/H, esto se puede deber a que la formalización matemática del concepto se realizó de frente a la pizarra y con los aportes del todo el curso en función de las relaciones antes establecidas, lo que desconectó la manipulación del material tangible con el acto de formalización matemática.

REFERENCIAS

Briceño, E. C., y Alamillo, L. S. (2017). Propuesta de una situación didáctica con el uso de material didáctico para la comprensión de la noción de semejanza en estudiantes de segundo de secundaria. *Investigación Educativa de la REDIECH, 8*(15), 111-131.

Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas [CPEIP]. (2021). *Estándares de profesión docente Carreras de pedagogía en matemática Educación media.* Ministerio de Educación de Chile.

Estévez, B., y Guerrero, J. L. (2015). Inclusión educativa del alumnado con TDA/H: estrategias didácticas generales y organizativas de aula. *Revista nacional e internacional de educación inclusiva, 8*(3), 89-106.

Flick, U. y Morata, J. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa.* Ediciones Morata

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* McGraw-Hill Interamericana.

López, E. S., y Fioravanti, M. (2015). *Matemáticas y alumnos con TDAH* [Tesis de Magister, Universidad de Cantabria, España].

Manrique, A. M. y Gallego, A. M. (2013). El material didáctico para la construcción de aprendizajes significativos. *Revista Colombiana de Ciencias Sociales, 4*(1), 101-108.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2015). *Bases Curriculares 7°basico a 2° medio.* Autor.

Villarroel, S., y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. *Revista de didáctica de las Matemáticas,* 78, 73-94.

Yanes, C. R., y Marrero, I. R. (2018). *Materiales didácticos para estudiantes con TDAH.* [Tesis de Magister, Universidad de La Laguna, España].

EJERCITACIÓN CON SENTIDO EN ENSEÑANZA BÁSICA: UNA EXPERIENCIA DE AULA EMPLEANDO LA CONSTANTE DE KAPREKAR

Daniela Bonilla B.[1], Cinthia Iglesias M[2]

[1]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, [2]Universidad Arturo Prat

daniela.bonilla@pucv.cl, ciiglesias@unap.cl

La propuesta de aula da cuenta de una experiencia implementada en un tercer año básico, diseñada con la finalidad de promover la ejercitación con sentido del algoritmo de la sustracción. Planificada desde el enfoque de resolución de problemas, utilizando la constante de Kaprekar para el diseño del problema de la clase. Los resultados de la implementación dan cuenta que los estudiantes a través de la gestión del docente vivenciaron las etapas del enfoque, permitiendo que quince de los dieciocho aprendices lograran construir conocimiento nuevo sobre la constante de Kaprekar y a la vez reforzaran la técnica en estudio.

Enfoque de resolución de problemas, Sustracción, Constante de Kaprekar, Ejercitación.

INTRODUCCIÓN

Las Bases Curriculares del Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2012) declaran que la resolución de problemas es el foco de la enseñanza de la Matemática. Su promoción permite a los estudiantes el desarrollo de habilidades cognitivas de orden superior, a la vez que favorece la motivación y su desarrollo intelectual. Investigaciones dan cuenta que el trabajo de los profesores en la resolución de problemas es escaso y se caracteriza por el planteamiento y la resolución mecánica por parte del profesor (Alfaro y Gormaz, 2009; Espinoza et al., 2009; Felmer et al., 2015). Por otro lado, al analizar los programas de estudio, se evidencia que en tercer año básico se aborda el Objetivo de Aprendizaje 06: "…Demostrar que comprenden la adición y la sustracción de números del 0 al 1000, aplicando los algoritmos con y sin reserva, progresivamente…" (MINEDUC, 2012). Una vez consolidados los conceptos asociados a la sustracción, es necesario que los estudiantes adquieran fluidez en el cálculo algorítmico de ellas, para así tener mayor autonomía en la resolución de procedimientos más complejos. Siguiendo en la misma dirección, Isoda y Olfos (2009) plantean la ejercitación con sentido, por ejemplo, a partir de actividades matemáticas que hagan que los alumnos puedan notar que podrían existir regularidades en un procedimiento dado. En consecuencia, se propone que los docentes implementen actividades de este tipo, en las que los alumnos vivan la experiencia de entusiasmarse mientras piensan desde una perspectiva matemática. A partir de ello, se propone el diseño de una secuencia didáctica que tenga como objetivo que los estudiantes puedan ejercitar con sentido el algoritmo de la sustracción, mediante la resolución de un problema, el problema de la clase.

MARCO TEÓRICO

Para elaborar la propuesta de aula se consideró el enfoque de resolución de problemas y la Constante de Kaprekar para tres dígitos. Estos temas se explican a continuación:

El enfoque de resolución de problemas

Es un enfoque de enseñanza, que propone al profesor guiar a sus estudiantes en la construcción de su conocimiento a través de algunos elementos del pensamiento matemático (Isoda y Olfos, 2009). En este enfoque, se distinguen distintas etapas o momentos, que se caracterizan por los roles que toman tanto los alumnos como el profesor: *presentación y comprensión de un problema,* en la que se realiza la lectura atenta del problema y se verifica el correcto entendimiento de la situación planteada, *resolución del problema por parte de los estudiantes*, etapa en la que los estudiantes piensan y trabajan buscando sus propias soluciones al problema. En esta etapa, el profesor recorre el aula investigando cómo piensan los estudiantes, realiza devoluciones, y mentalmente organiza la manera en que se generará la puesta en común de las respuestas obtenidas por el estudiantado. Posteriormente, y de manera participativa al interior de la clase, la totalidad de los estudiantes y liderados por la gestión del docente, se realiza la *discusión de toda la clase* a partir del problema, para finalmente entrar a la fase de *recapitulación e integración*, donde se institucionaliza el conocimiento que emergió en la clase y se ponen en juego los saberes adquiridos a partir de la ejercitación. Desde esta perspectiva, la clase gira en torno al desarrollo de un único problema, el problema de la clase.

La constante de Kaprekar para tres dígitos

Esta constante fue descubierta por el matemático indio Dattatreya Kaprekar y consiste en la obtención de un número fijo al resolver de manera repetida el procedimiento "restar el número mayor y el número menor que se forma con tres dígitos cualesquiera, salvo aquellos números que tengan sus tres dígitos iguales. Si la diferencia obtenida es de 2 dígitos, entonces se agrega un 0 a la izquierda y se continúa el proceso". La constante es el número 495 y se obtiene en un máximo de 6 pasos, comenzando de cualquier número natural de tres dígitos.

Al realizar el proceso descrito anteriormente se obtiene una secuencia de números que presentan ciertas regularidades. De modo general*: abc* ($a \geq b \geq c \; y \; a \neq b, a \neq c, b \neq c$ no todas de manera simultánea)

Descomposición aditiva del número mayor:

$$abc = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c \cdot 1$$

Descomposición aditiva del número menor

$$cba = c \cdot 100 + b \cdot 10 + a \cdot 1$$

Diferencia entre el número mayor y el número menor:

$$abc = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c \cdot 1$$

$$\underline{-cba = c \cdot 100 + b \cdot 10 + a \cdot 1}$$

$$abc - cba = (a - c) \cdot 100 + 0 + (c - a) \cdot 1$$

$$abc - cba = 100a - 100c + c - a$$

$$= 99a - 99c$$

$$= 99(a - c) \text{ donde } 1 \leq a - c \leq 9$$

A partir de lo antes descrito, se deduce que los números de la secuencia (las diferencias) son los múltiplos de 99: $M(99) = \{99, 198, 297, 396, \mathbf{495}, 594, 693, 792, 891\}$. Entonces, si $100a + 10b + c$ es el número de tres dígitos sobre el cual se aplica el procedimiento, se obtienen diferencias de la forma *99(a-c) donde* $1 \leq a - c \leq 9$*; (a-c) = d.* Las diferencias "d" se relacionan con la cantidad de pasos que se requieren para llegar a la constante (495).

Tabla 1.

Relación entre d (diferencia entre el dígito mayor y dígito menor del número) y la cantidad de pasos en que se llega a la constante de Kaprekar para tres dígitos.

d =(a-c)	***99(a-c)***	**Cantidad de pasos**
1	$99 \cdot 1 = 099$	6
2	$99 \cdot 2 = 198$	5
3	$99 \cdot 3 = 297$	4
4	$99 \cdot 4 = 396$	3
5	$99 \cdot 5 = 495$	1
6	$99 \cdot 6 = 594$	2
7	$99 \cdot 7 = 693$	3
8	$99 \cdot 8 = 792$	4
9	$99 \cdot 9 = 891$	5

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA DE AULA

La experiencia de aula se implementó en un tercer año básico de una escuela municipal de la ciudad de Iquique y tuvo una duración de 45 minutos. Participaron 18 estudiantes y estuvo focalizada en la ejercitación del algoritmo de la sustracción para números de tres dígitos a través de una secuencia de clase basada en el enfoque de resolución de problemas.

Para su realización se organizaron 3 sesiones de trabajo previas a la implementación con la docente del curso. Durante esta primera etapa, se profundizó, por una parte, en el conocimiento matemático sobre los números de Kaprekar, lo cual permitió tomar decisiones para entregar mayores oportunidades a los estudiantes en la resolución del problema. En este sentido, se consideró una precaución didáctica respecto de la gestión del problema: esta es que la docente a cargo del curso determinó de manera personalizada el número de inicio para cada uno de los y las estudiantes, de manera que algunos podrían llegar a la constante realizando dos diferencias, y otros llegarían realizando seis diferencias. Se realizó esta adecuación, de manera que, en el tiempo acotado de la clase, todos los estudiantes pudiesen encontrar llegar a la constante de Kaprekar que, en el contexto del problema propuesto para la clase, correspondía a una clave secreta. De esta manera, se brindó a todos la posibilidad de resolverlo, no quedando condicionado a la extrema fluidez de los cálculos. El segundo tema que se abordó fue en la aprehensión del conocimiento didáctico del Enfoque de Resolución de problemas, de manera que la profesora pudiera hacer una adecuada gestión de la clase.

La implementación de la clase desde el enfoque de resolución de problemas

La clase giró en torno a la resolución de un único problema titulado "La clave secreta". En él, se ponía a los estudiantes en una situación donde simulaban ser piratas ubicados en una playa desierta y haber

hallado un cofre con un candado. Fuera de él se encontraban unas instrucciones, las que indicaban los pasos a realizar para poder abrirlo. La clave secreta encontrada serían los números que permitirían abrir el cofre. Esta correspondía a la constante de Kaprekar para tres dígitos. A continuación, se describen los momentos de la clase desde el enfoque de resolución de problemas:

Presentación del problema: Socialización del problema contextualizado a una playa desierta en la ciudad de Iquique. Se muestran las llaves con distintos números y el cofre donde está guardado el tesoro, y se ejemplifica con el número 687 (hasta dos pasos), formando el número mayor y número menor, cuidando de no develar la clave secreta. Frente al problema de la clase (ver Figura 1) Se plantean las siguientes interrogantes ¿Cuál es la clave secreta? ¿En cuántos pasos obtuviste la clave?

Figura 1.

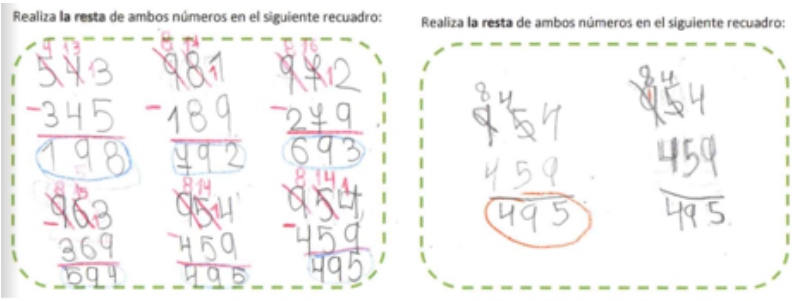
El problema de la clase.

Solucionan problema por sí mismos: Se entrega un tiempo para resolver el problema, la profesora apoya a los estudiantes que presentan dificultades. Haciendo devoluciones como: ¿Cuántos pasos has realizado? ¿Estás seguro de tus cálculos? ¿Puedes revisar el número mayor y el número menor que has formado?

Discusión de toda la clase: Los estudiantes explican sus procedimientos y la estrategia utilizada, que es el algoritmo de la sustracción (ver Figura 2). La profesora escribe la ruta de respuestas de los estudiantes y las proyecta en la pizarra. Los estudiantes identifican la cantidad de pasos y el número que se obtiene al realizar el procedimiento (clave secreta en el contexto del problema). A continuación, se ilustran las respuestas de los estudiantes *E1* con el número 543 y *E4* con el número 954, respectivamente:

Figura 2.

Producciones de los estudiantes E1 y E4.



Ambos estudiantes utilizan la estrategia de algoritmo para resolver las sustracciones e identifican el número mayor y el número menor que se puede formar con los dígitos del número obtenido en cada paso. *E1* encuentra la clave secreta **en 6 pasos** (incluido el paso de comprobación), mientras que *E4* lo hace **en 2 pasos**, en coherencia con los números asignados inicialmente.

Recapitulación e integración: La profesora sistematiza las ideas centrales de la clase en conjunto con los estudiantes concluyendo que el conocimiento nuevo que emerge es: El número constante que se obtiene al realizar el procedimiento propuesto es el número 495. Para encontrar este número constante se deben realizar desde 1 hasta 6 pasos (sin incluir el paso de comprobación).

CONCLUSIONES

Al realizar un análisis del proceso de diseño, implementación y ejecución de la clase basada en el enfoque de resolución de problemas, que perseguía como objetivo que los y las estudiantes de tercero básico ejercitaran con sentido la sustracción para números de tres dígitos, se observa que se cumple el objetivo propuesto para la clase, y por tanto, el de la experiencia de aula, pues los estudiantes fueron capaces de construir un nuevo conocimiento sobre los números naturales de tres dígitos a través de la ejercitación con sentido de la resta, emergiendo en esta clase la regularidad obtenida mediante la constante de Kaprekar, notando en la recapitulación e integración (etapa 4 del enfoque) que independiente del número por el que comenzaran siempre llegarían a la constante de Kaprekar para tres dígitos y que el número de restas que debían realizar, dependiendo del número asignado, oscilaba entre dos y seis. En términos de la disposición de los y las estudiantes en la resolución del problema, se observó que se mostraron desafiados e interesados en encontrar aquel número que les permitía abrir el cofre, esto se materializó en que quince de los 18 estudiantes lograron encontrar la clave secreta.

De modo general, se tiene que las actividades de ejercitación -cuya finalidad es la precisión y rapidez en el cálculo de los estudiantes-, tienden a ser aburridas y monótonas para los aprendices que resuelven problemas, lo que trae como consecuencia que aquellos alumnos que habían comenzado a tener iniciativa en su aprendizaje y se divertían pensando, se transformen en alumnos más pasivos. Por tanto, es relevante cuestionarse ¿Cómo desarrollar clases donde los estudiantes ejerciten el cálculo de las operaciones mientras disfruta el proceso de pensar? A partir de esto, se propone los estudiantes se enfrenten a problemas donde los mecanismos del cálculo les atraigan la atención y les interesen. Los estudiantes pueden ir reconociendo regularidades o propiedades de los números y las operaciones, aun cuando no las puedan ver con claridad. Lo ideal es un plan de clases en el que emergen preguntas y más preguntas, generando de esta manera curiosidad e interés en la búsqueda de regularidades.

REFERENCIAS

Alfaro, L., y Gormaz, R. (2009). Análisis comparativo de los resultados chilenos en las pruebas de Matemática SIMCE y PISA. En *¿Qué nos dice PISA sobre la educación de los jóvenes en Chile? Nuevos análisis y perspectivas sobre los resultados en PISA 2006* (pp. 239-260). Unidad de Currículo y Evaluación del Ministerio de Educación.

Espinoza, L., Barbé, J., y Gálvez, G. (2009). Estudio de fenómenos didácticos vinculados a la enseñanza de la aritmética en la educación básica chilena. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(2), 157-168.

Felmer, P., Perdomo-Díaz, J., Cisternas, T, Cea, F., Randolph, V., y Medel, L. (2015). La resolución de problemas en la matemática escolar y en la formación inicial docente. *Revista Estudios de Política Educativa, 1*(1), 64-105.

Isoda, M., y Olfos, R. (2009). *Enfoques sobre la resolución de problemas en la enseñanza de matemáticas a partir del estudio de clase.* Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2012). *Bases Curriculares Educación Básica.* Autor.

GENERALIZACIÓN DE PATRONES NUMÉRICOS FIGURALES MEDIANTE DIFERENTES DESCOMPOSICIONES DE LAS FIGURAS DE UNA SUCESIÓN. UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Eliana Valeria Leyva Cota, María Teresa Dávila Araiza

Universidad de Sonora

a221230129@unison.mx, maría.davila@unison.mx

Se discutirá el diseño de una actividad didáctica para favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico de estudiantes de educación secundaria de México, mediante tareas de generalización de patrones, que forma parte de los avances de una tesis de maestría. La actividad es una de las tres que componen una secuencia didáctica fundamentada en la metodología ACODESA y busca promover la visualización de patrones numéricos y figurales mediante la descomposición de las figuras de una sucesión para la obtención de una regla general. La enseñanza del álgebra es un área problemática, por ello, en este trabajo se proponen alternativas de mejora.

Patrones figurales, Visualización, Generalización, ACODESA.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del álgebra tiende a enfocarse en la realización de operaciones que involucran el uso de literales, la memorización de procedimientos, y generando que los estudiantes simplemente lleven a cabo los pasos a seguir, sin hacer uso de una reflexión respecto a lo que realizan, lo cual limita el desarrollo del pensamiento algebraico.

Para Freudenthal (1977, citado en Kieran, 2020) un aspecto importante del álgebra escolar es el pensamiento algebraico, este incluye la capacidad de describir relaciones y procedimientos. Se considera que el pensamiento algebraico se conforma por dos aspectos principales, el "realizar y expresar la generalización de los sistemas simbólicos de manera más formal y convencional, y razonar con formas simbólicas incluyendo la manipulación sintáctica guiada de estas formas simbólicas" (Kaput, 2008 citado en Cortés et al., p. 222).

Diversas investigaciones han destacado la importancia que tiene desarrollar el pensamiento algebraico desde edades muy tempranas, y han demostrado que los estudiantes de nivel preescolar y primaria pueden llevar a cabo el trabajo algebraico, pero, para ello, es indispensable el correcto desarrollo del trabajo algebraico de manera curricular.

La aparición de las corrientes de investigación conocidas como Pre-álgebra y el Álgebra temprana (early-algebra), ha arrojado un nuevo punto de vista sobre el álgebra escolar, que resalta la importancia del desarrollo del pensamiento algebraico y de considerar actividades que involucren la implementación de procesos matemáticos y la habilidad de generalizar. Kieran (2020) plantea 3 tipos de actividades que se realizan en el álgebra escolar para lograr el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes. Un tipo de actividades que menciona la autora son las denominadas generacionales, que son aquellas que permiten gran parte de la construcción del significado

correspondiente a los conceptos del álgebra y a su vez son consideradas aquellas actividades que permiten la introducción al contenido algebraico.

Las tareas de generalización de patrones son actividades generacionales, ya que, a partir del trabajo con este tema, es posible que el estudiante despierte y desarrolle su pensamiento algebraico, lo cual ha permitido que se reflexione sobre la importancia que tiene el uso de patrones como un tema eficaz para la introducción del pensamiento algebraico del estudiante.

Las actividades con patrones numéricos están propuestas como contenido en planes y programas de estudios de matemáticas en México, ya que son consideradas como tareas con potencial para el desarrollo del pensamiento algebraico.

En matemáticas se presentan dificultades en el área del álgebra, por lo que en los últimos años se ha señalado la importancia que tiene el desarrollo del pensamiento algebraico para la mejora en el aprendizaje del álgebra. Se considera que las tareas de identificación y generalización de patrones puede ser una vía de apoyo para esta área de oportunidad, por lo que, en este trabajo de tesis de maestría, es de interés retomar este tipo de situaciones para que los estudiantes de secundaria desarrollen su pensamiento algebraico. Específicamente, se tiene como objetivo diseñar e implementar una secuencia didáctica que plantee situaciones problema de generalización de patrones numéricos figurales, favoreciendo la visualización y descomposición de las figuras de una sucesión figural, en estudiantes de primer grado de secundaria. Un ejemplo del tipo de actividades que se consideran para el diseño de la secuencia es el siguiente:

Figura 1.

Ejemplo de patrón numérico y patrón figural en una sucesión de figuras.

Un ejemplo de patrón figural en la secuencia es el siguiente: se observa que de un término a otro de la sucesión va aumentando en uno la cantidad de filas horizontales de 3 elementos, y que el número de filas con 3 elementos coincide con la posición de figura correspondiente.

Un ejemplo de patrón numérico es el siguiente: De una figura a la siguiente, hay un aumento de 3 en la cantidad de puntos que componen a la figura.

En este documento, se presentará una actividad diseñada como parte de la secuencia didáctica y se destacará el papel de las etapas de ACODESA en ella.

ELEMENTOS TEORICOS

Para el diseño de una secuencia didáctica es importante tener referentes teóricos que den fundamento al trabajo que se desea realizar. Para este trabajo, se seleccionó la metodología de enseñanza ACODESA y las etapas que define Radford (2008) para generalización algebraica de patrones.

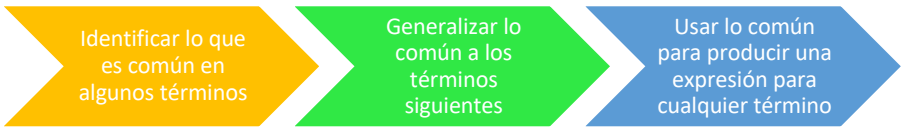
La metodología ACODESA (Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico, Auto reflexión) propuesta por Hitt (2009), tiene como propósito el acercamiento a la construcción de nuevos conocimientos

mediante cinco etapas, donde el estudiante desarrollará de manera individual y colectiva el aprendizaje matemático mediante la resolución de *situaciones problema*. La metodología tiene como fin el gestionar el trabajo dentro del aula, generando la interacción entre los estudiantes y el profesor donde se trabaja en conjunto con la resolución de situaciones problemas, al igual generalizar las representaciones de los estudiantes y su evolución hacia representaciones compartidas en el grupo y con el profesor.

Por otro lado, se retoma el trabajo de Radford (2008), donde describe del desarrollo que el estudiante presenta para al realizar la generalización algebraica de patrones, que consiste en lo siguiente:

Figura 2.

Etapas de generalización algebraica de patrones de Radford (2008).



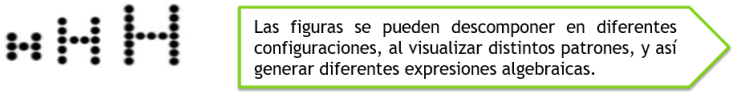
Según Radford (2008, p. 84) al trabajar con una sucesión se tiene como primer paso identificar lo común en algunos términos, con el fin de extenderlo al resto de los términos de la sucesión. Al identificar características comunes en casos particulares, se hace posible una hipótesis aplicable al resto de los términos, con las cuales se podrá proporcionar una expresión correspondiente que permita calcular cualquier elemento de la sucesión.

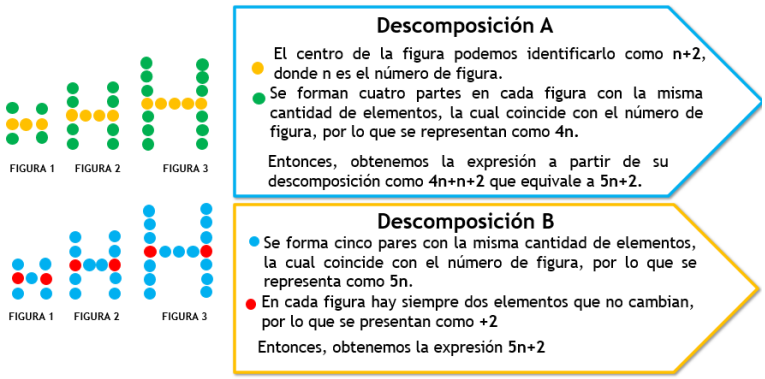
PROPUESTA DIDÁCTICA

En este trabajo se pretende que los estudiantes desarrollen la habilidad de visualizar y descomponer de diferentes maneras las figuras de una sucesión para poder construir cualquier término. La visualización al trabajar con secuencias figurales numéricas, según Hitt (2016), se hace presente en la asociación con un algoritmo de cálculo y un proceso aritmético-geométrico, unificando los propósitos de la propuesta también se ve involucrado el trabajo de la descomposición la cuál determinar el número de elementos que tiene, así como expresar algebraicamente una fórmula para calcularlos, como se ilustra en el siguiente ejemplo (adaptado de Kohanová y Solstad, 2019):

Figura 3.

Ejemplo de descomposición.





ACTIVIDAD DIDÁCTICA

A continuación, se describirá una de las tres actividades que integra la secuencia didáctica en este trabajo de tesis, la cual inicia con la siguiente situación problema:

La familia de Julieta se prepara para las fechas navideñas, como tradición anual, juntos realizan manualidades para la decoración, en esa ocasión comenzaron a realizar diferentes pinos con fomi verde decorado con esferas de fomi amarillo, como los siguientes:

Figura 4.

Sucesión de figuras de secuencia didáctica.

Al observar los adornos, la mamá de Julieta se pregunta lo siguiente: ¿habrá alguna manera de saber cuántas esferas se necesitan para decorar cualquier adorno de pino qué quieran realizar?

En la secuencia didáctica se organiza de acuerdo con las cinco etapas de ACODESA de la siguiente manera.

Trabajo individual: Dada la situación problema, se tiene el propósito de que el estudiante, mediante la observación y análisis de la sucesión figural, identifique las figuras geométricas que componen cada figura de la sucesión (triángulos o trapecios para cada nivel de los pinos, círculos para las esferas y rectángulo para el tronco), esto con el fin de inducirlo a elaborar la construcción de las siguientes dos figuras de la secuencia. El propósito de esta primera parte del trabajo los estudiantes producen las representaciones funcionales espontaneas que aparecen al tener el primer acercamiento a la actividad.

Trabajo en equipo: Los alumnos se reunirán en equipos de tres integrantes, donde comentarán los resultados que obtuvieron en su trabajo individual y comparando procedimientos. Harán uso de manipulables que fomentarán la visualización y descomposición de los adornos de la secuencia. Durante este trabajo se tiene el propósito de refinar las representaciones creadas en el trabajo individual emergiendo las representaciones funcionales grupales. En esta ocasión se busca que en equipo los estudiantes puedan llevar a cabo la construcción de dos términos de la secuencia

relativamente alejados, en este caso de las figuras 10 y 16. Los estudiantes plasmarán la idea de operaciones a realizar para poder obtener el número de esferas en una cartulina, la que expondrán ante el grupo.

Trabajo grupal: En esta etapa el profesor juega el papel de mediador, se les pedirá que por equipo expresen a las conclusiones que llegaron para representar el número de esferas para cualquier adorno de pino, con el fin de poner a debate los procedimientos u operaciones que realizaron para ese resultado. Una parte importante es indagar en la manea que los estudiantes trabajan la descomposición de las figuras, y para eso se les pide que a manera de equipo distingan los pasos a seguir para el conteo de las esferas, para exponerlo ante el grupo y así poder determinar desde su opinión la manera más sencilla para realizar el conteo.

Autorreflexión: En esta etapa se trabaja con una situación relacionada con la primera, en esta ocasión se les comenta que Julieta agrega nuevos elementos al adorno del pino y se les muestra la siguiente secuencia:

Figura 5.

Secuencia figural de la etapa de autorreflexión de la actividad.

Al igual que en la etapa individual, se tiene el propósito de que el estudiante elabora los dos siguientes términos correspondientes, seguido de términos lejanos como el 10 y 16. En esta ocasión se le solicita al estudiante que exprese de manera breve cómo obtener cualquier figura, indicando las operaciones necesarias que se debe realizar. Es una manera de cierre a la situación donde pondrán en práctica lo trabajado en las primeras tres etapas, refinando sus conocimientos.

Institucionalización: En la etapa final se integran y formalizan los conceptos matemáticos que surgieron a lo largo de las etapas anteriores, donde se profundiza el contenido matemático desde la perspectiva propuesta en los planes y programas de la educación básica en México, se observa cómo emergen las representaciones institucionales. Se resuelven dudas acerca de la validez de las diferentes estrategias propuestas y se presentan justificaciones acerca de los resultados obtenidos.

REFERENCIAS

Kieran, C. (2020). Algebra Teaching and Learning. En S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer.

Kohanoná, I., y Solstad, T. (2019). Liner figural patterns as a teaching tool for preservice elementary – the role of symbolic expressions. In *Eleventh Congress of the European society for Research in Mathematics Education*. Utrecht University. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02416345

Molina, M., y Cañada, M. (2018). La noción de estructura en early algebra. En P. Flores, J. Lupiáñez, I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-142). Atrio.

Quiroz, S., Bustos, A., y Hitt, F. (2019). El aprendizaje de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico. En S. Quiroz, E. Nuñez, J. Soto y M. Saboya (Eds.), *Actividades de modelación matemática en un medio tecnológico* (pp. 51-73). Editorial AMIUTEM

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, 40, 83-96.

Secretaria de Educación Pública [SEP] (2017). *Planes de estudio de referencia del marco curricular común de la educación media superior*. Autor.

Secretaria de Educación Pública [SEP] (2017). *Aprendizaje clave la educación integral. Matemáticas. Educación secundaria*. Autor.

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *97*, 51-67.

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE INECUACIONES POR MEDIO DE LA DESIGUALDAD TRIANGULAR

Melanie Cubillos, Melissa Paulus, Alonso Quiroz

Universidad Católica Silva Henríquez

mcubillosd@miucsh.cl, mpaulus@miucsh.cl, aquiroz@ucsh.cl

La propuesta de aula tiene el objetivo de contribuir a la superación de dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones de primer grado. Los estudiantes no diferencian entre ecuaciones e inecuaciones, hay una errónea interpretación de la solución, no logran generar una representación algebraica a partir de un enunciado verbal. La propuesta está diseñada para ser implementada en octavo año de Educación Básica, respecto del Objetivo de Aprendizaje 9 presente en las Bases Curriculares.

Inecuaciones, Desigualdades, Álgebra, Solución, Representación.

INTRODUCCIÓN

En el siguiente trabajo se dará cuenta de una propuesta de aula destinada a la enseñanza de las desigualdades e inecuaciones de primer grado en el nivel de 8° básico por medio de un modelo práctico para apoyar el aprendizaje de la desigualdad triangular, considerando el Objetivo de Aprendizaje 9: "Resolver inecuaciones lineales con coeficientes racionales en el contexto de la resolución de problemas, por medio de representaciones gráficas, simbólicas, de manera manual y/o con software educativo" (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2016, p. 52).

Para la preparación de la propuesta se identificaron las dificultades que presentan los estudiantes al momento de enfrentarse a las desigualdades e inecuaciones. Sobre la base de dicha identificación, se construyó un total de tres actividades con la finalidad de hacer frente a estas dificultades en el proceso de aprendizaje. La primera actividad está centrada en la interpretación de los símbolos de desigualdad invitando a los y las estudiantes a transitar por representaciones concretas, pictóricas y simbólica, para luego dar paso a una segunda actividad en la que trabajarán con un modelo práctico para representar la desigualdad triangular, con el propósito que los y las estudiantes comprendan que las desigualdades no tienen una única representación. Por último, se da paso a una tercera actividad destinada a la dificultad de definir una inecuación encontrando y graficando las posibles soluciones del modelo anteriormente trabajado.

Finalmente, se presenta la conclusión de nuestra propuesta, en la cual se exponen los resultados esperados de la experiencia de aula.

ANTECEDENTES

Consideramos importante comenzar exponiendo ciertas dificultades que se presentan, generalmente, en el proceso de aprendizaje de inecuaciones lineales en el nivel de 8vo básico. Una de estas problemáticas es que los estudiantes no diferencian entre ecuaciones lineales e inecuaciones lineales, debido a que, el método de resolución utilizado para ejercicios de ambos objetos matemáticos es muy similar, entonces no reconocen las propiedades de desigualdades que se deben tener en consideración al resolver una inecuación (Heredia y Palacios, 2014). Lo anterior, incide en que los estudiantes no

logren dar una interpretación correcta al resultado de una inecuación lineal. Conteras (s.f) identifica que el error que induce esta dificultad se manifiesta en la representación de la solución de la inecuación como única por parte de los estudiantes.

Por su parte, los estudiantes presentan gran dificultad para representar de forma algebraica un enunciado verbal, donde los errores más recurrentes se ven al momento de designar la incógnita y la elección del símbolo que representa la situación o el ejercicio en particular (Heredia y Palacios, 2014). Blanco et al. (2004) evidencian en su estudio que la mayor dificultad por parte de los estudiantes se encuentra en identificar las inecuaciones que cuentan con desigualdades dobles.

Por otra parte, Moraleda (2010) explicita la dificultad que presentan los estudiantes al momento de dictaminar el conjunto solución de una inecuación en sus diversas representaciones, puesto que los estudiantes no diferencian el espacio establecido por el intervalo como solución, lo que se debe generalmente a una baja comprensión del tema.

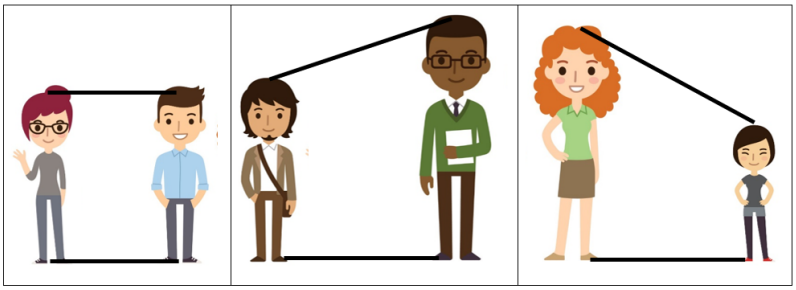
Finalmente, Monje (2017) evidencia la falta de continuidad en el trabajo de las inecuaciones en la enseñanza chilena, e incluso observa que en los textos escolares no se cuenta con la teoría suficiente que fundamente la resolución de inecuaciones.

PROPUESTA DE AULA

Para iniciar la secuencia didáctica, se busca que los estudiantes interpreten el símbolo de desigualdad a partir de representaciones concretas, pictóricas y simbólicas, que permitan visualizar el comportamiento de este objeto. La primera actividad parte desde la representación concreta, consta de realizar tres comparaciones de estatura entre dos personas con la indicación de que tracen una línea desde la cabeza de la persona 1 que se encuentra a la izquierda de cada recuadro, a la cabeza de la persona 2 que se encuentra a la derecha de cada recuadro, y luego repitan este proceso desde los pies, como se representa en la Figura 1, con la finalidad de que los estudiantes construyan los símbolos =, <, >.

Figura 1.

Primera Actividad.

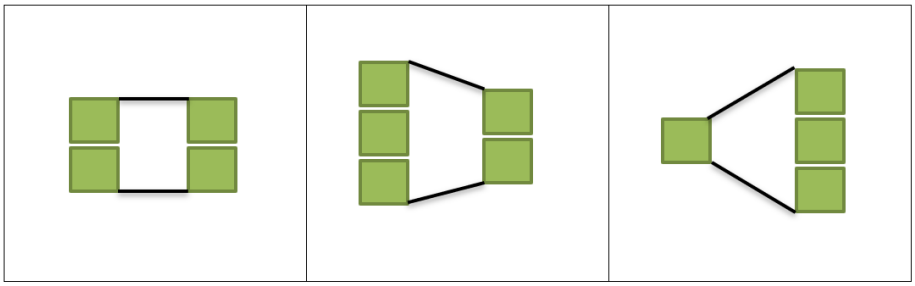


Fuente: Elaboración propia.

Luego, se dará paso de lo concreto a lo pictórico presentando una comparación entre bloques con las indicaciones de trazar una línea desde el punto más alto de la pila 1 de bloques a la pila 2, y luego trazar una línea desde la base de la pila 1 a la pila 2 (ver Figura 2).

Figura 2.

Segunda parte de la primera actividad.



Fuente: Elaboración propia.

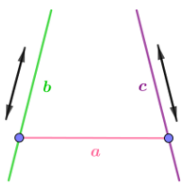
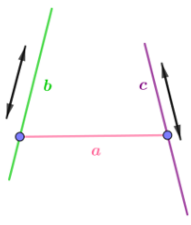
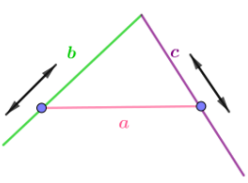
Para finalizar la actividad, se reunirán las conclusiones de los estudiantes respecto de la interpretación de cada uno de los símbolos, y se entregará a los estudiantes un listado de cuatro parejas de números a comparar. Se presentará un recuadro en medio de los números a comparar en el cual deben colocar el símbolo que representa la situación. Con esta actividad se da paso a la representación simbólica.

La actividad descrita busca combatir una de las dificultades presentadas en el aprendizaje de las inecuaciones, aquella en que los estudiantes no diferencian entre ecuaciones lineales e inecuaciones lineales. Esta problemática se debe a que los estudiantes no comprenden con profundidad el concepto de inecuación y no distinguen diferencias entre los símbolos (Heredia y Palacios, 2014). En una primera instancia se espera que los estudiantes logren realizar una diferenciación de la simbología y la relacionen con la continuación del aprendizaje del Objetivo de Aprendizaje seleccionado. Otra dificultad que se busca erradicar con esta actividad es aquella que se caracteriza por los errores que se presentan en el momento en que los estudiantes deben representar un enunciado verbal en forma algebraica, debido a que, los estudiantes no distinguen los signos de desigualdad (Moraleda, 2010).

Para continuar con la secuencia didáctica, se propone una segunda actividad en la cual los y las estudiantes deberán construir un modelo práctico de un triángulo con limpiapipas, este modelo considerará una base fija y dos lados que puedan desplazarse, en la Figura 3 se presenta el modelo con un ejemplo de construcción.

Figura 3.

Referencia modelo limpiapipas.

		
Paso 1: se fija la medida de la base y se une con los lados desplazables	Paso 2: se acomodan la medida de los lados para formar el triángulo	Paso 3: se unen los extremos de los lados para formar el triángulo

Fuente: Elaboración propia.

Los estudiantes trabajarán con la desigualdad triangular $a < b + c$, fijando un valor numérico para la base representada por a y comprobarán cuantos triángulos pueden formar moviendo los lados y respetando esta desigualdad, se solicitará que registren al menos 5 casos. En la segunda parte de esta actividad, los estudiantes deberán establecer como fijos 2 lados de este triángulo, dejando solo que el lado restante se desplace, se solicitará que los estudiantes con su modelo práctico puedan establecer una lista de 5 posibles valores para este tercer lado y los registren.

Para la última actividad de la secuencia, los estudiantes utilizarán los datos que recolectaron en la segunda parte de la segunda actividad solicitándoles que, por medio del ejemplo de la desigualdad triangular, planteen una inecuación designando como incógnita la medida de este tercer lado y que en una recta numérica puedan marcar los resultados previamente encontrados.

Estas dos actividades están diseñadas para superar dos dificultades, una de ellas es la mencionada anteriormente, que los estudiantes no comprenden el concepto de inecuación, el objetivo inicial de trabajar estas dos actividades en conjunto es que se interioricen con la definición de inecuación y comprendan el concepto a partir de la desigualdad triangular llevándolo posteriormente a otros valores. La última dificultad que se busca superar con estas actividades es en aquella que los estudiantes no comprenden la solución de una inecuación y, por consiguiente, le dan una interpretación que no es correcta. El ejercicio de marcar en la recta numérica los posibles valores que pueden tomar los lados del triángulo, dependiendo de la medida dada, ayuda a que los estudiantes distingan que hay una región que representa la solución de la inecuación, que es una de los problemas que presentan en esta dificultad en particular (Moraleda, 2010).

CONCLUSIONES

Con la propuesta de aula descrita anteriormente, se busca enfrentar las dificultades mencionadas en los antecedentes, que se presentan en el aprendizaje y enseñanza de las desigualdades e inecuaciones, se espera que la implementación de esta propuesta en la sala de clases permita que los estudiantes que tienen ciertas deficiencias en esta temática logren superar dichas problemáticas.

Para el desarrollo de la primera actividad se espera que, en la etapa final, donde los estudiantes deben identificar el número mayor escribiendo el signo correspondiente, ellos logren superar la actividad correctamente sin mayor dificultad, ya que, será muy sencillo relacionarlo con las primeras etapas de la actividad.

Mientras los estudiantes están desarrollando la segunda actividad, se pretende que ellos estén relacionando estas medidas con el símbolo de la desigualdad, para que así, ya en la última actividad, logren definir la inecuación correctamente. Al observar los puntos ubicados en la recta numérica logren percatarse por sí solos que la solución de una inecuación corresponde a un conjunto, y no a una solución única como es en el caso de las ecuaciones.

Finalmente, se espera obtener evidencia empírica de los estudiantes no necesiten un contexto, como el de la medida de los lados de los triángulos, para resolver inecuaciones e interpretar la solución de una inecuación cuando, por ejemplo, se le propongan ejercicios. Es fundamental que los estudiantes comprendan que la solución de las inecuaciones no es única, de esta manera, y con respecto a lo

anterior, se busca conseguir evidencia de que diferencian entre las ecuaciones e inecuaciones, que es la dificultad inicial.

REFERENCIAS

Heredia, M., y Palacios, M. (2014). *Las inecuaciones lineales en la escuela: algunas reflexiones sobre su enseñanza a partir de la identificación de dificultades y errores en su aprendizaje*. [Tesis de licenciatura, Universidad del Valle, Colombia]. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/7743

Contreras, L. (s.f). *Análisis didáctico sobre inecuaciones lineales*. [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile].

Blanco, L., Garrote, M., y Hidalgo, J. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades. *Revista Suma*, 46, 37-44.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2016). *Programa de Estudio 8° Básico Matemática*. Autor.

Moraleda, C. (2010). *Resolución de ecuaciones, inecuaciones e interpretación de soluciones*. [Tesis de maestría, Universidad de Granada, España].

Monje, Y. (2017). *Tratamiento de la inecuación en el contexto escolar de Chile y Rusia*. [Tesis de maestría, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile].

PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA EL ABORDAJE INICIAL DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Ximena Herrera, Fátima Toro, Andrea Donoso

Universidad Alberto Hurtado

xime_h_r@yahoo.com.ar, fatima.torol@gmail.com, andrea.donoso.delatorre@gmail.com

En este documento se presenta el diseño de una situación de aprendizaje para introducir el concepto de función cuadrática, por medio del desarrollo de actividades que buscan integrar conocimientos, habilidades y actitudes declaradas en los programas de estudio de segundo medio. El diseño de la propuesta se sustenta en los planteamientos de la Educación Matemática Realista (EMR) de Hans Freudenthal, y para el diseño de las actividades se utilizaron elementos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Raymond Duval, incorporando aspectos históricos de la función cuadrática que contribuyen a cimentar su noción.

Función cuadrática, Registros de representación semiótica, Educación matemática realista.

ANTECEDENTES

Diversos estudios han puesto en evidencia diferentes problemáticas al momento de la enseñanza de las funciones. En relación con el concepto de función, Gómez y Carulla (1999) dan cuenta de que no se generan aprendizajes significativos asociados a su construcción, ya que comúnmente se trabaja con procesos de índole procedimental. Mesa y Villa (2008) hace referencia a la falta de contextos de significatividad para presentar el concepto y a la falta de reconocimiento de sus dificultades propias a nivel epistemológico. Con respecto al último punto, es importante señalar que:

> La revisión histórica muestra "lo cuadrático" como una sinergia entre geometría euclidiana, las cónicas y la geometría analítica, teniendo como objeto de estudio el movimiento. Vale la pena rescatar parte de esta sinergia en el aula de clase, de tal manera que se presente una concepción de lo cuadrático desde diversas interpretaciones y contextos. (p. 6).

Otra dificultad se relaciona con las articulaciones de los registros de representación. Tal como plantea Artigue et al. (1995), los hábitos de enseñanza tradicional, en los que predomina el registro algebraico, impide que los estudiantes desarrollen flexibilidad en el paso de un registro a otro. Según Duval (2004), para alcanzar una aprehensión significativa del objeto matemático es esencial incorporar en la 'estructura cognitiva' las diversas representaciones asociadas al concepto. Esto dado que cada forma de representación ilustra aspectos relevantes de la noción de función. Por ejemplo, las formas gráficas permiten visualizar la covariación y comprender la idea de continuidad, las expresiones algebraicas acentúan la correspondencia entre las variables involucradas mientras que las representaciones tabulares muestran la relación entre valores de dichas variables (Thompson, 1994; Confrey y Smith, 1995, citado en Nitsch et al., 2013).

Even (1993) refiere a dos características esenciales de la noción de función, arbitrariedad y univalencia, y señala que los profesores no perciben la naturaleza arbitraria de las funciones, y muy pocos pueden explicar la importancia y origen de la univalencia. En este sentido, Dede y Soybas (2011) señalan que proporcionar, a los estudiantes, la definición de las funciones no es suficiente para lograr una comprensión significativa del objeto. Asimismo, constatan que la conceptualización de la

noción de función se sigue presentando sin considerar los 'subconceptos' (dominio, codominio, preimagen, variable, etc.) esenciales e inherentes a la definición de función.

Lo anterior pone de manifiesto la necesidad de diseñar una propuesta de enseñanza para las funciones, en particular, de las funciones cuadráticas, que pueda abordar las problemáticas presentadas propiciando la construcción del concepto a partir del análisis de sus elementos y sus diferentes representaciones, en contextos significativos y considerando su evolución histórica y epistemológica. Este acercamiento debe realizarse por medio de la exploración y comprensión de sus características y no desde la imposición de lo procedimental, favoreciendo aprendizajes significativos en los estudiantes.

MARCO TEÓRICO

El marco de referencia que sustenta el diseño de esta propuesta se basa principalmente en tres aspectos: la Educación Matemática Realista (EMR), la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) y la Epistemología desde su visión histórica.

En la Educación Matemática Realista se plantea que: "La imagen de la matemática se enmarca dentro de la imagen del mundo, la imagen del matemático dentro de la del hombre y la imagen de la enseñanza de la matemática dentro de la sociedad" (Freudenthal, 1991, p. 32) y se fundamenta en los principios de actividad, realidad, reinvención, interacción, interconexión y de niveles; en este último, los estudiantes transitan por lo situacional, referencial, general y formal, para matematizar situaciones de la vida cotidiana.

Por otra parte, Duval (2004, p. 5) señala que "las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma", donde para la adquisición de un objeto matemático se debe hacer uso de más de un registro de representación, además de la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos, que permita una representación identificable, el tratamiento y la conversión de un registro a otro.

La noción de función ha sido objeto de estudio en distintas aproximaciones teóricas, particularmente cuestiones relativas a la historia y epistemología de dicho objeto matemático. Un estudio histórico y epistemológico desarrollado por Pino-Fan et al. (2019) permitió identificar, al menos, seis significados parciales que ha adquirido la noción de función a lo largo de su origen, evolución y formalización (Función como correspondencia, como relación entre magnitudes variables, como expresión gráfica, como expresión analítica, como correspondencia arbitraria y desde la teoría de conjuntos). Sin duda, promover el estudio de los significados parciales permite fortalecer el significado personal de los estudiantes y lograr que dicha significación se acerque a la conceptualización global del objeto.

METODOLOGÍA

Dada la problemática, este trabajo se fundamenta en un enfoque cualitativo, ya que el método para recolectar la información es no estandarizado y emerge de la necesidad de "comprender fenómenos didácticos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en su ambiente natural y en relación con el contexto" (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018, p. 390), desde un paradigma sociocrítico, cuyo alcance de estudio es exploratorio - descriptivo.

Los sujetos de estudio son estudiantes de segundo medio, es decir, jóvenes de 14 y 16 años. Se consideran las producciones de los estudiantes, grabaciones de video en el momento de la implementación y bitácoras que permitan describir el contexto y ambiente, para el análisis didáctico (Rico, 1998). Los resultados se formulan a partir de lo propuesto por Gómez (2002) que considera el análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación.

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

El diseño de la propuesta considera cuatro momentos en los cuales el estudiante podrá construir significados relacionados a la función cuadrática, con base en el análisis de situaciones y reflexiones grupales guiadas por el docente, que permitan la identificación de situaciones que se pueden modelar a través de ella, trabajando en equipo, de manera flexible y creativa.

Las actividades diseñadas se fundamentan en los principios de la EMR, los cuales buscan promover la participación, el uso del sentido común y las experiencias previas, la reconstrucción del conocimiento a través de diversas estrategias, incorporando contenidos interrelacionados, contemplando la interacción entre los estudiantes y considerando sus distintos niveles de comprensión. Por otra parte, el trabajo con diversos registros de representación se configura como un componente esencial para alcanzar una aprehensión significativa del concepto, entendiendo que cada forma de representación debiera poder mostrar aspectos relevantes del objeto.

En el primer momento, correspondiente al nivel situacional, se considera una actividad de inicio en la cual se presenta a los estudiantes un video sobre el lanzamiento de una pelota de papel a un papelero, desde tres alturas diferentes. Ellos deberán replicar la actividad, para lo cual se le entregará a cada grupo una pelota de papel y una cesta (ver Figura 1). A partir de distintas repeticiones del proceso, deberán describir la forma del recorrido que realiza la pelota, definiendo posibles variables involucradas en la situación.

Figura 1.

Lanzamiento de bola de papel.

El docente recoge las respuestas de cada grupo y luego, a partir de una serie de preguntas, busca que los estudiantes establezcan la relación entre la situación trabajada, sus respuestas y el concepto de función. Aquí se realiza la conexión con los contenidos previos de funciones, trabajados en años anteriores (función lineal y afín), a través de preguntas realizadas por el docente, por ejemplo: ¿qué características tiene una función?, ¿en qué se parece una función a nuestra situación del lanzamiento de la pelota?

En el segundo momento, se presenta a los estudiantes un nuevo video, que también corresponde al tipo de lanzamiento realizado anteriormente. El docente comenta que el lanzador quiso calcular la altura máxima de la pelota durante su lanzamiento, estimando su altura en distintos tiempos del lanzamiento (ver Figura 2). Estos datos se entregan a los grupos, quienes deberán contestar una nueva ronda de preguntas.

Figura 2.

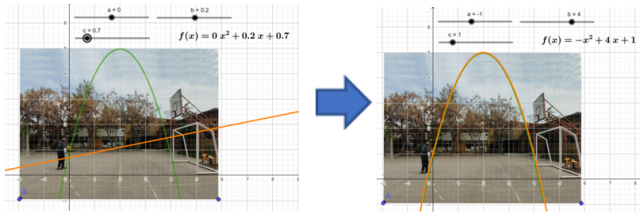
Lanzamiento de una pelota de básquetbol y registro de datos asociados.

Tiempo (en segundos)	Altura (en metros)
0	1
1	4
2	5
3	4
4	1

La pregunta principal para este momento, considerando el nivel referencial, es: ¿cuál será la expresión general que modele, aproximadamente, la altura en función del tiempo, según los datos entregados? Para responder, los estudiantes utilizarán un applet desarrollado en Geogebra, moviendo los deslizadores a, b y c hasta que la gráfica en naranjo coincida con la que se muestra en la imagen, en color verde (ver Figura 3).

Figura 3.

Imagen de Applet en Geogebra.

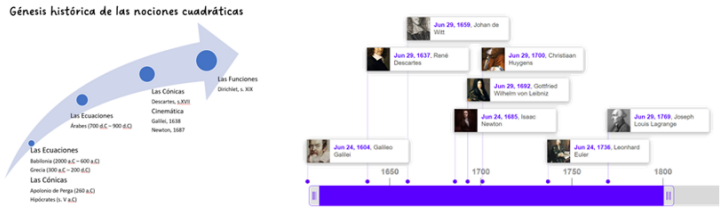


Una vez encontrado el modelo, los estudiantes deberán analizar las características de la función, comprobando si se cumplen los valores dados en la tabla y respondiendo preguntas que propicien la reflexión y generalización de lo observado (nivel general). Se comparan las respuestas, destacando la aparición de un término cuadrático, lo que se utilizará para generar una plenari, en la cual se propongan ejemplos donde se identifiquen expresiones cuadráticas. Esto permitirá establecer relaciones con otras áreas de la matemática y plantear la necesidad de comprender el origen de lo cuadrático como noción.

Lo anterior da origen al tercer momento que corresponde a la presentación de las nociones cuadráticas, mostrando un recorrido histórico hasta culminar en el concepto de función cuadrática. Se presenta a los estudiantes una línea de tiempo en la cual el docente muestra la historia de las nociones cuadráticas y su evolución a través del tiempo. Luego, los estudiantes ingresan a un link en el cual pueden observar con mayor detalle el aporte de diferentes matemáticos y físicos en este proceso (ver Figura 4).

Figura 4.

Líneas de tiempo para la presentación histórica de las nociones cuadráticas.



En el cuarto momento, se pide a los estudiantes que den ejemplos de funciones cuadráticas expresadas en su forma algebraica y, con base en los elementos comunes de los ejemplos propuestos, el docente establece el concepto de función cuadrática, considerando el nivel formal: de forma verbal con las propuestas de los estudiantes, de forma algebraica con lo observado en el applet y de forma gráfica con lo observado en el lanzamiento de la pelota y luego en el applet. El cierre de la clase considera la aplicación de un instrumento de evaluación para determinar el logro del objetivo, en el cual los estudiantes deberán identificar situaciones y relaciones que se podrían modelar a través de las funciones cuadráticas, así como escribir una breve explicación respecto a los aprendizajes que ellos creen haber alcanzado durante la clase con relación al objeto trabajado.

REFLEXIONES FINALES

Considerando las dificultades evidenciadas en el aula en el proceso de enseñanza de las funciones cuadráticas, se debe considerar el abordaje de los contenidos considerando los cuatro registros de representación semiótica (lenguaje natural, numérico, gráfico y algebraico) con la misma importancia que se aborda su evolución histórica-epistemológica. Además, consideramos fundamental el diseño de propuestas basadas en contextos cercanos al estudiante, de manera que le permita dotar de significado al objeto trabajado. Así, la idea principal que subyace a esta propuesta de enseñanza es que su diseño tenga sentido para el estudiante y le permita construir aprendizajes significativos en relación con las funciones cuadráticas.

REFERENCIAS

Artigue, M., Douady, R., y Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica para educación matemática.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Universidad del Valle.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Dede, Y., y Soybas, D. (2011). Preservice Mathematics Teachers? Experiences about Function and Equation Concepts. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 7*(2), 89-102.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(2), 94-116.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education—China lectures*.Kluwer Academic Publishers.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-292.

Gómez, P., y Carulla, C. (1999). *La enseñanza de la función cuadrática en las matemáticas escolares del distrito capital.* Universidad de los Andes.

Hernández-Sampieri, R., y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta.* Editorial Mc Graw Hill Education.

Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, A., Naccarella, D., Leuders, T., y Wirtz, M. (2015). Students' competencies in working with functions in secondary mathematics education? Empirical examination of a competence structure model. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(3), 657-682.

Mesa, Y. (2008). *El concepto de función cuadrática: un análisis de su desarrollo histórico* [Tesis de Pregrado, Universidad de Antioquía, Colombia].

Mesa, Y., y Villa, J. (2008). *Reflexión histórica, epistemológica y didáctica del concepto de función cuadrática.* Universidad de Antioquía.

Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y., y Castro, W. F. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 11*(23), 201-220.

Rico, L. (1998). Complejidad del Currículo de Matemáticas Como Herramienta Profesional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 22-39.

MODELAMIENTO DE ECUACIONES LINEALES A TRAVÉS DE UNA BALANZA ONLINE

María José Fajardo, Gabriel Meza, Camila Muñoz, Krisnna Palma

Universidad Católica Silva Henríquez

mjfajardo@miucsh.cl, gmeza@ucsh.cl, csmunoz@miucsh.cl, kpalmam@miucsh.cl

En el siguiente artículo se presenta una propuesta de actividad grupal para el nivel de octavo básico, la cual está relacionada al modelamiento de situaciones (de la vida diaria) usando ecuaciones lineales. Para dar una contextualización, primero se hablará de las dificultades tanto del eje algebraico como del objetivo en específico y luego se presentará con mayor detalle nuestra propuesta y justificación.

Álgebra, modelamiento, Ecuaciones lineales, Lenguaje algebraico, Problemáticas.

INTRODUCCIÓN

La siguiente es una propuesta de actividad relacionada al eje de álgebra, para ello se utilizará como objeto matemático las ecuaciones lineales, trabajando específicamente con el Objetivo de Aprendizaje 08 de 8° básico de la Unidad 2 (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2016, p. 52), el cual señala:

> Modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas, usando ecuaciones lineales de la forma: $ax = b$; $x/a = b$, $a \neq 0$; $ax + b = c$; $x/a + b = c$; $ax = b + cx$; $a(x + b) = c$; $ax + b = cx + d$ ($a, b, c, d, e \in Q$).

Entre las investigaciones existentes de la enseñanza del álgebra podemos encontrar diversas problemáticas que presentan los y las estudiantes a la hora de modelar las ecuaciones lineales, las cuales podemos dividir en generales del álgebra específicas del modelamiento.

Wagner y Parken (1999, como se citó en Castro, 2012) plantean que las dificultades relacionadas al área de álgebra a su vez se vuelven a subdividir entre "aquellas que son intrínsecas al objeto, otras que son inherentes al propio sujeto y aquellas otras que son consecuencia, involuntaria quizás, de las técnicas de enseñanza" (p.76). En las intrínsecas al objeto (al álgebra, Wagner y Parken, 1999) encontramos el lenguaje, los elementos que lo componen y las reglas que lo rigen. En las inherentes al propio sujeto, estas se deben a la complejidad de entender la abstracción y generalización que brinda el álgebra. Y la enseñanza se ve afectada por diversos motivos ya sean cognitivos, psicológicos, sociales o pedagógicos.

Siguiendo con las problemáticas de las técnicas de enseñanza, Fabra y Deulofeo (2000, como se citó en Del Valle, 2013) nos dicen que no se abordan secuencias didácticas que se expongan de manera evolutivas lo que, en consecuencia, genera que el proceso de enseñanza – aprendizaje no sea completamente efectivo ni significativo en los y las estudiantes, por lo que es necesario que los docentes vayan en la búsqueda de una metodología en donde sí se puedan implementar estas secuencias.

Por otra parte, Chavarría (2014) considera que en el álgebra una de las dificultades es la falta de comprensión de contenidos que debieron aprender en séptimo básico o en cursos anteriores, y la interrelación de estos, lo cual genera un vacío conceptual que les dificulta el resolver problemas que

involucren ecuaciones lineales. A su vez, al modelar usando ecuaciones lineales, un factor que genera problemas es la falta de comprensión lectora, pues al hacer la conversión desde un registro verbal a un lenguaje algebraico se presentan errores de interpretación. Un claro ejemplo de esto es el que plantea Chavarría (2014, p. 30):

> La docente pone dos frases para ser traducidas: "un número disminuido en dos" y "un número disminuido de tres". A pesar de la diferencia entre ambas expresiones, solo un estudiante se percató de que los significados eran diferentes; sin embargo, indica no saber en qué radica tal diferencia. El resto del grupo opta por contestar x – 2 y x – 3 respectivamente.

Esto pone en evidencia que, si los estudiantes no comprenden la lectura, fallan al modelar la situación, por lo tanto, también obtendrán un resultado incorrecto, el cual no se debe a algún error matemático.

PROPUESTA DE ACTIVIDAD

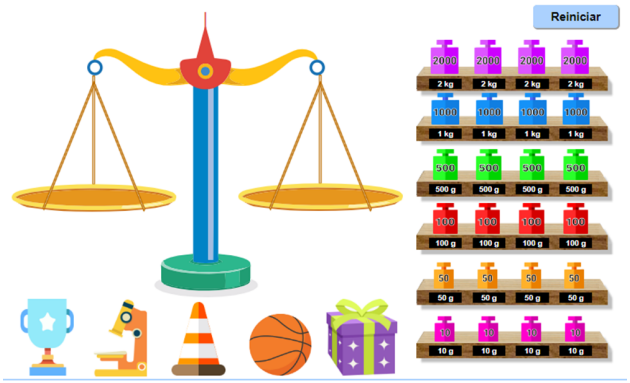
La actividad propuesta consiste en la implementación de un juego, donde se dividirá al curso en equipos de 5 personas, a los cuales se les presentarán diferentes objetos ocultos, cada uno con peso predeterminado. Se jugarán 5 rondas en total y en cada una existirán objetos distintos. Con los elementos que se les presenten a los estudiantes, ellos deberán generar una igualdad (determinar un modelo (una ecuación lineal) y del primer grupo que levante la mano se escogerá un representante al azar que pasará adelante (si el estudiante ya fue escogido anteriormente se elegirá a otro).

Cuando el estudiante escogido pase adelante deberá plasmar el modelo ya creado en una balanza para así visualizar y comprobar el resultado. Para llevar a cabo esto, se realizará un debate entre todos los participantes, de modo que entiendan si está correcto o no el modelo presentado.

La balanza que utilizaremos se encuentra en el sitio web "*Educaplus*" (ver Figura 1), la cual tiene diferentes opciones de peso, para poder representar los objetos ocultos que se presentan en cada ronda, por lo tanto, esta deberá ser proyectada en la pizarra. Por cada igualdad correcta que generen se les otorgará dos puntos, de lo contrario se les descontará uno y otro grupo tendrá la posibilidad de salir adelante a mostrar su modelo. De este modo el equipo que obtenga mayor puntaje será el ganador.

Figura 1.

Ejemplo de balanza online.



Fuente: Sitio web "*Educaplus*".

Un ejemplo (ver Tabla 1) que utilizaríamos en una ronda es: Con los siguientes datos realice un modelamiento haciendo uso de mínimo dos variables.

Tabla 1.

Datos del ejemplo.

Objeto	Peso (gramos):
Estuche (E)	200
Plumón (Pl)	50
Pegamento (Pe)	250
Goma (G)	100

Los modelos posibles son:

1) $E + Pl = Pe$
2) $E + G = Pl + Pe$
3) $2G + Pl = P$

Estos los podemos definir como modelamientos ya que hacen una representación de los objetos a través de equivalencias. Como podemos observar, en el punto 1 nos indica que el peso del estuche (E) sumado al peso del plumón (Pl) da un resultado igual al peso del pegamento (Pe), y esto, representado en números nos queda: 200+50=250, por lo que este modelo estaría correcto ya que 200+50 si es equivalente a 250; para el punto 2 y 3 se utiliza el mismo procedimiento. La situación presentada no constituye un proceso de modelamiento y las expresiones 1), 2) y 3) no representan ecuaciones, sino que representan igualdades escritas con representaciones literales en lugar de numéricas. Una ecuación es un problema cuyo objetivo es encontrar el valor de una incógnita que resuelva la ecuación, es decir, un valor que la satisfaga o convierta en una igualdad. Las expresiones citadas en efecto ocultan su veracidad por la forma que están escritas, no porque haya que determinar ciertos valores que la satisfagan.

Es importante señalar que estos no son los únicos modelos posibles, si no que existen muchos más, por lo tanto, obtendremos una diversidad de resultados dentro del aula.

Objetivo y justificación de la actividad

Dentro de la enseñanza del álgebra, el modelamiento es considerado como una herramienta didáctica, la cual permite poder realizar representaciones pertinentes de un objeto matemático. Sumado a esto, Suárez (2008, como se citó en Del Valle, 2013) nos dice que estas herramientas son primordiales para la construcción de conocimientos. Es por esto que el objetivo de la actividad es generar una situación que permita a los y las estudiantes formular un modelo, con sentido y significado pertinente que se logre traducir en un proceso de aprendizaje funcional.

Una de las problemáticas que se mencionan anteriormente es el hecho que los estudiantes tienen dificultades a la hora de realizar traducción de enunciados verbales a lenguaje algebraico y viceversa,

debido a que no entienden los significados de las letras. Esto produce una interpretación errónea. El hecho de realizar un juego en el aula permite usar una metodología que ayuda a disminuir esta problemática, debido a que le dan un significado a través de los objetos que pondrán en la balanza según el modelamiento que presenten ayudándolos a darles un sentido. Además, el hecho de que las y los alumnos tengan que realizar la representación del modelo en la balanza permite que estos lo consideren como un argumento gráfico válido para responder el porqué de su toma de decisiones, asignación de significados y procedimientos.

Por otro lado, la razón de escoger una plataforma digital para llevar a cabo esta actividad es debido a que como plantea Delgado et al. (2015), el uso de TIC´s en la educación trae consigo varios beneficios para optimizar el aprendizaje ya que genera un ambiente educativo motivador y retador para la adquisición de conocimientos, y también genera un papel protagónico en los estudiantes que hace su aprendizaje activo y consciente.

La metodología a ocupar es bastante certera al momento de llamar la atención de un estudiante, ya que el juego al ser una fuente cercana a ellos le resulta más agradable y familiar al momento de aprender, además, Castro (2012) da firmeza que al ocupar una fuente como es el juego crea un efecto positivo en el aprendizaje del estudiante.

REFLEXIONES FINALES

Esta actividad de modelamiento de ecuaciones lineales es una propuesta elegida para poder abordar un objetivo de aprendizaje el cual presenta diferentes problemáticas en la habilidad, ya que al utilizar una balanza permitirá darles sentido a los elementos y poder argumentar a través del recurso visual el porqué de su lógica y toma de decisiones, también ayuda a un mejor entendimiento del eje algebraico, desarrollar su pensamiento lógico, además al ser un juego resulta ser más cercano para las y los estudiantes.

Finalmente, es importante que los docentes estén en la búsqueda de estas metodologías e incorporarlas en el aula, ya que esto además de ayudarlos a desarrollar esta habilidad, a través del juego, el trabajo colaborativo y el debate entre pares, las y los estudiantes muestran mucho más interés en participar generando ambientes de trabajo mucho más ameno.

REFERENCIAS

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). SEIEM

Chavarría, G. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Uniciencia*, *28*(2), 15-44.

Del Valle, T. (2013). *La modelización de la función afín: una mirada socioepistemológica.* En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1151-1159). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Delgado, M., Arrieta, X., y Riveros, V. (2015). Uso de las TIC en educación, una propuesta para su optimización. *Omnia, 15*(3), 58-77.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2016). *Programa de Estudio 8° Básico Matemática*. Autor.

EL ESTUDIO DE LA FUNCIÓN LINEAL EN AMBIENTE DE INTERACCIÓN CON ESTUDIANTES DE ENSEÑANZA BÁSICA

Leonardo Agurto, Francisca Albornoz, Daniel Moreno

Universidad Católica Silva Henríquez

lagurto@miucsh.cl, falbornozb@miucsh.cl, dmorenoh@miucsh.cl

La presente propuesta de aula tiene por objetivo poner a prueba una secuencia didáctica que permita explicar la noción de función en estudiantes de octavo básico. Para lograr el objetivo planteado, la propuesta consta de dos módulos a realizar con los estudiantes, uno teórico y otro práctico, donde se espera que los estudiantes puedan comprender, analizar y graficar el comportamiento de una función mediante un cambio lineal.

Noción de función, Enseñanza básica, Función lineal, Aprendizaje colaborativo, Representar.

INTRODUCCIÓN

El propósito de esta propuesta de aula es elaborar y poner a prueba una secuencia de actividades que permita explicar la noción de función mediante cambios lineales de variables en estudiantes de octavo básico, la cual responde al objetivo de aprendizaje propuesto en el programa de estudios de octavo básico de matemática (MINEDUC, 2016):

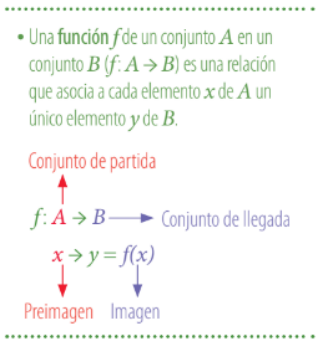
> Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representándolas de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo (p. 100).

La enseñanza y el estudio de la noción de función, junto a su manejo conceptual, se ha convertido en una de las principales dificultades para los estudiantes de octavo año básico, esto se debe a que "en la práctica de los profesores, en los textos escolares y en el currículum de matemática, no existe el empleo de diversas representaciones y sus transformaciones para la enseñanza de la noción de función" (López, 2018, p. 65). Además, dicho autor afirma que el método en el cual se presenta la noción de función no aporta para que los estudiantes puedan construir un aprendizaje adecuado en relación con esta, debido a que se plantean situaciones "en contextos" que no son cercanos a el de los estudiantes y en consecuencia dificulta la comprensión del concepto como tal.

A su vez, como mencionan Cardozo y Espinel (2018), "los maestros centran su interés en mostrar el aspecto algebraico del concepto dejando de lado en muchas ocasiones un análisis profundo y detallado sobre los elementos propios que permitan consolidar un concepto con suficiente significado para ser aprendido convenientemente". Esto se complementa con que los textos de estudio entregados por el Ministerio de Educación dan una escasa definición de la noción de función, además están centrados en la resolución de problemas algebraicos, como se presenta a continuación en la Figura 1.

Figura 1.

Definición de función en el libro de texto de octavo básico.



Fuente: Torres y Caroca (2019, p. 91).

EXPERIENCIA DE APRENDIZAJE

Esta propuesta, en primera instancia, el docente deberá definir el concepto de función matemática y representarlo como veremos a continuación en la Figura 2. Dado que la definición que podemos encontrar en la Figura 1, puede causar confusión a la hora de entender el concepto de relación, ya que no toda relación es una función, pero si toda función es una relación. Enseguida, el docente procederá a introducir la definición de función, por medio de dos ejemplos, en el primero, modela una situación cotidiana a través del uso de una analogía de los celulares y sus correspondientes números de teléfono, por otro lado, en el segundo ejemplo, modela una situación cotidiana para los estudiantes donde no sea una función, explicando la compra de un uniforme escolar, donde algunos estudiantes compran el uniforme a un mismo precio, pero en diferentes tallas. Luego, una vez de ejemplificada la noción de función se procede a presentar la siguiente definición matemática: Esta investigación es de carácter cualitativo y será potenciado con un estudio de caso, en donde se pretende analizar en detalle las respuestas de una estudiante de cuarto año de psicología con T.E.A tardío leve.

Figura 2.

Definición de función en el texto "Álgebra".

Dada una relación F : A → B, esta relación es función si y sólo si **cada** elemento de A tiene imagen **única** en B.

$$(F : A \to B \text{ función}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Dom } F = A \\ (F(x) = y \ \wedge F(x) = z \Rightarrow y = z) \end{array} \right)$$

En un gráfico sagital, una relación es función si de **todos** los elementos del primer conjunto sale **una sola** flecha.

Fuente: Carreño y Cruz (2019, p. 151).

Una vez presentada la definición matemática, se procede a explicar a los estudiantes que a través de diagramas sagitales es posible visualizar cuando una relación es función o no, tal como lo muestra la Figura 3. Es así, y tal mencionan Canela y Ruiz (2019), como el uso de representaciones pictóricas ayuda a la hora de resolver diversos problemas de carácter cognoscitivo, los cuales nos sirven para observar, reconocer, trabajar e inferir diversas propiedades y razonamientos matemáticos que a simple vista son complejos para los alumnos.

Figura 3.

Diagrama de Sagital de la definición de función del texto de "Álgebra".

Fuente: Carreño y Cruz (2019, p. 152).

De igual forma, a modo de aclarar y practicar con el concepto de función, se realizará una actividad en conjunto a los estudiantes, donde ellos mismos serán partícipes activos a la hora de graficar las funciones. La actividad propuesta consistirá en dos bloques de 90 minutos en total, en el primer bloque:

- El docente:
    - Da la definición matemática de función.
    - Explica de forma simbólica el método de resolución de funciones lineales con cambio de variables, presentándoles un ejemplo escrito.
    - Desarrolla en la pizarra el ejemplo utilizando diversos valores para las variables independientes, representándolo en una tabla.
    - Finalmente, les presenta el cómo deben graficar los valores dados y obtenidos en el plano cartesiano.
- Los estudiantes:
    - Prestan atención.
    - Resuelven los ejemplos.
    - Preguntan dudas.

En el segundo bloque (actividad), los materiales que se utilizarán para realizar la actividad serán los siguientes: dos cajas mágicas, las cuales consisten en cajas que tendrán dentro diferentes papeles, en una tendrán funciones y en la otra los valores el cual deben graficar, una pizarra pequeña por grupo, plumones, la cancha del establecimiento y tiza o huincha para generar una cuadrícula en la cancha. En particular, en este bloque:

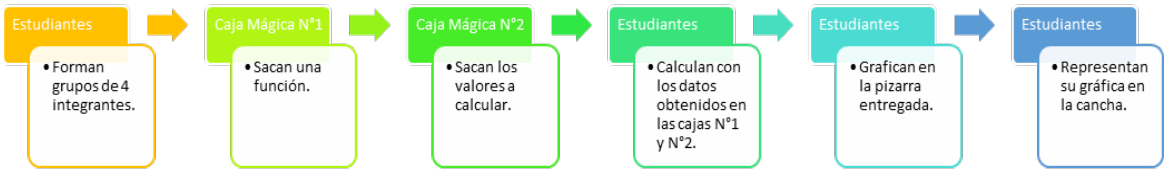
- El docente:
    - Da las instrucciones del juego.
    - Entrega el material (Pizarra pequeña y plumones).
    - Entrega el material (Cajas mágicas N°1 y N°2)

- Resuelve dudas y apoya a los grupos.

- Los estudiantes:
  - Deberán formar grupos de 4 integrantes.
  - Sacan de la caja N°1 una función lineal.
  - Sacan de la caja N°2 un papel con cuatro diferentes valores pertenecientes al dominio de la función.
  - Calculan los valores de las variables dependientes de la función.
  - Grafican en la pizarra entregada.
  - Representan la gráfica en la cancha con sus compañeros (ver Figura 4).

Figura 4.

Ejecución de propuesta de aula.



Fuente: Elaboración de autores.

Una vez los estudiantes realicen los respectivos cálculos de los valores dependientes de la función, deberán graficar la función en la pizarra pequeña con los plumones que se les entregarán a cada grupo junto a los valores obtenidos mediante los cálculos realizados (ver Figura 5).

Figura 5.

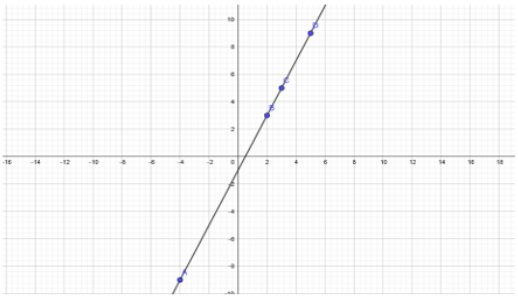
Ejemplo de actividad.

Función: $f(x) = 2x - 1$ **Valores:** $2 - 3 - 5 - (-4)$

Cálculos:

- $f(-4) = 2 \cdot (-4) - 1$
  $f(-4) = -8 - 1$
  $f(-4) = -9$
- $f(2) = 2 \cdot 2 - 1$
  $f(2) = 4 - 1$
  $f(2) = 3$
- $f(3) = 2 \cdot 3 - 1$
  $f(3) = 6 - 1$
  $f(3) = 5$
- $f(5) = 2 \cdot 5 - 1$
  $f(5) = 10 - 1$
  $f(5) = 9$

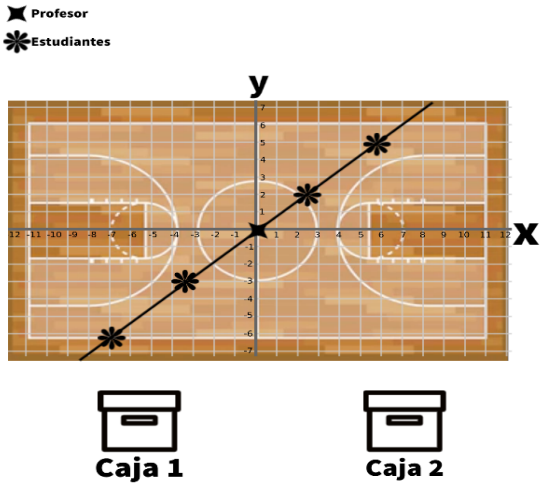
x	$f(x)$
-4	-9
2	3
3	5
5	9



Finalmente, cuando todos los grupos ya hayan obtenido sus resultados correspondientes, procederán a graficar en la cancha del establecimiento, la cual estará dispuesta como un plano cartesiano con el profesor siendo el punto de referencia correspondiente a la coordenada (0,0). Cada grupo solicitará la ayuda de otro grupo para representar las coordenadas obtenidas en el plano cartesiano creado en la cancha, una vez realicen dicha representación, deberán explicar a la clase el cómo obtuvieron dichas coordenadas a modo de retroalimentación de los contenidos vistos en clases (ver Figura 6).

Figura 6.

Esquema de la propuesta de aula del segundo bloque.



Fuente: Elaboración de autores.

REFLEXIONES FINALES

Finalmente, a modo de síntesis, podemos decir que la experiencia de aula busca un método que logre motivar a los estudiantes y para esto se utilizan recursos didácticos para que éstos interioricen de una

manera más eficaz el conocimiento logrando un aprendizaje óptimo, es decir, se busca que los estudiantes relacionen la noción de función con la vida cotidiana y así conseguir un mayor interés por la interacción que estos realizan con el entorno y con sus compañeros de clase, debido que los estudiantes son capaces de potenciar su pensamiento criticó gracias a la interacción con sus pares, ya que esta interacción se centra en el debate y toma de decisión correspondiente al ejercicio propuesto; de igual manera, este método intenta resolver las problemáticas que presentan los estudiantes al momento de generar un aprendizaje adecuado.

REFERENCIAS

Canela, L., y Ruiz, F. (2019). Aspectos generales del conocimiento simbólico y diagramático: El caso de los diagramas de Venn. *Andamios, 16*(41), 63-85.

Cardozo, H., y Espinel, L. (2018). *Construcción del concepto de función lineal a partir del razonamiento covariacional en estudiantes de grado noveno* [Tesis de Magíster, Pontificia Universidad Javeriana, Colombia].

Carreño, X., y Cruz, X. (2013). *Álgebra.* MC Graw Hill.

López, O. (2018). *La noción de funciones: Su enseñanza-aprendizaje realizando transformaciones de registros de representaciones con el apoyo de GeoGebra* [Tesis de Magíster, Universidad de Concepción, Chile].

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2016). *Programa de estudios Octavo básico Matemática.* Autor. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18983_programa.pdf

Torres, C., y Caroca, M., (2019). *Texto del estudiante: Matemática Octavo Básico.* Santillana.

SÉ CÓMO SE HACE, PERO NO POR QUÉ. LAS DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS PROPORCIONES

Benjamín Díaz Pacheco, Valentín Vergara López

Universidad Católica Raúl Silva Henríquez

bpachecod@miucsh.cl, vvergaral@miucsh.cl

El propósito del presente escrito es indagar en las posibles dificultades que se pueden presentar en el aula, al momento tanto de enseñar como de aprender las proporcionalidades directa e inversa. Una vez comprendidas estas complejidades, se sugerirá una actividad que tendrá una particularidad, la cual será que uno de los estudiantes del curso presentará discapacidad visual, por lo que el proceso de enseñanza que ejercerá el docente a sus estudiantes se complejizará aún más, debido a que las problemáticas ahora no solo serán relacionadas a la materia como tal, sino que el contexto del aula será más complicado de lo normal para ejecutar la clase. Lo que buscará la actividad es sobreponerse a todas las dificultades que puedan presentarse, todo con base en las soluciones que plantean varios autores, con el objetivo principal de enseñar de manera adecuada todo lo que corresponde a proporcionalidad.

Proporcionalidad directa, Proporcionalidad inversa, Dificultades, Discapacidad visual.

INTRODUCCIÓN

La proporcionalidad es un concepto clave en el área de las matemáticas, que se relaciona a los niveles de séptimo y de octavo básico (debido a su enseñanza), pero lo cierto es que se aplica en una infinidad de situaciones, por lo tanto, es pertinente recalcar que no se debe encasillar en un curso en particular, sino que se debe considerar como una "base" para futuros aprendizajes. Cabe señalar que su importancia no solo radica en ejercicios matemáticos específicos, ya que también se presenta en situaciones cotidianas como compras, presupuestos, planificaciones, entre muchas otras, por lo que el adquirir este conocimiento se torna de vital importancia en el día a día.

Las proporciones son definidas por el Ministerio De Educación de Chile [MINEDUC] (2015) como una relación entre diferentes magnitudes que se van a medir. Dentro de este tópico se evidencian dos divisiones, la proporcionalidad directa y la inversa, las cuales se pueden diferenciar una vez se está inmerso en el desarrollo de cada una de estas.

En este texto se identificarán las dificultades relacionadas a la enseñanza y el aprendizaje del objeto matemático de la proporcionalidad, tanto directa como inversa, la cual se trabaja inicialmente en el OA 08 de séptimo básico, el cual dice: "Demostrar que comprenden las proporciones directas e inversas: realizando tablas de valores para relaciones proporcionales, graficando los valores de la tabla, explicando las características de la gráfica y resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas" (MINEDUC, 2015, p. 55).

Una vez se hayan explicitado las dificultades tanto de docentes como de alumnos, se presentará la actividad del presente escrito, la cual será de tipo inclusiva (principalmente para alumnos con déficit visual). Esta tiene como finalidad esclarecer tanto las dificultades que existen en el proceso de

enseñanza y aprendizaje, pero con una dificultad extra, la cual complejizará más aún el trabajo del docente.

DESARROLLO DE LA PROPUESTA

Diversos autores relacionados a la enseñanza de las proporciones han afirmado que existen diversas dificultades al momento de desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje de este contenido en el aula. A continuación, se harán reseñas de cada una de estas complejidades, explicitando las posturas de los autores en cuestión (con sus respectivas citas), con el objetivo principal de comprender las dificultades y las soluciones pertinentes para cada una de estas.

Respecto a las dificultades en la enseñanza de las proporciones, existen situaciones en las que el profesor puede no estar capacitado para enseñar algún contenido particular; según Balderas et al. (2014), los docentes en estos casos pueden presentan deficiencias diversas, como argumentación imprecisa, incompleta, y/o implícita, junto con una dificultad en el desarrollo de argumentos, que se resume en la frase: "sé cómo se hace, pero no por qué". Este sentimiento tiene directa relación con las proporciones, ya que según Corral (1986), el estudiante no quiere salir de su zona de confort por miedo a equivocarse, es por esto que el autor creó un experimento para demostrar que los alumnos (en su mayoría) trabajaban las proporciones sólo desde la perspectiva de la resolución de la tarea para aprobar, pero no eran capaces de explicar lo que estaban haciendo, lo cual al igual que en las dificultades de la enseñanza, se relaciona a la frase célebre de este texto, "sé cómo se hace, pero no por qué". Si extrapolamos lo postulado por los autores a la proporcionalidad, se evidencian casos como la simple explicación de fórmulas sin una pertinente explicación de lo que se está haciendo, ni el porqué de aquello.

Otra dificultad a la que se puede enfrentar el docente es que algún alumno posea capacidades diferentes, ya sea de tipo cognitiva, visual y/o auditiva. En este tipo de casos el docente puede no saber cómo actuar, debido a que estas situaciones se escapan de la cotidianidad y no existe la ayuda de un profesional que los oriente apropiadamente para solucionar estas situaciones complejas.

Las otras dificultades que se presentan, son las que corresponden al aprendizaje de las proporciones. Para entender el contexto general, es pertinente indagar en las conductas de los estudiantes, junto con las posibles dificultades que pueden presentar en sus instituciones académicas. Para esto se cita a Pulido (2015), quien resume que cada vez son más los factores que alteran el proceso de aprendizaje del alumno, y la mayoría de estos se relaciona al campo de las emociones, siendo el miedo uno de los más recurrentes.

ACTIVIDAD

La actividad del presente escrito tendrá un contexto particular, y es que no solo existirán dificultades de tipo cognitivas, ya que habrá un alumno que posee discapacidad visual, por lo que el docente deberá planificar una actividad innovadora, sencilla, y por sobre todo adaptable para este joven, para facilitarle su propio proceso de aprendizaje.

La actividad consta en que los alumnos puedan analizar gráficamente lo que explica la proporcionalidad, y es que si las variables x e y siguen una misma línea (aumentan o disminuyen juntas), se habla de proporcionalidad directa, mientras que si x e y no siguen esta línea (una aumenta y la otra disminuye), se hace referencia a lo inversamente proporcional.

Diversos autores relacionados a la enseñanza de las proporciones han afirmado que existen diversas dificultades al momento de desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje de este contenido en el aula. A continuación, se harán reseñas de cada una de estas complejidades, explicitando las posturas de los autores en cuestión (con sus respectivas citas), con el objetivo principal de comprender las dificultades y las soluciones pertinentes para cada una de estas.

Pero como se explicitó anteriormente, uno de los alumnos no puede hacer un análisis gráfico de la misma manera que sus compañeros, debido a que no tiene desarrollado el sentido de la visión, por lo que esta actividad no solo será de tipo visual, debido a que también lo será de tipo manual, para que así cada joven pueda desarrollar su propio proceso de aprendizaje

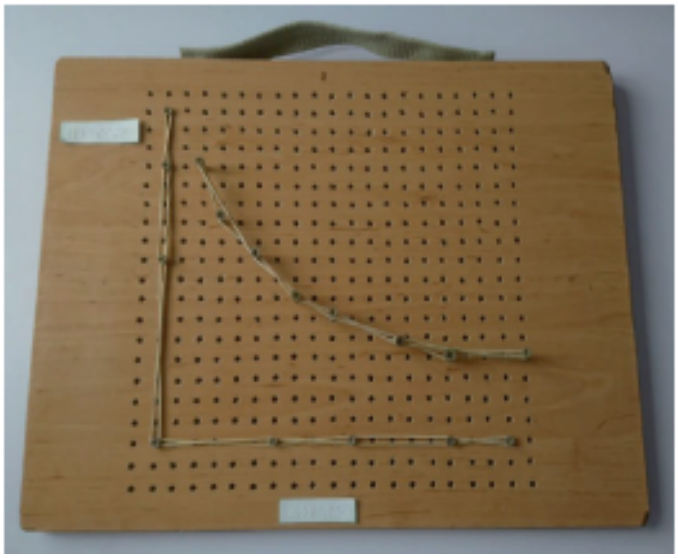
Mientras los alumnos desarrollan de manera normal la actividad (ver Figura 1), debido a que no presentan mayores complejidades visuales, el estudiante con visión reducida comprende (gracias a su capacidad del tacto y a la ayuda del docente) la situación en la que se encuentra, entendiendo que es un problema donde tiene que buscar mediante sus manos el eje de coordenadas y encontrar el lugar donde está situado dentro del plano presentado.

Recorre con su mano derecha hasta encontrar el eje de las abscisas y lo desplaza hacia arriba siguiendo el curso de los agujeros presentes en la tabla, después de esto sitúa un dedo de la mano izquierda y lo desplaza de manera paralela por el eje de las abscisas hasta encontrar el eje vertical. La distancia entre el origen y el punto creado le permite comparar pares ordenados (x, y) dentro de la gráfica, descubriendo que a cada valor asociado a x le corresponde un paralelo dentro de y.

Repitiendo el proceso reconoce que cuando aumenta el valor de la abscisa y también aumenta el de la ordenada, se hace referencia a la proporcionalidad directa, mientras que, si los valores se sitúan en los extremos de la gráfica, se estará en presencia de proporcionalidad inversa.

Figura 1.

Material de la actividad.



Esta actividad soluciona una serie de complejidades en el aula, debido a que es innovadora (escapa del modelo tradicional de hacer clases), es dinámica (potencia el tranajo en equipo), y aparte es inclusiva (pensada para que todos los alumnos de la sala puedan participar), por lo tanto si nos basamos en lo postulado por los autores citados en el desarrollo del presente escrito, usando esta actividad el proceso de enseñanza y de aprendizaje no debería presentar mayores inconvenientes.

Por lo demás, es una actividad que hace uso de un material gráfico, lo cual le permite a los jóvenes observar y resolver el contenido que se les está enseñando, lo cual es sumamente beneficioso al momento de desarrollar su propio proceso de aprendizaje, por lo que posterior a esta actividad podrán decir que: “saben lo que hacen, y saben el por qué”.

CONCLUSIÓN

Con base en los postulados anteriores, se concluye que tanto estudiantes como profesores deben trabajar en las dificultades que los aquejan, porque de lo contrario el proceso de enseñanza y aprendizaje se torna muy cuesta arriba. La frase “sé cómo se hace, pero no sé por qué” es una expresión clara del problema existente en el aula, tanto maestros como alumnos están cometiendo errores en el desarrollo de sus propios procesos, lo cual no favorece el resultado final.

Por otra parte, se debe tener en cuenta que no todos los problemas en este proceso dependen única y exclusivamente de parte de los alumnos dentro de la sala, sino que existe más de un factor externo que condiciona el aprendizaje y la enseñanza de los contenidos, una demostración explícita de lo anterior puede ser la falta de apoyo psicológico hacia los estudiantes, así como otra es la falta de profesionales capacitados que puedan minimizar la exclusión de jóvenes con capacidades diferentes en el espacio educativo.

REFERENCIAS

Balderas, R. G., Block, D., y Guerra, M. (2014). “Sé cómo se hace, pero no por qué”. Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestros de secundaria. *Educación Matemática, 26*(2), 7-32.

Corral, A. (1986). The difficulty of teaching proportional reasoning. *Journal for the Study of Education and Development, 9*(35-36), 47-58.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2015). *Matemática. Programa de estudio. Séptimo básico*. Autor.

Pulido, F. (2015). *Miedo, inteligencia emocional y rendimiento académico en el contexto educativo pluricultural de Ceuta* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada, España].

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON BASE EN LO COTIDIANO

Javiera Ureta, Vicente Elgueta y Estefano González

Universidad Católica Silva Henríquez

juretag@miucsh.cl,velgueta@miucsh.cl, eagonzalez@miucsh.cl

El propósito de la siguiente propuesta de aula es que el estudiante de primero medio sea capaz de relacionar los problemas de la vida cotidiana con el objeto matemático de ecuaciones lineales. Para lograr el objetivo se realizará una actividad en grupos de tres estudiantes, donde dos estudiantes serán compradores de un negocio y el estudiante restante cumplirá el rol de ser el dueño del negocio. Cada comprador adquirirá dos productos, en donde el dueño solamente entregará el vuelto. La idea de esta actividad es que los compradores modelen un sistema de ecuaciones y obtengan el precio de cada producto.

Álgebra, Sistema de ecuaciones lineales, Cotidianidad.

INTRODUCCIÓN

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales plantea un desafío en los estudiantes, esto debido a que en primer lugar deben elaborar dicho sistema para que, posteriormente, encuentren la solución.

Según el Programa de Estudio, el objetivo matemático plantea "Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2x2) relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual y/o software educativo" (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2016, 30).

Los problemas que reportan en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa del 2017, específicamente del capítulo cuatro, están relacionados con que la enseñanza del objeto matemático de los sistemas de ecuaciones lineales tiene una hegemonía por parte del docente, donde se utiliza una enseñanza basada en concepciones predominantemente tradicionales, donde el profesor es el que enseña, el que sabe y el estudiante el que aprende con una actitud pasiva. Por otro lado, en la enseñanza del objeto matemático de interés hay un predominio de la matemática con visión instrumentalista, es decir, como un conjunto de reglas y procedimientos, donde la enseñanza predominante es mediante la repetición y el uso de la memoria (Vega et al., 2017).

El hecho de que exista una relación en la cual el estudiante no es partícipe activo de su aprendizaje, lo lleva por un lado a tener una visión en la que el sistema de ecuaciones tiene una resolución meramente mecánica, y que por lo tanto no es vinculable con situaciones diarias, lo cual no permite a los estudiantes modelar sistemas de ecuaciones lineales en base a problemas cotidianos, tal y como lo mencionan Ramírez et al. (2006) al señalar que existe en los estudiantes la dificultad de lo sintético-analítico en los sistemas de ecuaciones lineales, es decir, que por lo general los docentes no comunican información alguna acerca de la realidad y no se basan en las experiencias.

DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

La propuesta tiene como primer momento dividir en grupos de tres personas a los estudiantes, buscando de esta manera poder subsanar la problemática planteada por el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa de 2017. De esta manera, conseguirá que los estudiantes trabajen en *pos* de

lograr un aprendizaje cooperativo y que al mismo tiempo sea significativo para ellos, obteniendo de esta forma que esta enseñanza sea sin una superioridad impuesta por el saber matemático del profesor.

En segunda instancia, se entregarán las instrucciones, en las cuales, dos de los estudiantes cumplirán el rol de comprador de un negocio, siendo este dirigido por el tercer alumno del grupo, para que a posterior cada estudiante comprador vaya al negocio a comprar dos artículos, los cuales el vendedor los atenderá de manera presencial, esto debido a que se busca remediar el hecho de que los estudiantes no vinculen los sistemas de ecuaciones a situaciones diarias, lo cual no permite a los estudiantes modelar dichos sistemas.

Después que los estudiantes estén distribuidos y con los productos comprados, el vendedor entregará el vuelto, dando de esta manera la necesidad de los consumidores, de que modelen el sistema de ecuaciones, además de encontrar el monto total a través de una ecuación sencilla a través de lo que paguen y el vuelto dado.

Finalmente, se modela el sistema de ecuaciones y se dará paso a la instancia de resolución, sin la necesidad de ocupar un método mecánico para esto, solucionando así el equívoco relacionado a que las matemáticas se ven como un conjunto de reglas y procedimientos, donde la enseñanza predominante es mediante la repetición y el uso de la memoria. Realizando esta experiencia de aula, se busca lograr que los estudiantes puedan observar la matemática de manera tangible y con una situación a la cual, en el año en el que están, se enfrentan de manera cotidiana.

Es importante recalcar que existe la posibilidad de que los estudiantes que sean vendedores no obtengan la misma cantidad de conocimientos acerca del objeto matemático como los compradores, por lo que se plantea que, al momento de terminar la actividad con ellos distribuidos de la manera inicial, exista un intercambio entre los roles otorgados, para que así se genere un aprendizaje que sea significativo.

RESULTADOS ESPERADOS

Como primer resultado esperado es la comprensión de que el modelamiento de sistemas de ecuaciones lineales es una actividad que realizan cada vez que deben ir a comprar, en donde no es necesario sentarse y utilizar una fórmula matemática para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Por otra parte, se espera que el enseñar el sistema de ecuaciones lineales no se vuelva algo repetitivo y de memoria, sino que sea algo más interactivo y que los alumnos sean partícipes y no pasivos al enseñar este objeto matemático.

REFLEXIONES FINALES

En primer lugar, se debe plantear que con esta actividad el estudiante toma un rol activo, refiriendo a que el resolutor del sistema de ecuaciones que se hace partícipe de forma directa en un entorno de aprendizaje, ya que él será quien tenga que realizar el modelo de sistema de ecuaciones y solucionarlo sin un método mecanizado, en contraposición a la enseñanza tradicional que se observa, en donde el profesor es el que enseña, el que sabe y el que está aprendiendo, y el estudiante toma un rol pasivo en su enseñanza, mediante la utilización de métodos como la repetición y la memorización de contenidos mecánicos.

En segundo lugar, se concluye que los profesores no comunican información alguna acerca de la realidad y no se basan en las experiencias como nos plantea (Vega at al., 2006). Esta problemática comparándola con la actividad propuesta, es que al ser basada en la vida cotidiana el estudiante puede adquirir un aprendizaje significativo ya que se vuelve una actividad dinámica e interactiva.

A modo de reflexión, es bueno implementar este tipo de actividades debido a que las clases más dinámicas y menos monótonas provocan una motivación en el alumno. La motivación es el motor de la conducta humana, por lo tanto, un alumno motivado obtendrá mejores resultados en sus actividades y proyectos vida, de esta manera se contará con el deseo de cumplir con sus objetivos para alcanzar el éxito académico y personal; también dependerá de la pedagogía del docente, es decir, como este lleve la clase y trate de llegar a los estudiantes (Llanga et al., 2019).

Figura 1.

Imagen de referencia de la actividad propuesta.

Fuente: Copyright © 2000-2022 Dreamstime.

REFERENCIAS

Ramírez, C., Oktaç, A., y García, C. (2006). *Dificultades que presentan los estudiantes en los modos geométrico y analítico de sistemas de ecuaciones lineales.* En G. Martínez (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 413-418). CLAME.

Vega, B., Zaldívar, J., y Londoño, N. (2017). *Una propuesta didáctica para la solución de un sistema de ecuaciones lineales a través de la visualización.* En L. Serna (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 709-718). CLAME.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2016). *Matemática. Programa de Estudio. Primero medio.* Autor. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34359_programa.pdf

Llanga, E., Murillo Pardo, J. J., Panchi Moreno, K. P., Paucar Paucar, M. M., y Quintanilla Orna, D. T. (2019). La motivación como factor en el aprendizaje. *Revista: Atlante. Cuadernos de Educación y Desarrollo.* https://www.eumed.net/rev/atlante/2019/06/motivacion-aprendizaje.html

MODELAMIENTO DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA A TRAVÉS DE LA EXPERIMENTACIÓN

Vicente Acuña, Sebastián Orellana, Diego Alfonso Contreras

Universidad Católica Silva Henríquez

vacuna@miusch.cl, sorellanaf@miucsh.cl, dcontreras@ucsh.cl

El presente escrito tiene por objetivo mostrar una propuesta de aula que permita el desarrollo de diversas habilidades matemáticas que promueve el curriculum escolar, a través de una secuencia didáctica de tres clases, donde estudiantes de 2º medio puedan modelar ecuaciones cuadráticas con la utilización del software educativo GeoGebra, mediante el lanzamiento de proyectil en una situación concreta, permitiendo a través de esta experiencia fuera de una clase tradicional, motivarlos en su proceso de enseñanza y aprendizaje y en el desarrollo de las habilidades de resolución de problemas, modelar, y, argumentar y comunicar.

Ecuación cuadrática, Modelar, Resolver problemas, Argumentar y comunicar, GeoGebra.

INTRODUCCIÓN

En educación matemática existen distintas problemáticas que implican dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje de diversos objetos matemáticos. Particularmente, como señala Gavilán (2011) en su estudio sobre las dificultades en la transición de la aritmética al álgebra, nos muestra los errores más frecuentes que presentan los estudiantes, los que se relacionan con: la naturaleza y el significado de los números y letras; la naturaleza de las respuestas en álgebra; la comprensión de la aritmética y el uso inapropiado de fórmulas y reglas de procedimientos.

El presente escrito se enmarca en la asignatura de Didáctica del Álgebra de una carrera de pedagogía de una universidad chilena, y consiste en la elaboración e implementación de una propuesta de aula cuyo objetivo es modelar ecuaciones cuadráticas a través de situaciones de la vida cotidiana, actividad propuesta para estudiantes de segundo medio donde se busca promover y desarrollar las habilidades de resolución de problemas, modelar y, argumentar y comunicar. Es así que con la implementación de esta experiencia se busca salir del modelo de una clase tradicional, donde el profesor presenta los contenidos y sus elementos de manera mecánica, presentando fórmulas para luego culminar con un sinfín de ejercicios que solamente implican la repetición y mecanización. Tal como mencionan Moreano et al. (2008), en el sentido de que los docentes mantienen una visión instrumental de la disciplina, es decir, consideran la matemática como un conjunto de reglas y procedimientos, la cual finalmente se encuentra estrechamente relacionada con la manera como se fomenta el aprendizaje en los estudiantes, a través de una enseñanza repetitiva y memorística, la práctica constante de ejercicios, el uso de palabras clave, entre otros.

PROPUESTA

La experiencia de aula se implementará en un curso de segundo medio de un establecimiento de la Región Metropolitana y se enmarca en el cumplimiento del objetivo de aprendizaje que dice "resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica, o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas" (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2016, p. 54). Para el desarrollo de la

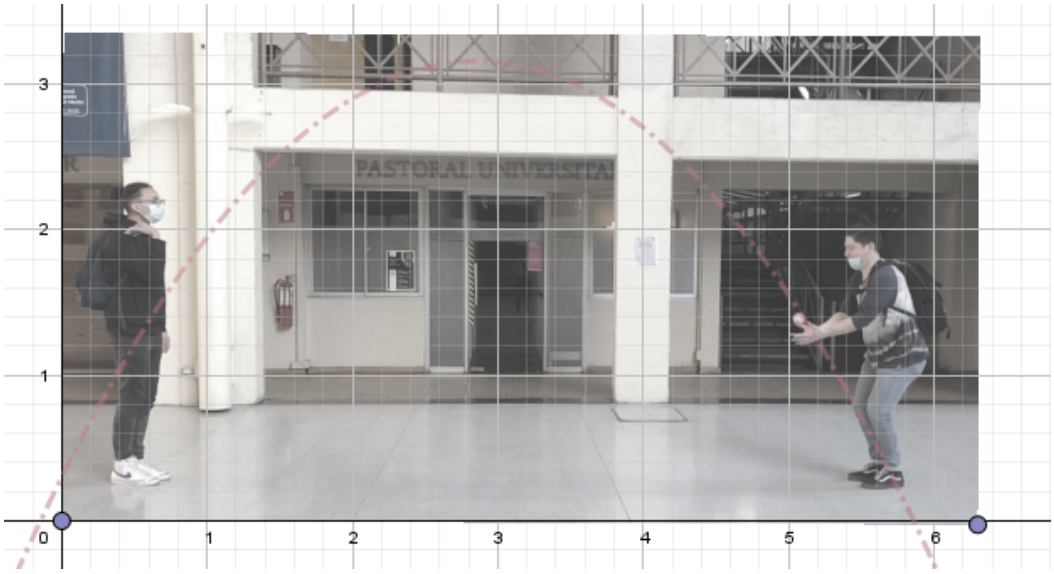
experiencia se propone su implementación en el transcurso de tres clases, donde se espera que los estudiantes logren interiorizar el conocimiento de la ecuación cuadrática a través de la experimentación y modelamiento en una situación concreta, potenciando su motivación, ya que como expone Calle-Chacón et al. (2020), es importante tener presente que el motor que impulsa la conducta humana es la motivación, un estudiante motivado, dará lo mejor de sí y permitirá explotar sus potencialidades.

Para comenzar la propuesta, en la primera clase se deberán activar los conocimientos previos necesarios y luego se darán siguientes instrucciones: en parejas deberán grabar un video en cámara lenta con el lanzamiento de un objeto de forma parabólica (lanzamiento de proyectil hacia arriba), para luego en la segunda clase, a través de la utilización del software GeoGebra puedan graficar y modelar de manera aproximada la ecuación asociada a ese lanzamiento. En esta primera clase también se buscará que realicen más lanzamientos con mayor altura para realizar la misma experimentación y puedan conjeturar que sucede con los parámetros de la ecuación cuadrática una vez ocurra esta situación.

En la segunda clase, los estudiantes se reúnen en grupos de cuatro integrantes para realizar la modelación en GeoGebra y realizar las conjeturas propuestas, analizando los parámetros y los posibles casos según sus propias experimentaciones. A continuación, en la Figura 1 se muestra un ejemplo de lo esperado a realizar.

Figura 1.

Ejemplo de la experimentación.



Tal como se muestra en la Figura 1, una vez que los estudiantes hayan realizado el paso del video a GeoGebra y dibujada la parábola asociada al lanzamiento, se espera que ellos puedan deducir la ecuación asociada realizando una aproximación de los puntos donde el gráfico interseca al eje X. Por ejemplo, en la Figura 1 se consideran los puntos 0 y 6 como intersección con el eje X y el punto (3,3)

como vértice de la parábola, donde luego de aplicar los procedimientos algebraicos correspondientes, la ecuación asociada a este lanzamiento sería $y = -\frac{x^2}{3} + 2x$.

Para finalizar la propuesta, en la última clase los estudiantes deberán exponer los resultados obtenidos de sus experimentaciones, señalando aspectos claves de la ecuación cuadrática, sus variables y parámetros. En esta instancia se espera que muestren cuál es la ecuación que modela la situación en base a sus conjeturas, mostrando una correcta argumentación matemática y comunicación sus ideas.

CONCLUSIONES Y RESULTADOS ESPERADOS

Finalmente, a través de esta propuesta de aula se espera que los estudiantes entiendan del proceso de modelamiento de la ecuación cuadrática a través de una situación concreta y motivadora, donde mediante la experimentación y posterior modelamiento en GeoGebra puedan poner de manifiesto las habilidades matemáticas que propone el curriculum escolar. Es importante destacar que esta experiencia se encuentra actualmente en fase de implementación para luego realizar el análisis a partir de lo esperado y mostrado en este escrito.

REFERENCIAS

Gavilán, B., P. (2011). Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿puede ayudar el Aprendizaje Cooperativo? *Investigación en la Escuela*, (73), 95–108.

Calle-Chacón, L. P., García-Herrera, D. G., Ochoa-Encalada, S. C., y Erazo-Álvarez, J. C. (2020). La motivación en el aprendizaje de la matemática: Perspectiva de estudiantes de básica superior. *Revista Arbitrada Interdisciplinaria Koinonía*, *5*(1), 488-507. https://doi.org/10.35381/r.k.v5i1.794

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2016). *Programa de Estudio 2º Medio Matemática*. Autor.

Moreano, G., Asmad, U., Cruz, G., y Cuglievan, G. (2008). Concepciones sobre la enseñanza de matemática en docentes de primaria de escuelas estatales. *Revista de Psicología, 26*(2), 299-334. https://doi.org/10.18800/psico.200802.005

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

POSTGRADOS EN
EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ULAGOS

sochiem
SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

SEREMI
Ministerio de Educación
Región de Los Lagos

CASIO

sm
Juntos cuidamos la educación

PhET
INTERACTIVE SIMULATIONS